

Integrais Definidas

por
Milton Procópio de Borba

1. Algumas situações que usam Integrais Definidas

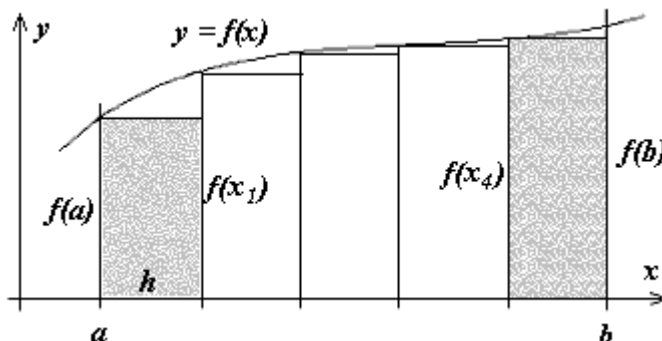
Antes de começarmos a parte matemática do nosso capítulo, vamos apresentar algumas situações onde são usadas integrais definidas.

1.1 Áreas planas

A área A entre as curvas $y = 0$ (eixo OX), $y = f(x) \geq 0$ (curva), $x = a$ (limite vertical inferior) e $x = b$ (limite vertical superior) pode ser calculada como uma soma de infinitos retângulos muito finos.

Na figura ao lado, com $N = 5$ retângulos:

$$A \approx f(a) \cdot h + f(x_1) \cdot h + \dots + f(x_4) \cdot h$$

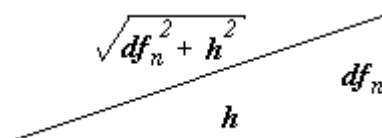


O valor correto desta área A é dado por:

$$A = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n) \cdot h = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N f(x_n) \cdot h, \text{ onde } h = (b - a)/N \text{ e } x_n = a + n \cdot h$$

1.2 Comprimento de arco

O comprimento do arco da curva $y = f(x)$ descrita no item anterior pode ser calculado como a soma de infinitas hipotenusas de pequenos triângulos retângulos.



Como $\sqrt{df_n^2 + h^2} = \sqrt{\frac{df_n^2 + h^2}{h^2}} \cdot h = \sqrt{1 + \left(\frac{df_n}{h}\right)^2} \cdot h \approx \sqrt{1 + (f'_n)^2} \cdot h$, temos que

$$L \approx \sqrt{1 + (f'_1)^2} \cdot h + \sqrt{1 + (f'_2)^2} \cdot h + \dots + \sqrt{1 + (f'_N)^2} \cdot h, \text{ ou que } L = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \sqrt{1 + (f'_n)^2} \cdot h,$$

1.3 Volume de revolução

O Volume de revolução (em torno do eixo OX) da área descrita no primeiro item pode ser calculado como uma soma de infinitos discos cilíndricos muito finos.

Cada disco tem volume de $\pi \cdot f(x_n)^2 \cdot h$. Assim, $V \approx \pi \cdot [f(x_1)^2 \cdot h + f(x_2)^2 \cdot h + \dots + f(x_N)^2 \cdot h]$.

O seu valor correto é
$$V = \pi \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N f(x_n)^2 \cdot h.$$

1.4 Superfície de revolução

A superfície de revolução (em torno do eixo OX) da curva $y = f(x)$ descrita no primeiro item pode ser calculada, segundo o Teorema de Pappus, como uma soma de infinitas partes de setores circulares muito finas.

Cada setor tem uma área S_n equivalente à faixa retangular com largura igual à hipotenusa citada no item 1.2 e com comprimento igual à circunferência descrita pelo centro desta hipotenusa:

$$S_n \approx (\sqrt{1 + (f'_n)^2} \cdot h) \cdot [2 \cdot \pi \cdot f(x_n)] \Rightarrow S = 2 \pi \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N f(x_n) \sqrt{1 + (f'_n)^2} \cdot h$$

1.5 Centro de gravidade (baricentro)

O baricentro da área descrita no primeiro item pode ser calculada aplicando o Teorema dos Momentos (de Varignon) a infinitos retângulos muito finos:

Do Teorema, temos que “O Momento da soma é igual à soma dos momentos”.

