

5. SEQÜÊNCIAS e SÉRIES

Seqüências e séries: Objetivos:

Ao final do capítulo espera-se que o aluno seja capaz de:

1. Reconhecer uma seqüência e verificar se:
 - a. é convergente ou divergente;
 - b. crescente ou decrescente;
 - c. Propriedades de uma seqüência;
2. Definir séries numéricas de termos positivos;
3. Encontrar a soma de séries;
4. Identificar as séries especiais: geométrica, harmônica e p ;
5. Verificar se é convergente ou divergente aplicando os critérios de convergência;
6. Analisar a convergência de séries alternadas e de sinal quaisquer;
7. Reconhecer séries absolutamente e condicionalmente convergentes;
8. Reconhecer séries de funções;
9. Encontrar o raio e o intervalo de convergência das séries de potências;
10. Desenvolver funções em séries de Taylor e Maclaurin;
11. Desenvolver funções em séries binomiais;
12. Resolver exercícios usando o Maple.

A prova será composta por questões que possibilitam verificar se os objetivos foram atingidos. Portanto, esse é o roteiro para orientações de seus estudos. O modelo de formulação das questões é o modelo adotado na formulação dos exercícios e desenvolvimento teórico desse capítulo, nessa apostila.

5.1. Sequências

Introdução

Neste capítulo estudaremos séries infinitas, as quais são somas que envolvem um número infinito de termos. As séries infinitas desempenham um papel fundamental tanto na matemática quanto na ciência. elas são usadas, por exemplo, para aproximar funções trigonométricas e logarítmica, para resolver equações diferenciais, para efetuar integrais complicadas, para criar novas funções e para construir modelos matemáticos de leis físicas (Anton, 1999).

Na linguagem cotidiana, o termo sequência significa uma sucessão de coisas em uma ordem determinada - ordem cronológica, de tamanho, ou lógica, por exemplo. Em matemática o termo sequência é usado comumente para denotar uma sucessão de números cuja ordem é determinada por uma lei ou função.

Estudaremos um tipo especial de função definida nos números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, com imagem em $\mathbb{R}$. Isto é, estudaremos a função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ quanto ao limite e suas propriedades quando $n \rightarrow \infty$. A função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(n) = \frac{n}{2n+1}$ é um exemplo de sequência. O conjunto composto pelos pares ordenados $(n, f(n))$ é dado por

$$I = \{(1, f(1)), (2, f(2)), (3, f(3)), \dots, (n, f(n)), \dots\}$$

ou

$$I = \{(1, \frac{1}{3}), (2, \frac{2}{5}), (3, \frac{3}{7}), \dots, (n, \frac{n}{2n+1}), \dots\}$$

é denominado conjunto dos termos da sequência $f(n)$. Geralmente, o conjunto I é escrito de forma simplificada. Isto é, I é representado pelas imagens de $n \in \mathbb{N}$ de forma que a posição que determinada imagem de f ocupa no conjunto dos termos da sequência $f(n)$ é determinada pelo elemento $n \in \mathbb{N}$, ou seja,

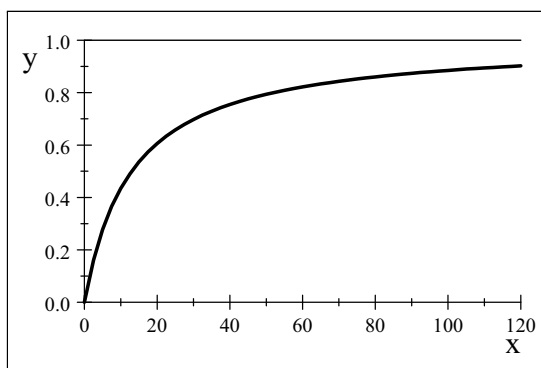
$$I = \{f(1), f(2), f(3), \dots, f(n), \dots\} = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}, \dots, \frac{n}{2n+1}, \dots\}.$$

Podemos observar que o termo $\frac{5}{11}$ é imagem de $n = 5$, pois ocupa a quinta posição no conjunto dos termos. O termo $f(n) = \frac{n}{2n+1}$ é denominado termo geral da sequência. A forma usual de representar o termo geral de uma sequência é $a_n = \frac{n}{2n+1}$, ou $x_n = \frac{n}{2n+1}$, ou $y_n = \frac{n}{2n+1}$ etc. Passaremos agora à definição formal de sequência. Nesse caso, temos o conjunto $I = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\}$.

