Primeira Prova de CDI-2 – 26 de março de2007

Nome:____ Curso:________ Prof.:___________

1) Considerando algumas aplicações de integral citadas a seguir, assinale abaixo, na frente das integrais, a letra inicial correspondente às respectivas aplicações.

Áreas planas	Superfície de revolução
Baricentro (centro de gravidade)	Trabalho realizado por uma força
Comprimento de arco	Volume de revolução

(**V**)	$\pi\int_a^b [f(x)]^2 dx$	(**C**)	$\int_a^b \sqrt{(\rho')^2+\rho^2}\, d\theta$
(**A**)	$\int_a^b \varphi(t)\phi'(t)dt$	(**C**)	$\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx$
(**A**)	$\frac{1}{2}\int_a^b \rho^2 d\theta$	(**C**)	$\int_a^b \sqrt{[\phi(t)']^2+[\varphi(t)']^2}\, dt$
(**A**)	$\int_a^b f(x)dx$	(**S**)	$2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx$
(**T**)	$\int_a^b F dx$	(**B**)	$\left(\frac{1}{A}\int_a^b xf(x)dx\, ,\, \frac{1}{2A}\int_a^b [f(x)]^2 dx\right)$

2) Escrevas as integrais que calculam a área da região plana no 1º quadrante delimitada por $xy^2=1$ "acima" de $y=x$, de duas formas: ora considerando y como função de x e ora considerando x como função de y. Resolva (calcule a área) por uma destas formas.

3) Calcule a área da superfície gerada pela rotação em torno do eixo ***OX***, da curva $y=\sqrt{x}$ antes de $x=2$.

4) Calcule o comprimento da cardióide $\rho = 1+\cos\theta$

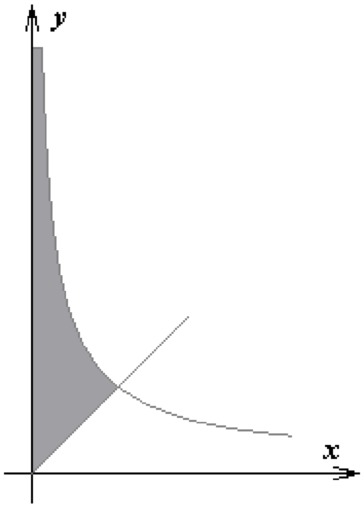
5) Calcule pela definição, usando *Soma Superior*, o valor de $\int_0^3 (3x^2+2x)dx$.

Obs.: $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1+4+9+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Gabarito:



2) Uma forma: $A = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - x \right) dx$

Outra forma: $A = \int_0^1 y dy + \int_1^{\infty} \frac{1}{y^2} dy$

Cálculo: $A = \lim_{k \to 0^-} \int_k^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - x \right) dx =$

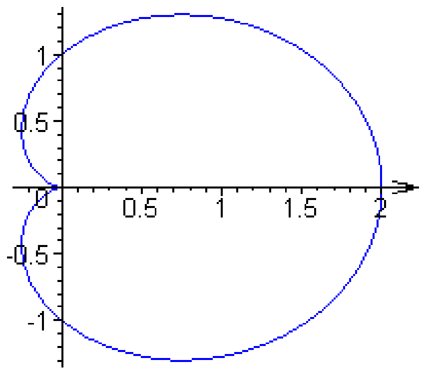
$$A = \lim_{k \to 0^-} \left[2\sqrt{x} - \frac{x^2}{2} \right]_k^1 = \lim_{k \to 0^-} \left[\left(2 - \frac{1}{2} \right) - \left(2\sqrt{k} - \frac{k^2}{2} \right) \right]$$

$A = \frac{3}{2}$ *u.a.*

3) $S = 2\pi \int_0^2 \sqrt{x} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right)^2} dx = 2\pi \int_0^2 \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx = 2\pi \int_0^2 \sqrt{x} \sqrt{\frac{1+4x}{4x}} dx$

$S = \pi \int_0^2 \sqrt{1+4x} dx = \pi \int_1^9 \sqrt{u} \frac{du}{4} = \frac{\pi}{4} \left[\frac{2}{3} \sqrt{u^3} \right]_1^9 = \frac{\pi}{6} \left[\sqrt{9^3} - \sqrt{1^3} \right] = \frac{\pi}{6} (27 - 1)$

$S = \frac{13\pi}{3}$ *u.a.*



4) $C = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{(-sen\,\theta)^2 + (1 + cos\,\theta)^2} d\theta$

$C = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{sen^2\,\theta + 1 + 2 cos\,\theta + cos^2\,\theta} d\theta$

$C = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2 cos\,\theta} d\theta = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{4(1 + cos\,\theta)}{2}} d\theta$

$C = 4 \int_0^{\pi} \sqrt{cos^2 \frac{\theta}{2}} d\theta = 4 \int_0^{\pi} cos \frac{\theta}{2} d\theta = 8 \left[sen \frac{\theta}{2} \right]_0^{\pi} = 8 \quad sen \frac{\pi}{2} = 8$ *u.c.*

5) $\int_0^3 (3x^2 + 2x) dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} (3x_k^2 + 2x_k).h$, com $h = \frac{3}{n}$ e $x_k = k.h$

Vamos chamar de S(n) = $\sum_{k=1}^{n}(3x_k^2 + 2x_k).h$

S(n) = $(3h^2 + 2h)h + [3(2h)^2 + 2(2h)]h + [3(3h)^2 + 2(3h)]h + \ldots + [3(nh)^2 + 2(nh)]h$

S(n) = $(3h^2 + 2h)h + [3(4h^2) + 2(2h)]h + [3(9h^2) + 2(3h)]h + \ldots + [3(n^2h^2) + 2(nh)]h$

S(n) = $3(1 + 4 + 9 + \ldots + n^2).h^3 + 2(1 + 2 + 3 + \ldots + n)h^2$

S(n) = $3\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}h^3 + 2\,\frac{n(n+1)}{2}h^2$

S(n) = $\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}h^3 + n(n+1)h^2$

Com $h = \frac{3}{n}$, S(n) = $\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}\,\frac{27}{n^3} + n(n+1)\,\frac{9}{n^2}$

Então, $\int_0^3 (3x^2 + 2x)dx = \lim_{n\to\infty} S(n) = \lim_{n\to\infty} [\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}\,\frac{27}{n^3} + n(n+1)\,\frac{9}{n^2}]$

$$\int_0^3 (3x^2 + 2x)dx = 27 + 9 = 36$$