Em relação ao eixo OX , temos : $A \cdot x_g \approx A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + \dots + A_5 \cdot x_5 = \sum_{n=1}^5 f(x_n) \cdot h \cdot x_n$

Daí, tiramos que
$$x_g = (I/A) \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N x_n \cdot f(x_n) \cdot h$$

Em relação a OY , temos : $A \cdot y_g \approx A_1 \cdot y_1/2 + A_2 \cdot y_2/2 + \dots + A_5 \cdot y_5/2 = \sum_{n=1}^5 f(x_n) \cdot h \cdot f(x_n)/2$

Daí, tiramos que
$$y_g = I/(2A) \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N [f(x_n)]^2 \cdot h$$

1.6 Trabalho realizado por uma força

O trabalho T realizado por uma força $F(x)$, que varia ao longo da trajetória, pode ser calculado como uma soma de infinitas parcelas de trabalhos realizados por forças constantes em pequenos trechos de comprimento h .

$T \approx F(x_1) \cdot h + F(x_2) \cdot h + \dots + F(x_N) \cdot h \Rightarrow T = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N F(x_n) \cdot h$

2. Integral Definida como soma infinita

Os itens 1.1 a 1.6 dá uma indicação de que estas somas infinitas de pequenos produtos aparecem em diferentes situações. Trataremos de estudá-las melhor nos próximos itens.

Se existe $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n) \cdot \Delta x = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N f(x_n) \cdot \Delta x$, onde $\Delta x = (b - a)/N$ e $x_n = a + n \cdot \Delta x$,

dizemos que a função f é integrável no intervalo $[a, b]$ e representamos este limite por

$\int_a^b f(x) dx$ (usamos Δx no lugar de h , para deixar mais claro que $h = \Delta x =$ variação em x).

Os principais exemplos de funções integráveis são as funções contínuas (ou com apenas uma quantidade finita de descontinuidades de primeira espécie).

Analogamente, por exemplo, o limite que calcula a ordenada y_g do centro de gravidade pode ser

expresso usando a integral definida: $y_g = I/(2A) \int_a^b [f(x)]^2 dx$

2.1 Nomenclatura

O limite $\int_a^b f(x) dx$ é chamado de **Integral Definida** (ou simplesmente **Integral**), a expressão $f(x)$ é denominada de **integrand**, os valores a e b são os **limites inferior** e **superior** respectivamente e dx representa a **diferencial** da **variável de integração** (x).

2.2 Exemplos:

2.2.1 Calcular a Integral (definida) de $f(x) = x^2$ no intervalo $[1, 5] = \int_1^5 x^2 dx$

Devemos calcular $A = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N x_n^2 \cdot h$, com $h = 4/N$ e $x_n = 1 + n \cdot h = 1 + 4n/N$

Vamos chamar de $S(N) = \sum_{n=1}^N x_n^2 \cdot h = (1+h)^2 \cdot h + (1+2h)^2 \cdot h + (1+3h)^2 \cdot h + \dots + (1+N \cdot h)^2 \cdot h$

$$S(N) = (1 + 2h + h^2) \cdot h + (1 + 4h + 4h^2) \cdot h + (1 + 6h + 9h^2) \cdot h + \dots + (1 + 2N \cdot h + N^2 \cdot h^2) \cdot h$$

$$S(N) = (1 + 1 + 1 + \dots + 1) \cdot h + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + N) \cdot h^2 + (1 + 4 + 9 + \dots + N^2) \cdot h^3 = S_0 \cdot h + 2 \cdot S_1 \cdot h^2 + S_2 \cdot h^3$$

