Integrais Múltiplas

por

Milton Procópio de Borba

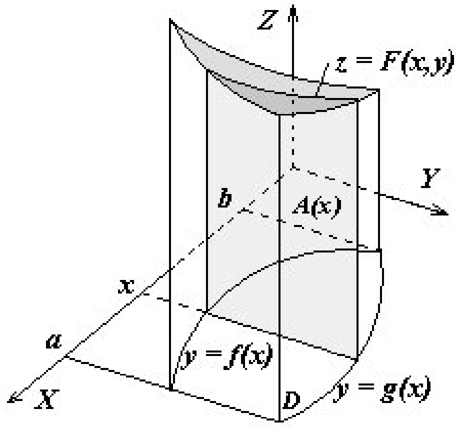
Neste capítulo, iremos ampliar os conhecimentos de integrais para funções que dependem de mais que uma variável. Iniciaremos com as de ***duas*** variáveis.

1. Integrais Duplas

Quando uma função $z = F(x,y)$ depende de duas variáveis independentes num certo domínio do plano XoY, seu gráfico é uma superfície situada sobre este domínio.

Trataremos, no nosso estudo, com os domínios chamados ***regulares***, isto é, compreendidos entre o gráfico de duas funções $y = f(x)$ e $y = g(x)$, ambas definidas para todo x entre $x = a$ e $x = b$.

Para cada x (fixo) entre $x = a$ e $x = b$, a função $z = F(x,y)$ depende somente de y e podemos calcular a sua integral definida desde $y = f(x)$ até $y = g(x)$: $A(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} F(x,y)dy$



Como $A(x)$ pode ser definida para todo x entre $x = a$ e $x = b$, podemos calcular sua integral definida neste intervalo: $\int_a^b A(x)dx$

Graficamente, se $F(x,y) > 0$, $A(x)$ seria a área plana (para cada x) desde o plano XoY até a superfície dada por $z = F(x,y)$, enquanto que $\int_a^b A(x)dx$ representaria o volume do sólido entre o domínio e a superfície $z = F(x,y)$, constituído pela soma de infinitas áreas $A(x)$ multiplicadas por uma pequena variação em x.

1.1. Definição.

A integral dupla de $z = F(x,y)$, no seu domínio regular D entre $y = f(x)$ e $y = g(x)$ definidas para todo x entre $x = a$ e $x = b$ é dada por: $\int_a^b \left[\int_{f(x)}^{g(x)} F(x,y)dy \right] dx$, ou simplesmente $\int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} F(x,y)dydx$, ou ainda $\iint_D F(x,y)dS$, onde $dS = dy.dx$ é a diferencial (ou elemento) da área.

1.2. Propriedades.

Como nas integrais definidas temos:

1.2.1. $\iint_D k.F(x,y)dS = k.\iint_D F(x,y)dS$

1.2.2. $\iint_D [F(x,y) + G(x,y)]dS = \iint_D F(x,y)dS + \iint_D G(x,y)dS$

1.2.3. Se $F(x,y) \le G(x,y)$ então $\iint_D F(x,y)dS \le \iint_D G(x,y)dS$

1.2.4. Se $m \le G(x,y) \le M$ então $m.S \le \iint_D F(x,y)dS \le M.S$, quando S é a área de D

1.2.5. Se $G(x,y)$ é contínua em D então existe um ξ em D tal que $\iint_D F(x,y)dS = F(\xi).S$, 1.2.6. Se $D = D_1 \cup D_2$ e $D_1 \cap D_2 = \phi$ então $\iint\limits_{D} F(x,y)dS = \iint\limits_{D_1} F(x,y)dS + \iint\limits_{D_2} F(x,y)dS$

1.2.7. Se D é um retângulo $[a,b] \times [c,d]$ do plano XoY então

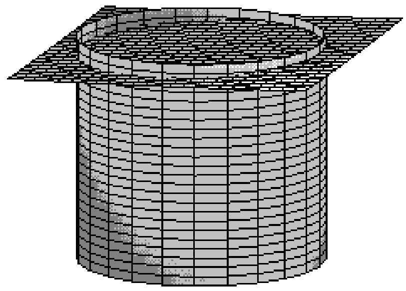
$$\iint\limits_{D} F(x,y)dS = \int_a^b\int_c^d F(x,y)dydx = \int_c^d\int_a^b F(x,y)dxdy$$

1.3. Interpretação geométrica.

A integral dupla de uma função $F(x,y)$ num domínio D do plano XoY representa graficamente o volume do sólido com uma base plana em D, superfície lateral cilíndrica cuja diretriz é a fronteira de D e a outra face é a superfície $z = F(x,y)$.

