

Segunda Prova de CDI-2 - 25/abr/2007

- 1)  $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ k, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$  é contínua em  $P(0,0)$  para que valor de  $k$  ?
- 2) A equação  $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$  é conhecida como equação de Laplace em  $\mathbb{R}^2$ . Mostre que a função  $U(x, y) = e^x \text{sen} y + e^y \text{cos} x$  satisfaz a esta equação.
- 3) Se  $z^2 + \frac{2}{x} = \ln(y^2)$ , mostre que  $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{z}$
- 4) Areia é derramada num monte cônico na velocidade de *4 metros cúbicos por minuto*. Num dado instante, o monte tem *6 metros* de diâmetro e *5 metros* de altura. Qual a taxa de aumento da altura nesse instante se o raio aumenta na velocidade de *2 centímetros por minuto* ?
- 5) Numa caixa com tampa deve caber *12 litros* e ter o fundo duplamente reforçado. Quais as dimensões (comprimento, largura e altura) para que esta caixa seja feita com a menor quantidade de material ?

=====

Gabarito

1) Nenhum valor de  $k$  possibilitará  $f(x,y)$  ser contínua, pois  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$  não existe.

Realmente,  $\lim_{y \rightarrow 0} \left[ \lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) \right] = \lim_{y \rightarrow 0} [I] = I$ , mas

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \lim_{y \rightarrow 0} f(x,y) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} [x] = 0$$

2)  $\frac{\partial U}{\partial x} = e^x \text{sen} y - e^y \text{sen} x \rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = e^x \text{sen} y - e^y \text{cos} x$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = e^x \text{cos} y + e^y \text{cos} x \rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -e^x \text{sen} y + e^y \text{cos} x$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

3)  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x^2 z}$  e  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{yz} \rightarrow x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z} = \frac{2}{z}$

4)  $V = \frac{\pi r^2 h}{3} \rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \frac{dr}{dt} + \frac{dV}{dh} \frac{dh}{dt} \rightarrow V' = \frac{2\pi r h}{3} r' + \frac{\pi r^2}{3} h'$

Substituindo:  $4 = \frac{2\pi(3)(5)}{3} (0,02) + \frac{\pi(3)^2}{3} h' \rightarrow h' = \frac{4 - 0,2\pi}{3\pi} \text{ m/min} \approx 0,36 \text{ m/min}$

5) Volume:  $V = xyh = 12 \rightarrow h = \frac{12}{xy}$

Material:  $M = 3xy + 2xh + 2yh = 3xy + 2x \frac{12}{xy} + 2y \frac{12}{xy}$

$$M = 3xy + \frac{24}{y} + \frac{24}{x} \rightarrow \frac{\partial M}{\partial x} = 3y - \frac{24}{x^2} = 0 \rightarrow y = \frac{8}{x^2} \rightarrow \frac{1}{y^2} = \frac{x^4}{64}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x - \frac{24}{y^2} = 0 \rightarrow x = \frac{8}{y^2} = 8 \frac{x^4}{64}$$

Ou Seja,  $x = \frac{x^4}{8} \rightarrow x^3 = 8 \rightarrow x = 2 \text{ dm} \rightarrow y = 2 \text{ dm} \rightarrow h = 3 \text{ dm}$