O primeiro parêntese S_0 vale N (N parcelas iguais a 1)

O segundo parêntese S_1 dá a soma de uma PA: $(1 + N) \cdot N/2 = (N + N^2)/2$

Para somar o terceiro parêntese S_2 fazemos assim:

$$1^3 = (1 + 0)^3 = 1$$

$$2^3 = (1 + 1)^3 = 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2 + 1^3$$

$$3^3 = (1 + 2)^3 = 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 2^3$$

$$N^3 = [1 + (N-1)]^3 = 1 + 3 \cdot (N-1) + 3 \cdot (N-1)^2 + (N-1)^3$$

$$(1 + N)^3 = 1 + 3 \cdot N + 3 \cdot N^2 + N^3$$

$$S_3 + (1+N)^3 = (N+1) + 3 \cdot S_1 + 3 \cdot S_2 + S_3 \Rightarrow 3 \cdot S_2 = (1+N)^3 - (N+1) - 3 \cdot S_1$$

$$\Rightarrow S_2 = (1+N)^3/3 - (N+1)/3 - (N + N^2)/2 = (N + 3 \cdot N^2 + 2 \cdot N^3)/6 = N(2N^2 + 3N + 1)/6$$

$$\text{Finalmente, } \boxed{S_2 = N(N+1)(2N+1)/6}$$

$$\text{Portanto, } S(N) = S_0 \cdot h + 2 \cdot S_1 \cdot h^2 + S_2 \cdot h^3 = Nh + (N + N^2) \cdot h^2 + N(2N^2 + 3N + 1) \cdot h^3/6$$

$$\text{Como } h = 4/N, \text{ temos que } S(N) = N \cdot (4/N) + (N + N^2) \cdot (16/N^2) + N(2N^2 + 3N + 1) \cdot (64/6N^3)$$

$$\text{Ou melhor, } S(N) = 4 + 16 \cdot (1 + N)/N + 32 \cdot (2N^2 + 3N + 1)/3N^3$$

$$\text{Assim, } \int_1^5 x^2 dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N x_n^2 \cdot h = \lim_{N \rightarrow \infty} S(N) = 4 + 16 + 64/3 = 124/3$$

Como $x^2 > 0$ em $[1, 5]$, acabamos de calcular a área da região côncava entre as retas verticais $x = 1$ e $x = 5$, desde a reta horizontal $y = 0$ até a curva $y = x^2$.

$$\text{Se repetirmos este processo no intervalo } [a, b], \text{ encontraremos } \int_a^b x^2 dx = (b^3 - a^3)/3$$

$$2.2.2 \text{ Calcular a integral de } f(t) = e^t \text{ no intervalo } [0, x] = \int_0^x e^t \cdot dt$$

$$\text{Devemos calcular } \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N e^{t_n} \cdot h, \text{ com } h = x/N \text{ e } t_n = 0 + n \cdot h = nx/N$$

$$\text{Chamaremos de } S(N) = \sum_{n=1}^N e^{nh} \cdot h = e^h \cdot h + e^{2h} \cdot h + e^{3h} \cdot h + \dots + e^{Nh} \cdot h$$

$$S(N) = h \cdot e^h \cdot (1 + e^h + e^{2h} + e^{3h} + \dots + e^{N \cdot h}) = h \cdot e^h \cdot (\text{Soma da PG}) = h \cdot e^h \cdot (e^{Nh} - 1) / (e^h - 1)$$

$$\text{Como } Nh = x, \text{ temos que } S(h) = h \cdot e^h \cdot (e^x - 1) / (e^h - 1) = (e^x - 1) \cdot e^h \cdot [h / (e^h - 1)]$$

$$\text{Assim, } \int_0^x e^t \cdot dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N e^{t_n} \cdot h = \lim_{h \rightarrow 0} S(h) = (e^x - 1) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} [h / (e^h - 1)] = e^x - 1.$$