Em particular, se $F(x,y) = 1$, o valor da integral coincide com a área de D.

1.4. Cálculo da integral dupla.



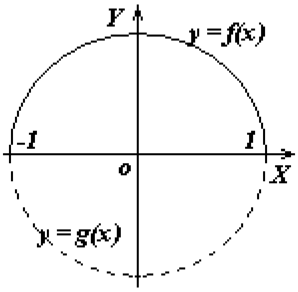
Como exemplo, usaremos $F(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 5y + 263$ no domínio $D = \{ (x , y) / x^2 + y^2 \leq 1 \}$.

A fronteira do domínio D é delimitada pelas duas funções:

$y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ e $y = g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$, ambas em $[-1 , 1]$.

Então, $V = \iint\limits_{D} F(x,y)dS = \int_{-1}^{1}\left[\int_{f(x)}^{g(x)} F(x,y)dy\right]dx$

ou ainda:



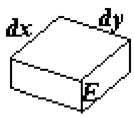
$$V = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2 - 2x + 5y + 263)dydx$$

$$V = \int_{-1}^{1}\left[x^2 y + \frac{y^3}{3} - 2xy + 5\frac{y^2}{2} + 263y\right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$V = \int_{-1}^{1}[(2x^2 - 4x + 256)\sqrt{1 - x^2} + \frac{2}{3}(1 - x^2)^{2/3}]dx$$

$$V = \left[\frac{4 - x}{3}\sqrt{(1 - x^2)^3} + \frac{527}{2}(x\sqrt{1 - x^2} + arcsen\, x)\right]_{-1}^{1} = 527\pi/2 \text{ u.v.} \approx 827{,}81 \text{ u.v.}$$

1.5. Aplicações físicas.



Se, por exemplo, a função representasse a _temperatura_ $T(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 5y + 263$ (em Kelvin) da chapa circular de raio $1m$ no centro do plano XoY, com espessura E (m), densidade ρ (kg/m^3) e calor especifico c $(kcal/(kg.K))$, então esta integral teria servido para calcular a _quantidade_ Q $(kcal)$ _de calor_ naquela chapa.

Realmente, com $\rho = dm/dv$ e $dv = E.dxdy$, temos que

$Q \approx dm.c.T_1 + dm.c.T_2 + dm.c.T_3 + \ldots + dm.c.T_N = c(\rho.T_1.dv + \rho.T_2.dv + \rho.T_3.dv + \ldots + \rho.T_N.dv)$

$Q \approx c.\rho(T_1.E.dxdy + T_2.E.dxdy + T_3.E.dxdy + \ldots + T_N.E.dxdy) = c\rho E(T_1.dxdy + T_2.dxdy + T_3.dxdy + \ldots + T_N.dxdy)$

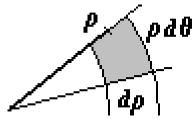
Na verdade, $Q = c\rho E \iint\limits_{D} T(x,y)dS = c\rho E \int_{-1}^{1}\left[\int_{f(x)}^{g(x)} T(x,y)dy\right]dx = c\rho E(527\pi/2)$ kcal. $\approx 827{,}81\, c\rho E$ kcal.

A exemplo das integrais de funções de uma variável, podemos, agora, calcular _centros de gravidade de sólidos_

1.6. Transformação de coordenadas.

A integral dupla calculada no item 1.4 apresentou algumas expressões complicadas, pois o domínio D era um círculo, cujas fronteiras $y = f(x)$ e $y = g(x)$ tinha equações não muito simples. A variável x variava entre -1 e 1. Para cada x, a variável y ia de $y = g(x) = -\sqrt{1-x^2}$ até $y = f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

Em coordenadas polares, este domínio D tem fronteiras bem mais simples: $\rho = 1$, para qualquer θ. A variável θ varia de 0 a 2π. Para cada valor de θ, a variável ρ vai de 0 até 1.



Enquanto um elemento de área em coordenadas retangulares é $dA = dx.dy$, em coordenadas polares, $\boxed{dA = \rho.d\rho.d\theta}$.