Definição 5.1. *Sejam $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ o conjunto dos naturais, $\mathbb{R}$ a reta real. Denominamos sequência, a aplicação $x_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.*

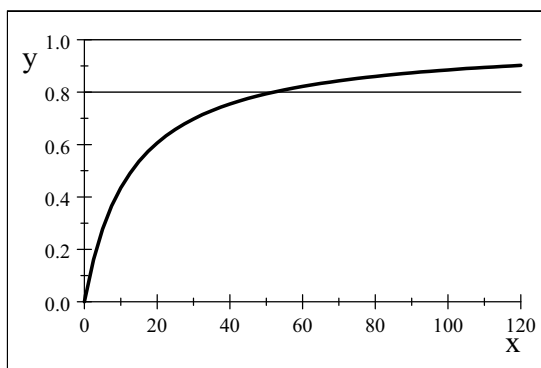
Problema 5.2. *Para melhor compreensão vamos supor que o crescimento diário de uma linhagem de suínos é dada em função do crescimento total pela sequência $u_n = \frac{n}{n+13}$ onde n corresponde ao número de dias de vida do suíno e $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ o tamanho de um suíno adulto. Assim, o conjunto $\{\frac{1}{14}, \frac{2}{15}, \frac{3}{16}, \frac{4}{17}, \frac{5}{18}, \dots, \frac{n}{n+13}, \dots\}$ representa o tamanho diário do suíno em relação ao tamanho final.*

Graficamente podemos observar a curva de crescimento, cujo limite é representado pela assíntota $y = 1$



Como podemos observar a assíntota $y = 1$ representa o limite de crescimento do suíno. Isso significa que podemos levantar questões como por exemplo, qual o número mínimo de dias que o suíno deve ficar em tratamento para atingir, pelo menos, 80% de seu tamanho final?

No gráfico abaixo podemos observar uma estimativa em torno de 50 dias



A questão agora é como fazer uma estimativa em termos matemáticos? A resposta será dada pela definição de limite de uma seqüência.

Limite de uma Sequência

Definição 5.3. *Seja u_n uma seqüência, dizemos que o número a é limite de u_n quando n tende para o infinito se dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $K > 0$ tal que para todo $n > K$ vale a desigualdade $|u_n - a| < \varepsilon$.*

Exemplo 5.4. Dada a sequência $u_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ é definida por $u_n = \frac{n}{n+13}$ vamos mostrar que $\lim u_n = 1$.

Demonstração: Devemos mostrar que dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $K > 0$ tal que para todo $n > K$ vale a desigualdade $|u_n - 1| < \varepsilon$. Agora,

$$|u_n - 1| = \left| \frac{n}{n+13} - 1 \right| = \left| \frac{n-n-13}{n+13} \right| = \left| \frac{-13}{n+13} \right| < \varepsilon$$

De modo que podemos escrever $\frac{13}{n+13} < \varepsilon$ donde vem $13 < n\varepsilon + 13\varepsilon$ ou $\frac{13-13\varepsilon}{\varepsilon} < n$. Consequentemente, podemos tomar $K = \frac{13-13\varepsilon}{\varepsilon}$ e a definição 5.1 estará satisfeita.

Comparando os dados do problema 5.2 com a definição 5.3 concluímos que $\varepsilon = 0,2$ representa a diferença entre o crescimento almejado e o crescimento total dos suínos. Por outro lado, K é o número mínimo de dias que os suínos devem permanecer em tratamento para atingir, pelo menos, 80% de seu crescimento total.

Exemplo 5.5. Determine o número mínimo de dias que um lote de suínos, cujo crescimento é dado pela sequência $u_n = \frac{n}{n+13}$ dever permanecer em tratamento para atingir, respectivamente, 80%, 90%, 95% do seu tamanho final.

Solução: No exemplo 5.4 concluímos que dado $\varepsilon > 0$ podemos tomar $K = \frac{13-13\varepsilon}{\varepsilon}$.