Como $e^t > 0$ em $[0, x]$, acabamos de calcular a área da região côncava entre as retas verticais $t = 0$ e $t = x$, desde a reta horizontal $y = 0$ até a curva $y = e^t$.

$$\text{Se repetirmos este processo no intervalo } [a, b], \text{ encontraremos } \int_a^b e^t \cdot dt = e^b - e^a.$$

$$2.2.3 \text{ Calcular a integral de } f(\alpha) = \text{sen } \alpha \text{ no intervalo } [a, b] = \int_a^b \text{sen } \alpha \cdot d\alpha$$

$$\text{Devemos calcular } \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \text{sen } \alpha_n \cdot h, \text{ com } h = (b - a)/N \text{ e } \alpha_n = a + n \cdot h$$

$$S(h) = [\frac{\text{sen}(a+h) + \text{sen}(a+2h)}{2} + \text{sen}(a+3h) + \dots + \text{sen}(b-2h) + \text{sen}(b-h) + \text{sen}(b)] \cdot h$$

$$S(h) = [\frac{\text{sen}(a+h) + \text{sen}(a+2h)}{2} + \text{sen}(a+3h) + \dots + \text{sen}(b-2h) + \frac{\text{sen}(b-h) + \text{sen}(b)}{2}] \cdot h$$

2.S(h) = [$\frac{\text{sen}(a+h) + \text{sen}(a+2h)}{2}$ + Ss + $\frac{\text{sen}(b-h) + \text{sen}(b)}{2}$].h, onde Ss é a soma dos senos:

$$Ss = [\text{sen}(a+h) + \text{sen}(a+3h)] + [\text{sen}(a+2h) + \text{sen}(a+4h)] + \dots + [\text{sen}(b-2h) + \text{sen}(b)].$$

$$Ss = 2.\text{sen}(a+2h). \cos(h) + 2.\text{sen}(a+3h). \cos(h) + \dots + 2.\text{sen}(b-h). \cos(h).$$

$$Ss = 2. [\text{sen}(a+2h) + \text{sen}(a+3h) + \dots + \text{sen}(b-h)]. \cos(h).$$

$$h.Ss = 2. [S(h) - h.\text{sen}(a+h) - h.\text{sen}(b)]. \cos(h).$$

Portanto, substituindo $h.Ss$ em $2.S(h)$, temos que:

$$2.S(h) = [\frac{\text{sen}(a+h) + \text{sen}(a+2h)}{2} + \frac{\text{sen}(b-h) + \text{sen}(b)}{2}] \cdot h + h.Ss =$$

$$= [\text{sen}(a+h) + \text{sen}(a+2h) + \text{sen}(b-h) + \text{sen}(b)] \cdot h + 2. [S(h) - h.\text{sen}(a+h) - h.\text{sen}(b)]. \cos(h).$$

$$\text{Agrupando } S(h), \text{ temos: } 2.S(h) - 2.S(h). \cos(h) =$$

$$= [\text{sen}(a+h) + \text{sen}(a+2h) + \text{sen}(b-h) + \text{sen}(b)] \cdot h - 2.h. [\text{sen}(a+h) + \text{sen}(b)]. \cos(h).$$

$$\text{Assim, } S(h) = \frac{[\text{sen}(a+h) + \text{sen}(a+2h) + \text{sen}(b-h) + \text{sen}(b)] \cdot h - 2.h. [\text{sen}(a+h) + \text{sen}(b)]. \cos(h)}{2.(1 - \cos h)},$$

$$\text{ou, } S(h) = \frac{h^2}{2-2 \cos h} \cdot \frac{[\text{sen}(a+h) + \text{sen}(a+2h) + \text{sen}(b-h) + \text{sen}(b)] - 2. [\text{sen}(a+h) + \text{sen}(b)]. \cos(h)}{h}.$$