Na verdade, de $x = \rho.\cos\theta$, tiramos que $dx = \cos\theta.\,d\rho - \rho.\mathrm{sen}\,\theta.\,d\theta$

e de $y = \rho.\mathrm{sen}\,\theta$, tiramos que $dy = \mathrm{sen}\theta.\,d\rho + \rho.\cos\theta.\,d\theta$

Como a área é o módulo do produto vetorial: $dA = dx\,.\,dy = \det\begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho.\mathrm{sen}\theta \\ \mathrm{sen}\theta & \rho.\cos\theta \end{vmatrix} d\rho\,.\,d\theta$

Este $\det$ é conhecido como <u>Jacobiano</u> da transformação: $J = \det\begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho.\mathrm{sen}\theta \\ \mathrm{sen}\theta & \rho.\cos\theta \end{vmatrix} = \rho$

Com isto, a integral do item 1.4 pode ser calculada por

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (\rho^2 - 2\rho.\cos\theta + 5\rho.\mathrm{sen}\theta + 263)\,\rho.d\rho.d\theta$$

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^1 [\rho^3+\rho^2.(5\mathrm{sen}\theta - 2\cos\theta)+263\rho].d\rho.d\theta = \int_0^{2\pi} [\rho^4/4 + (\rho^3/3).(5\mathrm{sen}\theta - 2\cos\theta) + 263\rho^2/2\,]_0^1.d\theta$$

$$V = \int_0^{2\pi} [\,1/4 + (5\mathrm{sen}\theta - 2\cos\theta)/3 + 263/2\,].d\theta = [\,\theta/4 - (5\cos\theta + 2\mathrm{sens}\,\theta)/3 + 263\theta/2\,]_0^{2\pi}$$

$$V = (\pi/2 - 5/3 + 263\pi) - (-5/3) = (1/2 + 263)\pi = 527\pi/2. \approx 827,81.$$

1.6.1. Cálculo de $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$.

Trata-se de uma integral imprópria (de uma variável) muito útil em estatística. Como e^{-x^2} não tem primitiva conhecida, usamos o artifício de calcular $II = \displaystyle\iint_{R^2} e^{-x^2-y^2}dA$ em coordenadas polares e em coordenadas cartesianas. Da comparação dos resultados, resulta o valor procurado de I.

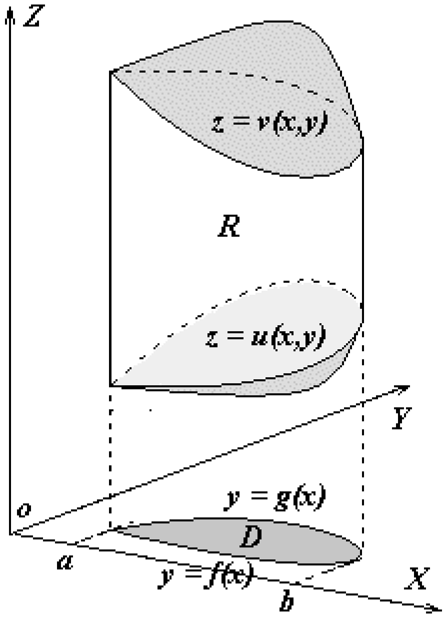
$$II = \iint_{R^2} e^{-x^2-y^2}dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\rho^2}\rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{-1}{2}\int_0^{-\infty} e^u du\right]d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}\right]d\theta = \frac{1}{2}2\pi = \pi$$

$$II = \iint_{R^2} e^{-x^2-y^2}dA = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}dydx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-y^2}dydx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy\right)dx$$

$$II = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}(I)dx = I.\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = I.I = I^2.$$ Portanto, $I^2 = II = \pi \Rightarrow \boxed{I = \sqrt{\pi}}$.

2. Integrais Triplas

Agora estaremos interessados em integrar uma função ***F(x,y,z)*** numa região ***R*** do espaço ***XYZ***, delimitado por uma face inferior ***z = u(x,y)***, uma superfície lateral cilíndrica cuja diretriz é a fronteira da projeção (***D***) de ***R*** no plano ***XoY*** e por outra face superior ***z = v(x,y)***.



2.1. Definição.

Se ambas as funções ***z = u(x,y)*** (faces inferior de ***R***) e ***z = v(x,y)*** (faces superior) são definidas no domínio ***D*** do plano ***XoY*** situada entre ***y = f(x)*** e ***y = g(x)*** válidas para todo ***x*** de ***a*** até ***b***, então a integral tripla de ***F(x,y,z)*** nesta região ***R*** é dada por

$$\int_a^b \left\{ \int_{f(x)}^{g(x)} \left[\int_{u(x,y)}^{v(x,y)} F(x,y,z)dz \right] dy \right\} dx$$, ou simplesmente

$$\int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} \int_{u(x,y)}^{v(x,y)} F(x,y,z)dzdydx$$, ou ainda

$$\iiint_R F(x,y,z)dV$$, onde ***dV = dz.dy.dx*** é a diferencial (ou elemento) da volume.