Como para 80%, 90%, 95% do tamanho final os valores de ε são respectivamente 0,2, 0,1, e 0,05 temos, respectivamente, o número mínimo de dias dado por:

- a) $K = \frac{13-13\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{13-13*0.2}{0.2} = 52$ dias
- b) $K = \frac{13-13\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{13-13*0.1}{.1} = 117$ dias
- c) $K = \frac{13-13\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{13-13*0.05}{0.05} = 247$ dias

Outra conclusão que podemos tirar é que a partir de um determinado tempo, a variação do crescimento é muito pequena em relação à quantidade de ração que o suíno consome. Portanto, o produtor deve estimar o tempo mínimo de tratamento em dias para obter o máximo de lucro.

Voltemos ao estudo das seqüências.

Teorema 5.6. (unicidade)

Seja $u_n: N \rightarrow R$ uma sequência em R tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ existe, então o limite é único.

Sequências Convergentes

Definição 5.7. Seja u_n uma seqüência. Dizemos que u_n é convergente se, e somente se, $\lim u_n = a$ para algum $a \in \mathbb{R}$.

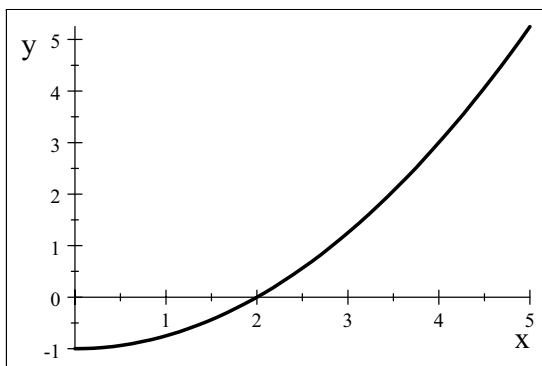
Se u_n não for convergente diremos que u_n é **divergente**.

Exemplo 5.8. A seqüência $u_n = \frac{2n+3}{3n+5}$ é convergente, pois $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{3n+5} = \frac{2}{3}$.

Exemplo 5.9. Determine se a seqüência $u_n = \frac{1}{4}n^2 - 1$ converge ou diverge

a seqüência $u_n = \frac{1}{4}n^2 - 1$ diverge, pois $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{4}n^2 - 1) = \infty$

Como o limite de u_n não existe, a seqüência diverge. O gráfico ?? ilustra a maneira como esta seqüência diverge



Subseqüência

Definição 5.10. Seja $u_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ uma seqüência em $\mathbb{R}$. Seja $N = \{n_1, n_2, n_3, \dots\}$ um subconjunto de $\mathbb{N}$, então $u_{n/N} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma subseqüência em $\mathbb{R}$.

Exemplo 5.11. Seja $u_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ uma seqüência dada por $u_n = \frac{1}{n^2}$. Seja $N = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\} \subset \mathbb{N}$. Então a seqüência $u_{n/N} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ é subseqüência de u_n . Os termos da seqüência são $\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \frac{1}{36}, \frac{1}{49}, \dots\}$ e os termos da subseqüência são $\{1, \frac{1}{9}, \frac{1}{25}, \frac{1}{49}, \dots\}$.

Teorema 5.12. Seja $u_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ uma seqüência em $\mathbb{R}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ existe, então o limite é único.

Demonstração: Suponhamos que $u_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma sequência em $\mathbb{R}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ existe e suponhamos que a e b , com $a \neq b$, são limites dessa sequência. Então dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $K_1 > 0$ e $K_2 > 0$ tal que para todo $n > K_1$ tenhamos $|u_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ e para todo $n > K_2$ tenhamos $|u_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Agora seja $K = \max\{K_1, K_2\}$. Então podemos escrever, para todo $n > K$:

$$|a - b| = |a - u_n + u_n - b|$$

$$|a - b| = |-(u_n - a) + (u_n - b)| \leq |u_n - a| + |u_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Como a e b são constantes, teremos $|a - b| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$ se, e somente se $|a - b| = 0$, isto é se $a = b$. Logo, o limite de u_n , se existe, é único.