Pelo Teorema de L'Hospital, $\lim_{h \rightarrow 0} h^2/(2 - 2 \cos h) = 1$ e a outra fração tende a $\cos a - \cos b$

$$\text{Assim, } \int_a^b \text{sen } \alpha . d\alpha = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \text{sen } \alpha_n . h = \lim_{h \rightarrow 0} S(h) = -(\cos b - \cos a)$$

3. Propriedades

Algumas propriedades da **soma** e dos **limites** são transferidas para a integral:

$$3.1. \text{ Se } k \text{ é constante então } \int_a^b k.f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx.$$

$$3.2. \int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

$$3.3. \text{ Se } f(x) \leq g(x) \text{ no intervalo } [a, b] \text{ então } \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

$$3.4. \text{ Se } m \leq f(x) \leq M \text{ no intervalo } [a, b] \text{ então } m.(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M.(b-a).$$

$$3.5. \text{ Se } f \text{ for contínua no intervalo } [a, b] \text{ então } \exists \xi \in [a, b] \text{ tal que } \int_a^b f(x)dx = \xi.(b-a).$$

$$3.6. \text{ Para três números quaisquer } a, b \text{ e } c, \text{ vale } \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

sempre que estas integrais existam.

$$3.7. \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx.$$

4. Teorema Fundamental do Cálculo

Veremos, agora a ligação existente entre a Integral Definida, integral e Derivada, que nos permite calcular integrais bem mais rapidamente. Depois veremos alguns exemplos de aplicações conforme os itens 1.1 a 1.6.

O principal resultado é que “A área sob o gráfico de uma função aumenta (com o aumento do intervalo) numa velocidade equivalente ao valor da função”, isto é:

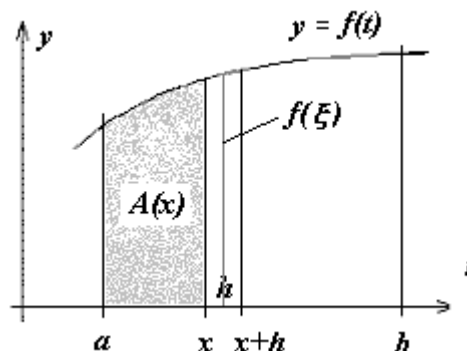
4.1. **Teorema:** Se $A(x) = \int_a^x f(t)dt$ então $A'(x) = f(x)$.

Demonstração: $A'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} [A(x+h) - A(x)] / h$

$$A'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right] / h$$

$$A'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\int_x^{x+h} f(t)dt \right] / h$$

$$A'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} [f(\xi) \cdot h] / h = f(x)$$



Com isto, conseguimos o que realmente nos interessa:

4.2. **Corolário:** Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ então $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

Demonstração: Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ então $F'(x) = f(x) = A'(x)$.

Assim, temos que $A(x) = F(x) + C$, para alguma constante C

Lembrando que $A(a) = F(a) + C = 0$ (uma integral no intervalo nulo $[a, a]$), tiramos: $C = -F(a)$.

Finalmente, de $A(x) = F(x) + C$, concluímos: $A(x) = F(x) - F(a)$.

Agora, $\int_a^b f(t)dt = A(b) = F(b) - F(a)$, que se costuma representar por $[F(x)]_a^b$

4.3. Exemplos:

4.3.1 Calcular a Integral (definida) de $f(x) = x^2$ no intervalo $[1, 5] = \int_1^5 x^2 dx$

Uma primitiva de $f(x) = x^2$ é $F(x) = x^3/3$. Então $\int_1^5 x^2 dx = F(5) - F(1) = 5^3/3 - 1^3/3 = 124/3$

$$\text{ou } \int_1^5 x^2 dx = \left[x^3 / 3 \right]_1^5 = 5^3/3 - 1^3/3 = 124/3$$

4.3.2 Calcular a integral de $f(t) = e^t$ no intervalo $[0, x] = \int_0^x e^t dt$

Uma primitiva de $f(t) = e^t$ é $F(t) = e^t$. Então $\int_0^x e^t dt = [e^t]_0^x = F(x) - F(0) = e^x - 1$