2.2. Propriedades.

Análogas às propriedades da integral dupla (itens 1.2.1 a 1.2.6), trocado-se $F(x,y)$ por $F(x,y,z)$, trocando-se D *por* R, trocando-se S (*"área"*) por V (*"volume")* e

2.2.7. Se R é um paralelepípedo $[a,b]$ x $[c,d]$ x $[r,s]$ do espaço ***XYZ*** então

$$\iiint_R F(x,y,z)dV = \int_a^b \int_c^d \int_r^s F(x,y,z)dzdydx = \int_r^s \int_a^b \int_c^d F(x,y,z)dydxdz = \ldots$$ (ou outra ordem)

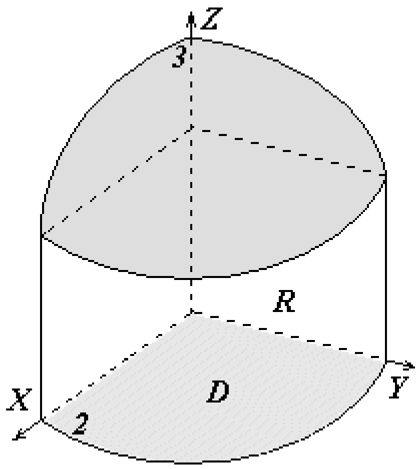
2.3. Interpretação geométrica.

Em particular, se ***F(x,y,z) = 1***, o valor da integral coincide com o <u>*volume*</u> da região ***R***.

2.4. Cálculo das integrais triplas.

Como exemplo, usaremos ***F(x, y,z)= 10xy+100z*** na região

R = *primeiro octante da esfera de raio* ***3****cm, interior, ao cilindro circular* ***x² + y² = 4***



$$I = \iiint_R F(x,y,z)dV = \iiint_R (10xy + 100z)dV =$$

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} (10xy + 100z)dzdydx =$$

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (10xy\sqrt{9-x^2-y^2} + 450 - 50x^2 - 50y^2)dydx$$

$$I = (1/3)\int_0^2 [-50x\sqrt{5} + (1150 - 100x^2)\sqrt{4-x^2} + (90x - 10x^3)\sqrt{9-x^2}]dx$$

$$\boldsymbol{I} = \iiint\limits_R F(x,y,z)dV = \boxed{-50\sqrt{5} + 350\pi + 162} \approx \boldsymbol{1149{,}75}.$$

2.5. Aplicações físicas.

Se uma função $F(x,y,z)$ representa a <u>*concentração média*</u> de certo elemento (por *unidade de volume*) numa região R do espaço XYZ, sua integral tripla representa a <u>*quantidade total*</u> deste elemento no sólido R com uma face inferior em $z = u(x,y)$, uma superfície lateral cilíndrica cuja diretriz é a fronteira da projeção (D) de R no plano XoY e outra face superior representada pela superfície $z = v(x,y)$.

No nosso exemplo, se, em cada ponto da região R, $F(x,y,z)$ representasse a *concentração média* de partículas (em u/cm^3), teríamos calculado um total de aproximadamente ***1150*** partículas em R.

Também, se, em cada ponto da região R, a <u>*densidade*</u> (em g/cm^3) fosse representada por $F(x,y,z)$, teríamos calculado a <u>*massa total*</u> de R : ***1150*** *g*, com volume de $V = \iiint\limits_R dV$.

2.6. Transformação de coordenadas

No espaço tridimensional, dois outros sistemas de coordenadas são muito difundidos e podem facilitar alguns cálculos, principalmente se estão envolvidas partes cilíndricas e/ou esféricas.

2.6.1. Coordenadas cilíndricas

A exemplo das integrais duplas, enquanto um elemento de volume em coordenadas retangulares é $dV = dx.dy.dz$, em coordenadas cilíndricas, $\boxed{dV = \rho.d\rho.d\theta.dz}$.