Sequência Limitada

Definição 5.13. Seja $u_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ uma sequência em $\mathbb{R}$. Dizemos que u_n é limitada quando o conjunto $\{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots\}$ for limitado.

Teorema 5.14. Seja $u_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ uma sequência convergente em $\mathbb{R}$, então u_n é limitada.

Demonstração: Suponhamos que $u_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma sequência convergente em $\mathbb{R}$ e suponhamos que a é limite dessa sequência. Então dado $\varepsilon = 1$ podemos encontrar $K > 0$ tal que para todo $n > K$ tenhamos $|a - u_n| < 1$. Assim, para todo $n > K$ temos $u_n \in B(a, 1)$. Como o conjunto $\{u_1, u_2, u_3, \dots, u_{n-1}\}$ é finito segue que $\{u_1, u_2, u_3, \dots, u_{n-1}, u_n, \dots\} \subset B(a, 1)$. Logo, u_n é limitada.

Observação 10. A recíproca desse teorema não é verdadeira. Por exemplo, $u_n = (-1)^n$ é limitada, mas não é convergente.

Teorema 5.15. Seja $u_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ uma sequência em $\mathbb{R}$. Se $\lim u_n = a$ então toda subsequência de u_n converge e tem limite igual a a .

Demonstração: Suponhamos que existe uma subsequência x_{n_k} de u_n e que $\lim x_n = a$, então para todo $\varepsilon > 0$, existe $K > 0$ tal que $|a - b| < \varepsilon$ para todo $n_i > K$. Sendo $N = \{n_1 < n_2 < n_3, \dots\}$ um conjunto infinito, existe $K > 0$ tal que $n_i > K$. Logo, para $\gamma > i$ temos $n_\gamma > n_i > K$ donde vem $|a - b| < \varepsilon$ e, assim, $\lim x_{n_k} = a$.

Sequências Numéricas

Neste parágrafo analisaremos algumas propriedades das seqüências em $\mathbb{R}$.

Definição 5.16. *Seja u_n uma seqüência de valores reais. Então:*

- Dizemos que u_n é não decrescente se $u_{n+1} \geq u_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Dizemos que u_n é crescente se $u_{n+1} > u_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Dizemos que u_n é não crescente se $u_n \geq u_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Dizemos que u_n é decrescente se $u_n > u_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definição 5.17. *Seja u_n uma seqüência de valores reais. Então u_n é denominada monótona se pertencer a um dos tipos descritos na definição 5.16.*

Exemplo 5.18. *Mostrar que a seqüência $u_n = \frac{n+1}{n^2+2}$ é monótona.*

Solução: Devemos mostrar que u_n pertence a um dos tipos descritos na definição 5.16.

$$\text{Temos } u_n = \frac{n+1}{n^2+2} \text{ e } u_{n+1} = \frac{(n+1)+1}{(n+1)^2+2} = \frac{n+2}{n^2+2n+3}$$

Verificaremos se que $u_{n+1} \leq u_n$. Então,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &\leq u_n \\ \frac{n+2}{n^2+2n+3} &\leq \frac{n+1}{n^2+2} \\ (n^2+2)(n+2) &\leq (n+1)(n^2+2n+3) \\ n^3+2n^2+2n+4 &\leq n^3+3n^2+5n+3 \\ 1 &\leq n^2+3n \end{aligned}$$

A última desigualdade é verdadeira para todo n . Logo, $u_n = \frac{n+1}{n^2+2}$ é decrescente e, assim, monótona.

Definição 5.19. *Seja u_n uma seqüência numérica C e K dois números reais. Dizemos que C é limitante inferior de u_n se $C \leq u_n$ para todo n e que K é limitante superior de u_n se $K \geq u_n$ para todo n .*

Exemplo 5.20. Consideremos a seqüência $u_n = \frac{n+1}{n^2+2}$ cujos termos são $\frac{2}{3}, \frac{3}{6}, \frac{4}{11}, \frac{5}{18}, \dots$. e cujo limite é $L = 0$. Então todo número real $C \leq 0$ é limitante inferior de u_n e todo $K \geq \frac{2}{3}$ é limitante superior de u_n .