4.3.3 Calcular a integral de $f(\alpha) = \text{sen } \alpha$ no intervalo $[a, b] = \int_a^b \text{sen } \alpha d\alpha$

Uma primitiva de $f(\alpha) = \text{sen } \alpha$ é $F(\alpha) = -\cos \alpha$.

$$\text{Então } \int_a^b \text{sen } \alpha d\alpha = [-\cos \alpha]_a^b = -\cos b - (-\cos a) = \cos a - \cos b$$

5. Mudanças de variáveis

Durante o processo de encontrar a primitiva (integral indefinida), é comum lançar mão de uma nova variável auxiliar. Nestas situações, além da troca das respectivas diferenciais, devemos trocar os correspondentes limites de integração. Veremos alguns exemplos:

5.1. Calcular a integral de $f(t) = 2t \cdot e^{3-3t^2}$ no intervalo $[-1, 2] = \int_{-1}^2 2t \cdot e^{3-3t^2} dt$

Fazemos $u = 3 - 3t^2$. Daí tiramos que $du = -6t \cdot dt$, que $t = -1 \Rightarrow u = 0$ e que $t = 2 \Rightarrow u = -9$.

Então $\int_{-1}^2 2t \cdot e^{3-3t^2} dt = (-1/3) \int_0^{-9} e^u du$. Uma primitiva de $f(u) = e^u$ é $F(u) = e^u$.

Então $(-1/3) \int_0^{-9} e^u du = (-1/3) [e^u]_0^{-9} = (-1/3) [e^{-9} - e^0] = (1 - e^{-9})/3$

5.2. Calcular $\int_{-5}^5 \sqrt{25 - x^2} dx$

Fazemos $x = 5 \cdot \cos t$. Daí tiramos que $dx = -5 \cdot \sin t \cdot dt$, que $x = -5 \Rightarrow t = \pi$ e que $x = 5 \Rightarrow t = 0$.

Então $\int_{-5}^5 \sqrt{25 - x^2} dx = \int_{\pi}^0 \sqrt{25 - 25 \cos^2 t} (-5 \sin t) dt = 5 \int_0^{\pi} \sqrt{25(1 - \cos^2 t)} (\sin t) dt =$
 $= 25 \int_0^{\pi} (\sin t)(\sin t) dt$. Uma primitiva de $f(t) = \sin^2 t$ é $F(t) = (2t - (\sin 2t))/4$.

Então $\int_{-5}^5 \sqrt{25 - x^2} dx = (25) \left[\frac{2t - \sin 2t}{4} \right]_0^{\pi} = (25/4) [(2\pi - \sin 2\pi) - (0)] = 25\pi/2$, que é a área do meio círculo superior de raio 5.

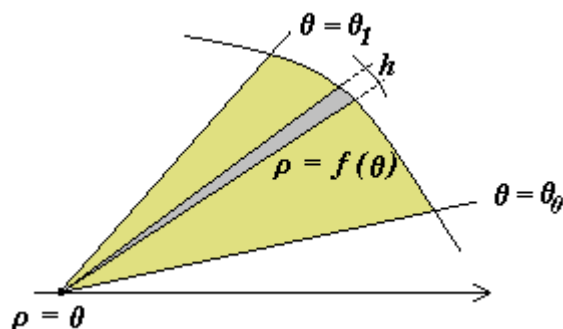
6. Integrais em coordenadas polares

6.1. Áreas em coordenadas polares

Em coordenadas cartesianas, como vimos, a figura situada entre dois valores (próximos) da variável independente (x), entre **a reta** que representa a função nula ($y = 0$) e a curva dada por uma função ($y = f(x)$), é um retângulo fino de largura h e altura $f(x)$, com área valendo $f(x) \cdot h$ (ver item 1.1)

Em coordenadas polares, a figura correspondente, situada entre dois valores (próximos) da variável independente (θ), entre **o ponto** que representa a função nula ($\rho = 0$) e a curva dada por uma função ($\rho = f(\theta)$), é um fino setor circular com ângulo h e raio $f(\theta)$, com área valendo $(1/2) \cdot [f(\theta)]^2 \cdot h$.