Com isto, a integral do item 2.4 pode ser calculada por

$$\boldsymbol{I} = \iiint\limits_R F(\rho,\theta,z)dV = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2\int_0^{\sqrt{9-\rho^2}} (10\rho\cos\theta.\rho\,sen\,\theta + 100z)\rho.dz.d\rho.d\theta$$

$$\boldsymbol{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2\int_0^{\sqrt{9-\rho^2}} (5\rho^3\,sen\,2\theta + 100\rho.z)dz.d\rho.d\theta$$

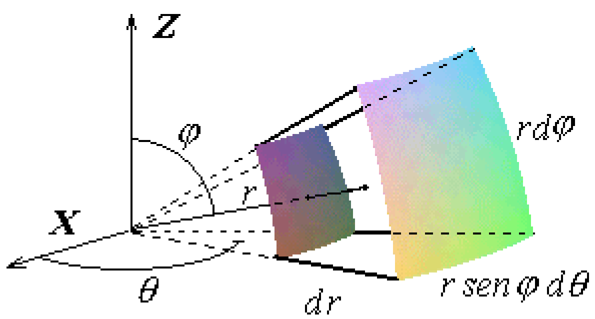
$$\boldsymbol{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 [5\rho^3\,sen\,2\theta\sqrt{9-\rho^2} + 50\rho(9-\rho^2)]d\rho.d\theta$$

$$\boldsymbol{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(162 - 50\sqrt{5})sen\,2\theta + 700]d\theta = \boxed{-50\sqrt{5} + 350\pi + 162} \approx \boldsymbol{1149{,}75}.$$

2.6.2. Coordenadas esféricas

Este sistema simplifica muito uma integral numa região esférica ou numa parte dela.
O elemento de volume é dado por

$\boxed{dV = r^2.\,sen\,\varphi.\,dr.\,d\theta.\,d\varphi}$,



que também pode ser determinado pelo módulo do <u>*Jacobiano*</u> J da transformação:

$x = r.\,sen\,\varphi.\cos\theta$
$y = r.\,sen\,\varphi.\,sen\,\theta$
$z = r.\cos\varphi$

$$J = \det\begin{vmatrix} sen\,\varphi.\cos\theta & -r.\,sen\varphi.\,sen\,\theta & -r.\cos\varphi.\cos\theta \\ sen\varphi.\,sen\,\theta & r.\,sen\varphi.\cos\theta & r.\cos\varphi.\,sen\,\theta \\ \cos\varphi & 0 & -r.\,sen\,\varphi \end{vmatrix} = \boxed{-r^2\,sen\,\varphi}.$$

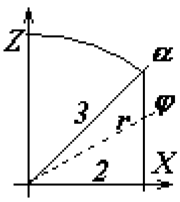
A integral do item 2.4 pode ser calculada por

$$\boldsymbol{I} = \iiint_R G(r,\theta,\varphi)dV$$

$$\boldsymbol{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{f(\varphi)}(10r.sen\varphi.cos\theta.r.sen\varphi.sen\theta + 100r.cos\varphi)r^2.sen\varphi.dr.d\varphi.d\theta$$

$$\boldsymbol{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{f(\varphi)}(5r^4.sen^3\varphi.sen2\theta + 50r^3.sen2\varphi).dr.d\varphi.d\theta$$ $= \boldsymbol{I_1 + I_2}$, onde $\boldsymbol{sen\ \alpha = 2/3}$ e

$$\boldsymbol{I_1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\alpha}\int_0^{3}(5r^4.sen^3\varphi.sen2\theta + 50r^3.sen2\varphi).dr.d\varphi.d\theta$$ ***(parte esférica)***



$$\boldsymbol{I_2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{2}{sen\varphi}}(5r^4.sen^3\varphi.sen2\theta + 50r^3.sen2\varphi).dr.d\varphi.d\theta$$ ***(parte cilíndrica)***

Calculando:

$$\boldsymbol{I_1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\alpha}(243\,sen^3\varphi.sen2\theta + 1012{,}5\,sen2\varphi)d\varphi.d\theta$$

$$\boldsymbol{I_1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}[(162 - 66\sqrt{5})sen2\theta + 450].d\theta = \boldsymbol{-66\sqrt{5} + 225\pi + 162}$$

$$\boldsymbol{I_2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{32\,sen2\theta}{sen^2\varphi} + \frac{200\,sen2\varphi}{sen^4\varphi}\right].d\varphi.d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(250 + 16\,sen2\theta\sqrt{5}).d\theta = \boldsymbol{16\sqrt{5} + 125\pi}$$

$$\boldsymbol{I = I_1 + I_2} = (\boldsymbol{-66\sqrt{5} + 225\pi + 162}) + (\boldsymbol{16\sqrt{5} + 125\pi}) = \boxed{-50\sqrt{5} + 350\pi + 162} \approx \boldsymbol{1149{,}75}.$$