Definição 5.21. Seja u_n uma seqüência numérica que possui limitantes inferiores e superiores então u_n é dita seqüência limitada.

Observação 11. Note que uma seqüência para ser limitada não precisa ter o limite. Por exemplo, $u_n = (-1)^n$ não tem limite mas é limitada.

Teorema 5.22. Toda seqüência monótona limitada em $\mathbb{R}$ é convergente.

Teorema 5.23. Sejam u_n e y_n seqüências numéricas em $\mathbb{R}$ tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$. Então são válidas as afirmações:

- i) $\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$
- ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} cu_n = ca$
- ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n \pm y_n) = a \pm b$;
- ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n y_n = ab$;
- iii) Se $b \neq 0$ e $y_n \neq 0$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{y_n} = \frac{a}{b}$.
- vi) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{n^k} = 0$, se k é uma constante positiva

Demonstração:

- i) Sejam u_n e y_n seqüências numéricas em $\mathbb{R}$ tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, então dado $\varepsilon > 0$ existem K_1 e K_2 maiores que zero tais que $|u_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n > K_1$ e $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n > K_2$. Seja $K = \max\{K_1, K_2\}$ então para todo $n > K$ temos $|u_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Assim,

$$|u_n + y_n| = |u_n + y_n - (a + b)|$$

$$|u_n + y_n| = |(u_n - a) + (y_n - b)| \leq |u_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + y_n) = a + b.$$

Analogamente, mostra-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - y_n) = a - b$.

- ii) Sejam u_n e y_n seqüências numéricas em $\mathbb{R}$ tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, então dado $\varepsilon > 0$ existe $K > 0$ tal que $|u_n - a| < \frac{\varepsilon}{2N}$ e $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2N}$ para todo $n > K$. Além disso, u_n e y_n são seqüências limitadas, de modo que existe $N > 0$ tal que $|u_n| < N$ e $|y_n| < N$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$|u_n y_n - ab| = |u_n y_n - u_n b + u_n b - ab|$$

$$|u_n y_n - ab| = |u_n(y_n - b) + b(u_n - a)| \leq |u_n(y_n - b)| + |b(u_n - a)|$$

$$|u_n y_n - ab| \leq |u_n| |y_n - b| + |b| |u_n - a| < N |y_n - b| + N |u_n - a|$$

$$|u_n y_n - ab| \leq \frac{N\varepsilon}{N} + \frac{N\varepsilon}{N} = \varepsilon.$$

Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n y_n = ab.$$

5.2. SÉRIES

Definição 5.24. Seja u_n uma seqüência numérica. Denominamos *série numérica* à somas dos primeiros k – termos dessa seqüência numérica u_n . Já u_n será denominado *termo geral da série*.

A série gerada pela seqüência será denotada por:

$$\sum_{n=1}^{n=k} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + + u_k$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + + u_k +$$

Para melhor entendimento vamos considerar e analisar um problema.

Problema 5.25. Um estudante deverá receber mesada de seu pai em unidades monetárias UM, durante o tempo que permanecer na universidade, segundo a sequência

$u_n = \frac{20000}{n(n+1)}$, em que n corresponde ao número da parcela a ser recebida. Pergunta-se:

i - Qual o montante que o estudante deverá receber até o final da faculdade supondo que conclua o curso em 60 meses?

ii) No caso do estudante permanecer na universidade indefinidamente, como ficará o montante?

Solução: As parcelas mensais serão dada pela sequência que descreve o valor da mesada são:

$$10000, \frac{10000}{3}, \frac{5000}{3}, 1000, \frac{2000}{3}, \frac{10000}{21}, \frac{2500}{7}, \frac{2000}{9}, \frac{2000}{11}, \dots$$

Para responder a pergunta vamos escrever o problema no formato de uma série infinita. Isto é,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2000}{n(n+1)} = 10000 + \frac{10000}{3} + \frac{5000}{3} + 1000 + \frac{2000}{3} + \frac{10000}{21} + \frac{2500}{7} + \dots$$

As somas parciais são:

$$\begin{aligned} S_1 &= x_1 = 10000 & S_2 &= S_1 + x_2 = \frac{40000}{3} & S_3 &= S_2 + x_3 = 15000 \\ S_4 &= S_3 + x_4 = 16000 & S_5 &= S_4 + x_5 = \frac{50000}{3} \\ &\dots\dots\dots & S_n &= S_{n-1} + u_n \end{aligned}$$

