Quarta Prova de CDI-II - 3 de julho de 2007

1) Verifique (, com justificativas) o tipo de convergência (ou não) de:

$a)\ \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3+5}}$ e $b)\ \sum \frac{n+3^{n+1}}{2^n}$

2) Encontre a "Soma" da série com $erro < 10^{-3}$:

$a)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{6}{n^2-1}$ e $b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+1}$

3) Verifique o domínio de convergência de:

$$\sum \frac{5^n (x+2)^n}{n^2+1}$$

4) Desenvolver em séries de *potências*: $\frac{1-\cos x^2}{x^3}$

5) Calcule o valor exato de: $\int_0^{0,5} (1-x+x^2-x^3+\ldots+(-x)^n+\ldots)dx$

==

Gabarito:

1) $a) \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3+5}} \right| = \frac{1}{\sqrt{n^3+5}} < \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{1,5}}$. Como $1,5 > 1$, $\sum \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3+5}} \right|$ *converge.*

Então, $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3+5}}$ *converge absoluta*mente.

$b)\ \frac{n+3^{n+1}}{2^n} > \frac{3^{n+1}}{2^n}$. Como $\sum \frac{3^{n+1}}{2^n}$ é geométrica de razão 3/2 > 1, *diverge.*

Então, $\sum \frac{n+3^{n+1}}{2^n}$ *diverge*.

2) $a)\ \frac{6}{n^2-1} = \frac{3}{n-1} - \frac{3}{n+1}$. Então, a série é telescópica e podemos achar a sua "soma".

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{6}{n^2-1} = \left(\frac{3}{1}-\frac{3}{3}\right)+\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{3}{3}-\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{6}\right)+\left(\frac{3}{5}-\frac{3}{7}\right)+\ldots = \frac{3}{1}+\frac{3}{2} = 4,500$$

$b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+1}$ é alternada, decrescente e seus termos tendem a zero. Assim, o erro de truncamento é menor que o módulo do último termo $\frac{1}{n^3+1} < 10^{-3}$, quando $n = 10$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+1} = \frac{-1}{2}+\frac{1}{9}-\frac{1}{28}+\frac{1}{65}-\frac{1}{126}+\frac{1}{217}-\frac{1}{344}+\frac{1}{513}-\frac{1}{730}+\frac{1}{1001} \sim -0,414.$$

3) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{5^{n+1}(x+2)^{n+1}}{(n+1)^2+1}\frac{n^2+1}{5^n(x+2)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{5(x+2)}{n^2+2n+2}\frac{n^2+1}{1}\right| = 5|x+2| < 1$

$|x+2| < \frac{1}{5} \rightarrow -\frac{1}{5} < x+2 < \frac{1}{5} \rightarrow -\frac{11}{5} < x < -\frac{9}{5}$.

Para $x = -\frac{9}{5}$, temos $\sum\frac{5^n(x+2)^n}{n^2+1} = \sum\frac{1}{n^2+1}$ que é *convergente*.

Para $x = -\frac{11}{5}$, temos $\sum\frac{5^n(x+2)^n}{n^2+1} = \sum\frac{(-1)^n}{n^2+1}$ que é *absolutamente convergente*.

Portanto, Dom. Conv.: $\left[-\frac{11}{5}, -\frac{9}{5}\right]$.

4) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \rightarrow \cos x^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n}}{(2n)!} \rightarrow 1 - \cos x^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1} x^{4n}}{(2n)!}$

$$\frac{1-\cos x^2}{x^3} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{4n-3}}{(2n)!} = \frac{x}{2} - \frac{x^5}{24} + \frac{x^9}{6!} - + \ldots$$

5) Para $|x|<1$, temos que $1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-x)^n + \ldots = \frac{1}{1+x}$. Então,

$$\int_0^{0,5}(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-x)^n + \ldots)dx = \int_0^{0,5}\frac{dx}{1+x} = \left[\ln(1+x)\right]_0^{0,5} = \ln(1,5) \sim 0,405.$$