Quarta Prova de CDI-II - 2 de julho de 2007 - manhã

1) Verifique (, com justificativas) o tipo de convergência (ou não) de:

a) $\sum \frac{2-\cos nt}{n^2}$ e *b)* $\sum \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$

2) Encontre a "Soma" dos primeiros 100 termos de:

a) $\sum \frac{5\times 3^n}{2\times 7^n}$ e *b)* $\sum \frac{4}{n-n^2}$

3) Verifique o domínio de convergência de:

$$\sum \frac{n(x-3)^n}{n^2+2}$$

4) Desenvolver em séries de *potências*: $\frac{1-\cos^2 x}{x}$

5) Calcule com erro < 10^{-5}: $\int_0^2 x^2 e^{-x^2}\,dx$

==

Gabarito:

1) a) Converge, pois $\left|\frac{2-\cos nt}{n^2}\right| \le \frac{3}{n^2}$ e $\sum \frac{3}{n^2}$ converge.

b) Converge condicionalmente, pois $\int_1^\infty \frac{x}{x^2+1}dx$ diverge → $\sum \left|\frac{n}{n^2+1}\right|$ diverge, mas

$\sum \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$ converge por *Libnitz.*

2) a) Série Geométrica: $S_{100} = \frac{5}{2}\frac{\left(\frac{3}{7}\right)^{101}-\frac{3}{7}}{\frac{3}{7}-1} = \frac{5}{2}\frac{\frac{3}{7}\left[\left(\frac{3}{7}\right)^{100}-1\right]}{-\frac{4}{7}} = -\frac{15}{8}\left[\left(\frac{3}{7}\right)^{100}-1\right] \sim 1,875$

b) Série Telescópica: $\sum \frac{4}{n-n^2} = \sum\left(\frac{4}{n}+\frac{4}{1-n}\right)$

$S_n = \left(\frac{4}{2}-\frac{4}{1}\right)+\left(\frac{4}{3}-\frac{4}{2}\right)+\left(\frac{4}{4}-\frac{4}{3}\right)+ \dots +\left(\frac{4}{99}-\frac{4}{98}\right)+\left(\frac{4}{100}-\frac{4}{99}\right)$

$S_n = 4 - \frac{4}{100} = 3,96.$

3) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(x-3)^{n+1}}{(n+1)^2+2}\,\frac{n^2+2}{n(x-3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(n^2+2)(x-3)}{n[(n^2+2n+3]}\right| = |x-3| < 1$

$-1 < x-3 < 1 \Rightarrow 2 < x < 4$

Para x = 2, temos $\sum \frac{n(-1)^n}{n^2+2}$*, alternada convergente por Libnitz e*

Para x = ,4 temos $\sum \frac{n}{n^2+2}$*, divergente por integral.Dom Conv. =* [*2, 4*).

4) $\dfrac{1-\cos^2 x}{x} = \dfrac{sen^2 x}{x} = \dfrac{1}{x}\sum \dfrac{(-1)^{n+1}(2x)^{2n}}{2(2n)!} = \sum \dfrac{(-1)^{n+1}(2x)^{2n-1}}{(2n)!} =$

$\dfrac{1-\cos^2 x}{x} = \dfrac{2x}{2} - \dfrac{8x^3}{4!} + \dfrac{32x^5}{6!} - + \ldots$

5) $e^x = \sum \dfrac{x^n}{n!} \Rightarrow e^{-x^2} = \sum \dfrac{(-x^2)^n}{n!} \Rightarrow x^2 e^{-x^2} = \sum \dfrac{(-1)^n x^{2n+2}}{n!}$

Integrando: $\displaystyle\int_0^2 x^2 e^{-x^2}\,dx = \sum \left[\frac{(-1)^n x^{2n+3}}{(2n+3)n!}\right]_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{2^5}{5} + \frac{2^7}{7.2} - \frac{2^9}{9.6} + \frac{2^{11}}{11.4!} - + \ldots$

$\displaystyle\int_0^2 x^2 e^{-x^2}\,dx \sim 46,37183$