Agora vamos determinar uma fórmula para o termo geral da soma. Escreveremos o termo geral da série em frações parciais. Temos então,

$$\begin{aligned} \frac{20000}{n(n+1)} &= \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} \\ 20000 &= A(n+1) + Bn \\ 20000 &= (A+B)n + A \\ \begin{cases} A &= 20000 \\ A+B &= 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema obtemos $A = 20000$ e $B = -20000$

Desse modo a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{20000}{n(n+1)}$ pode ser reescrita como segue

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{20000}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{20000}{n} - \frac{20000}{n+1} \right)$$

Já a soma dos $n - \text{primeiros}$ termos será dada por:

$$S_n = \left(20000 - \frac{20000}{2}\right) + \left(\frac{20000}{2} - \frac{20000}{3}\right) + \dots + \left(\frac{20000}{n} - \frac{20000}{n+1}\right)$$

Cuja simplificação resulta em

$$S_n = 20000 - \frac{20000}{n+1}$$

que simplificada resulta em

$$S_n = \frac{20000n}{n+1}$$

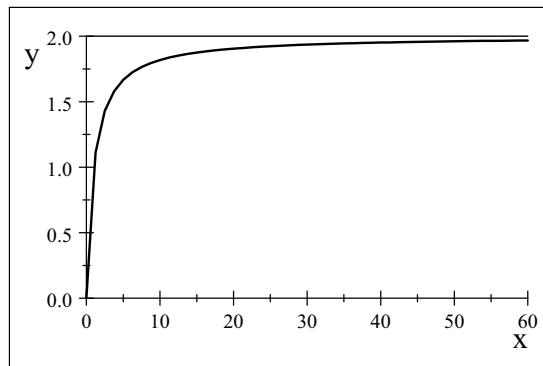
O leitor poderá verificar que as somas parciais determinadas acima corresponde as resultadas pela fórmula.

A resposta da questão *i)* do problema corresponde à sexagésima soma, ou seja

$$S_{60} = \frac{20000 * 60}{61} = 19672.$$

Desse modo, após 60 meses o estudante terá recebido um montante de $19672UM$

Passaremos a resposta da segunda questão. No gráfico abaixo podemos ver o crescimento da soma da série. Observe que a escala do eixo y é 1 para 10000.



Portanto, se o estudante ficar a indefinidamente na universidade, observando o gráfico, podemos afirmar que não receberia mais do que $20000UM$.

Isso significa que a soma da série tem limite $20000UM$ quando o tempo tende para infinito. Ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{20000n}{n+1} = 20000$$

Em outras palavras a série converge para 20000.

O conjunto de somas parciais da série forma uma seqüência de somas. Definimos o limite de uma seqüência de somas parciais do mesmo modo que foi definido limite de uma seqüência numérica.

Limite de uma Série

Definição 5.26. *Seja S_n uma seqüência de somas parciais, dizemos que o número S é limite de S_n quando n tende para o infinito se dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $K > 0$ tal que para todo $n > K$ vale a desigualdade $|S_n - S| < \varepsilon$*

Exemplo 5.27. *Consideremos uma seqüência de somas parciais, obtida no problema 5.25 dada por $S_n = \frac{20000n}{n+1}$. Mostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{20000n}{n+1} = 20000$.*

Solução: Devemos mostrar que dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $K > 0$ tal que para todo $n > K$ vale a desigualdade $|S_n - S| < \varepsilon$. De $|S_n - S| < \varepsilon$ temos

$$|S_n - S| = \left| \frac{20000n}{n+1} - 20000 \right| = \left| \frac{20000n - 20000n - 20000}{n+1} \right| = \left| \frac{-20000}{n+1} \right| < \varepsilon$$

De modo que podemos escrever $\frac{20000}{n+1} < \varepsilon$ donde vem $20000 < n\varepsilon + \varepsilon$ ou $\frac{20000-\varepsilon}{\varepsilon} < n$. Consequentemente, podemos tomar $K = \frac{20000-\varepsilon}{\varepsilon}$ e a definição 5.24 estará satisfeita.

