Segunda Prova de CDI-2 - 28/abr/2007

1) Para que valor de k *a função* $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & se(x,y) \neq (0,0) \\ k & ,se(x,y) = (0,0) \end{cases}$ é contínua em $P(0,0)$?

Justifique a sua resposta, estabelecendo a relação entre δ e ε, se for o caso.

2) Dada a função $w = 2u^4 - 3u^2v^2 + v^4$, com $u = 3t + z$ e $v = t - 2z$, encontre $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ e $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t \partial z}$.

3) Se H depende de r e s segundo a equação $e^H \cos r = e^s \operatorname{sen} H$, calcule $\dfrac{\partial H}{\partial r} + \dfrac{\partial H}{\partial s}$.

4) Um gás perfeito ($PV = kT$), num dado instante registra $P = 2$ *atmosferas*, $V = 5$ *litros* com $T = 300$ *graus Kelvin* (e k constante, á claro). Neste instante, se observa que V aumenta na taxa de $0{,}5$ *l/min*, enquanto que T decresce na base de $8K/min$. Encontre a velocidade com que P está variando.

5) Determine os pontos críticos da função $g(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ e decida se são máximo, mínimo ou ponto de sela.

===

Gabarito:

1) Nenhum k faz com que $f(x, y)$ seja contínua, pois $\lim\limits_{(x,y)\to(\quad)} f(x,y)$ não existe.

Realmente, usando o caminho $y = x$, temos $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+x}{\sqrt{x^2+x^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e

usando o caminho $y = 5x$, temos $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+5x}{\sqrt{x^2+25x^2}} = \dfrac{3\sqrt{26}}{13}$.

2) $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial w}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial w}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial t} \rightarrow \dfrac{\partial w}{\partial t} = (8u^3 - 6uv^2).3 + (-6u^2v + 4v^3).1$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = 24u^3 - 18uv^2 - 6u^2v + 4v^3.$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z} = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial w}{\partial t}\right)}{\partial z} = 72u^2(1) - 18(1)v^2 - 36uv(-2) - 12u(1)v - 6u^2(-2) + 12v^2(-2)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z} = 72u^2 - 18v^2 + 72uv - 12uv + 12u^2 - 24v^2 = 84u^2 + 60uv - 42v^2$$

3) $e^H \cos r - e^s \operatorname{sen} H = \mathbf{0} \rightarrow \dfrac{\partial H}{\partial r} = \dfrac{e^H \operatorname{sen}\ r}{e^H \cos\ r - e^s \cos\ H}$

$$\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{e^s \operatorname{sen}\ H}{e^H \cos\ r - e^s \cos\ H}$$

$$\frac{\partial H}{\partial r} + \frac{\partial H}{\partial s} = \frac{e^H \operatorname{sen}\ r + e^s \operatorname{sen}\ H}{e^H \cos\ r - e^s \cos\ H}$$

4) $PV - kT = 0 \rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial t} = \dfrac{\partial P}{\partial V}\dfrac{\partial V}{\partial t} + \dfrac{\partial P}{\partial T}\dfrac{\partial T}{\partial t} \rightarrow P' = \dfrac{\partial P}{\partial V}V' + \dfrac{\partial P}{\partial T}T' = \dfrac{-P}{V}(0{,}5) + \dfrac{k}{V}(-8)$

$$P' = \frac{-0{,}5P - 8k}{V} = \frac{-1 - 8k}{5} = \frac{-1 - 8/30}{5} = \frac{-19}{75} \text{ atm/min} \approx -0{,}253 \text{ atm/min}$$

5) $\dfrac{\partial g}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \rightarrow x^2 + y^2 - 5 = 0$

$\dfrac{\partial g}{\partial x} = 6xy - 12 = 0 \rightarrow y = 2/x$, que substituído na primeira equação, dá $x^2 + \dfrac{4}{x^2} - 5 = 0,$
ou seja, $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$, que tem soluções $x = \pm 1$ e $x = \pm 2$

Assim, teremos os pontos críticos $P_1(-1, -2), P_2(-2, -1), P_3(1, 2), P_4(2, 1).$

Com o *Hesseano* $= H(x, y) = \begin{bmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{bmatrix} = 36x^2 - 36y^2$, temos que:

$P_1(-1, -2) \rightarrow H(-1, -2) = 36(1 - 4) < 0 \rightarrow$ Ponto de *Sela*
$P_2(-2, -1) \rightarrow H(-2, -1) = 36(4 - 1) > 0 \rightarrow$ *Máximo* , pois $6x < 0$
$P_3(1, 2) \rightarrow H(1, 2) = 36(1 - 4) < 0 \rightarrow$ Ponto de *Sela*
$P_4(2, 1) \rightarrow H(2, 1) = 36(4 - 1) > 0 \rightarrow$ *Mínimo*, pois $6x > 0$