Primeira Prova de CDI-II – 24 de março de2007

1) Considerando algumas aplicações de integral citadas a seguir, assinale abaixo, na frente das integrais, a letra inicial correspondente às respectivas aplicações.

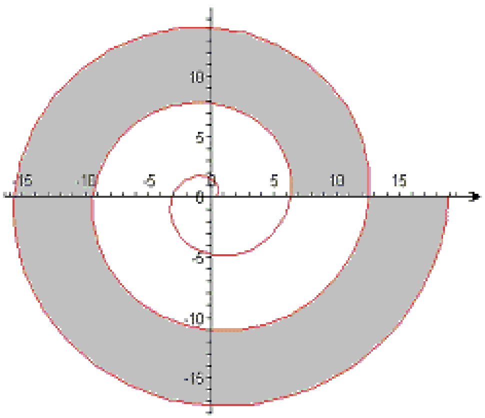
Áreas planas	Superfície de revolução
Baricentro (centro de gravidade)	Trabalho realizado por uma força
Comprimento de arco	Volume de revolução

(**T**)	$\int_a^b F dx$	(**C**)	$\int_a^b \sqrt{[\phi(t)']^2 + [\varphi(t)']^2}\, dt$
(**A**)	$\int_a^b f(x) dx$	(**C**)	$\int_a^b \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2}\, d\theta$
(**A**)	$\frac{1}{2}\int_a^b \rho^2 d\theta$	(**C**)	$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$
(**B**)	$\frac{1}{A}\int_a^b x f(x) dx$	(**B**)	$\frac{1}{2A}\int_a^b [f(x)]^2 dx$
(**A**)	$\int_a^b \varphi(t)\phi'(t) dt$	(**V**)	$\pi\int_a^b [f(x)]^2 dx$

2) Escrevas as integrais que calculam a área no 1º quadrante da região plana delimitada pelas curvas $y^2 = 4x$ e $x^2 = 4y$, “abaixo” da reta $x + y = 3$, de duas formas: ora considerando y como função de x e ora considerando x como função de y. Resolva (calcule a área) por uma destas formas.

3) Calcule o volume do sólido com $x \geq 1$, delimitado pela superfície obtida pela revolução da curva $xy = 1$, em torno do eixo ***OX***.

4) Calcule a área da figura (parte escurecida). A curva, em coordenadas polares, é dada por $\rho = \theta$.



5) Calcule pela definição, usando *Soma Inferior*, o valor de $\int_0^4 (9 - x^2)\, dx$.

Obs.: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Gabarito:

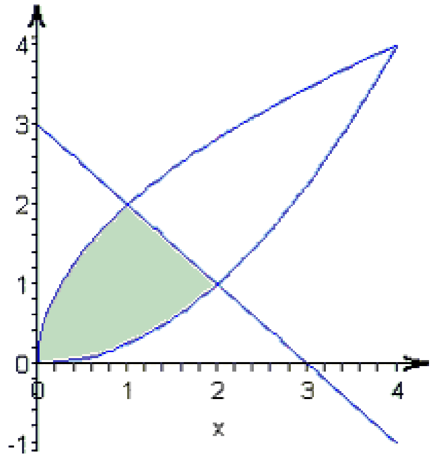
2) Uma forma:

$$A = \int_0^1 (\sqrt{4x} - \frac{x^2}{4})dx + \int_1^2 (3 - x - \frac{x^2}{4})dx$$

Outra forma:

$$A = \int_0^1 (\sqrt{4y} - \frac{y^2}{4})dy + \int_1^2 (3 - y - \frac{y^2}{4})dy$$

Cálculo: $A = \left[\frac{4x^{3/2}}{3} - \frac{x^3}{12}\right]_0^1 + \left[3x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12}\right]_1^2$

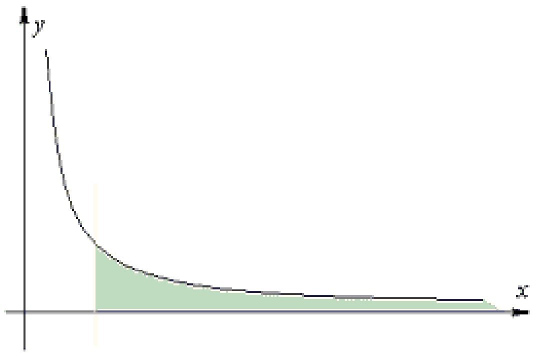


$$A = \left[\frac{4}{3} - \frac{1}{12}\right] + \left[\left(6 - \frac{4}{2} - \frac{8}{12}\right) - \left(3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{12}\right)\right] = \frac{5}{4} + \frac{10}{3} - \frac{29}{12} = \frac{13}{6} \cong 2{,}17\ u.a.$$

3) $V = \pi \int_1^\infty \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi . \lim_{k\to\infty} \int_1^k x^{-2} dx$

$$V = \pi . \lim_{k\to\infty} \left[\frac{-1}{x}\right]_1^k = \pi . \lim_{k\to\infty} \left[\frac{-1}{k} - \frac{-1}{1}\right]$$

$V = \pi.(0+1) = \pi\ u.v.$



4) $A = \frac{1}{2}\int_{4\pi}^{6\pi} \theta^2 d\theta - \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{4\pi} \theta^2 d\theta = \frac{1}{2}\left[\frac{\theta^3}{3}\right]_{4\pi}^{6\pi} - \frac{1}{2}\left[\frac{\theta^3}{3}\right]_{2\pi}^{4\pi} =$

$$A = \frac{1}{6}\left[(216\pi^3 - 64\pi^3) - (64\pi^3 - 8\pi^3)\right] = \frac{\pi^3}{6}(152 - 56) = 16\pi^3\ u.a.$$

5) $\int_0^4 (9 - x^2)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (9 - x_k^2).h$, com $h = \frac{4}{n}$ e $x_k = k.h$

Vamos chamar de $S(n) = \sum_{k=1}^{n} (9 - x_k^2).h$

$S(n) = (9 - h^2).h + [9 - (2h)^2].h + [9 - (3h)^2].h + ... + [9 - (nh)^2].h$

$S(n) = (9 - h^2).h + (9 - 4h^2).h + (9 - 9h^2).h + ... + (9 - n^2h^2).h$

$S(n) = (9 + 9 + 9 + ... + 9).h - (1 + 4 + 9 + ... + n^2).h^3$

$$S(n) = 9nh - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.h^3$$

Como $h = \frac{4}{n}$, temos que

$$S(n) = = 9n\frac{4}{n} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\cdot\frac{64}{n^3}$$

$$S(n) = = 36 - \frac{32n(n+1)(2n+1)}{3n^3}$$

Assim, $\int_0^4 (9 - x^2)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(9 - x_k^2).h = \lim_{n\to\infty} S(n) = 36 - \frac{64}{3} = \frac{44}{3}$