Assim, se $f(\theta) \geq 0$, para θ em $[\theta_0, \theta_1]$, então a área entre $\theta = \theta_0$, $\theta = \theta_1$ e $\rho = f(\theta)$ é dada por



$$A = (1/2) \int_{\theta_0}^{\theta_1} [f(\theta)]^2 d\theta$$

6.2. Comprimento de arco em coordenadas polares

Segundo o item 1.2 (e com a definição de Integral definida vista no item 2), o comprimento em

coordenadas retangulares para a curva $y = g(x)$ é dado por $L = \int_a^b \sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx} \right]^2} dx = \int_a^b \sqrt{dx^2 + dy^2}$

Para coordenadas polares, temos a curva $\rho = f(\theta)$, aplicamos a mudança de variáveis:

$$x = \rho \cdot \cos \theta = f(\theta) \cdot \cos \theta \Rightarrow dx = [f'(\theta) \cdot \cos \theta - f(\theta) \cdot \sin \theta] d\theta \quad \text{e}$$

$$y = \rho \cdot \sin \theta = f(\theta) \cdot \sin \theta \Rightarrow dy = [f'(\theta) \cdot \sin \theta + f(\theta) \cdot \cos \theta] d\theta$$

Daí, temos que: $dx^2 + dy^2 = [f'(\theta)]^2 + [f(\theta)]^2 d\theta^2$ e portanto,

$$L = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{[f'(\theta)]^2 + [f(\theta)]^2} d\theta$$

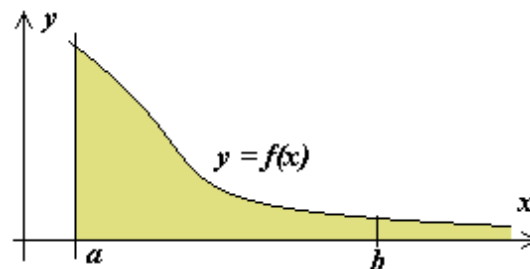
7. Integrais Impróprias

Temos duas situações em que uma integral é dita *imprópria*:

7.1. Intervalo ilimitado, função limitada

Se a função tende a zero, quando x tende ao infinito, então *talvez* possa existir

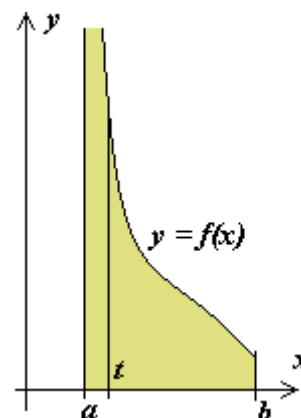
$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$



7.2. Intervalo limitado, função ilimitada

Se a função tende ao infinito, quando x tende ao valor a , então *talvez* possa existir

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a} \int_t^b f(x) dx$$



8. Ainda

Como nem todas as funções têm uma primitiva conhecida, estas técnicas para calcular Integrais Definidas podem ser insuficientes. Veremos, mais tarde, outras maneiras:

8.1. Integração por Séries,

Consiste em transformar o integrando numa “*série*”, ou seja, num polinômio de grau infinito, cujos coeficientes das maiores potências se tornam muito pequenos, quase desprezíveis (Capítulo IV do nosso curso de CDI-II)

8.2. Integração Numérica

Consiste em aperfeiçoar a técnica do uso de retângulos (como visto no item 2.2) e de trapézios cada vez menores, conforme a precisão exigida (Capítulo IV da disciplina [CAN](#) = Cálculo Numérico).