Suponhamos que se deseja saber a partir de que parcela a diferença entre o montante e o limite é menor do que $300UM$. Para obter a resposta tomamos $\varepsilon = 300$ e obteremos $K = \frac{20000-\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{20000-300}{300} = 65.667$. Isso significa que em todas as parcelas, a partir da sexagésima sexta, a diferença entre o montante e o limite é menor do que $300UM$.

Suponhamos que se deseja saber a partir de que parcela a diferença entre o montante e o limite é menor do que $200UM$. Para obter a resposta tomamos $\varepsilon = 200$

e obteremos $K = \frac{20000-\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{20000-200}{200} = 99$. Isso significa que em todas as parcelas, a partir da parcela de número 99, a diferença entre o montante e o limite é menor do que $100UM$.

Observação 12. Como no estudo de limite das funções, no estudo das séries apenas temos interesse em ε com valores próximos de zero, pois interessa apenas saber o comportamento da função próximo ao ponto de limite.

Séries Convergentes

Definição 5.28. Sejam u_n uma sequência numérica, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ a série cujo termo geral é u_n , S_n a somas parciais dos termos dessa série. Dizemos que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é **convergente** se $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ existe. Caso contrário a série será denominada **divergente**.

Exemplo 5.29. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{20000}{n(n+1)}$, obtida no problema 5.25 é convergente pois $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{20000n}{n+1} = 20000$.

Exemplo 5.30. Verifique se a série dada por $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^{n-1}}$ é convergente.

Solução: Devemos verificar se a soma da série tem limite. Todas as séries que apresentam esse modelo podem ser resolvidas conforme o modelo que segue.

i) Escrevemos a soma dos n – primeiros termos.

$$S_n = 2 + \frac{2^2}{5} + \frac{2^3}{5^2} + \frac{2^4}{5^3} + \dots + \frac{2^n}{5^{n-1}}$$

ii) Multiplicamos S_n por $\frac{2}{5}$ e obtemos

$$\frac{2}{5}S_n = \frac{2^2}{5} + \frac{2^3}{5^2} + \frac{2^4}{5^3} + \dots + \frac{2^n}{5^{n-1}} + \frac{2^{n+1}}{5^n}$$

ii) Fazemos a diferença entre os resultados de i) e ii)

$$S_n - \frac{2}{5}S_n = \left(2 + \frac{2^2}{5} + \frac{2^3}{5^2} + \dots + \frac{2^n}{5^{n-1}}\right) - \left(\frac{2^2}{5} + \frac{2^3}{5^2} + \dots + \frac{2^n}{5^{n-1}} + \frac{2^{n+1}}{5^n}\right) \text{ ou}$$

$$\begin{aligned}\frac{3}{5}S_n &= 2 - \frac{2^{n+1}}{5^n} \\ S_n &= \frac{10}{3} - \frac{5}{3} \frac{2^{n+1}}{5^n} = \frac{10}{3} - \frac{10}{3} \left(\frac{2}{5}\right)^n \\ &\text{e} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{10}{3} - \frac{10}{3} \left(\frac{2}{5}\right)^n \right) \\ &\text{donde} \\ S &= \frac{10}{3}\end{aligned}$$

Consequentemente a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^{n-1}}$ é convergente.

Propriedades

1. Uma das propriedades das séries infinitas é que a convergência ou divergência não é afetada se subtrairmos ou adicionarmos um número finito de termos a elas. Por exemplo, se no problema 5.25 o estudante só começasse a receber a primeira parcela após 5 meses a série seria escrita com $n = 6$ no primeiro termo, ou seja, $\sum_{n=6}^{\infty} \frac{20000}{n(n+1)}$, e a soma seria $S = 20000 - S_5$. Se por outro lado o seu pai decidisse nos primeiros 10 meses dar uma mesada fixa de 2000UM por mês e iniciar o pagamento com $n = 1$ no décimo primeiro mês a soma seria $S = 2000(10) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{20000n}{n+1}$. Em ambos os casos a série continuará convergente. Nestes termos, podemos enunciar o seguinte teorema.
2. Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é convergente e a série $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ é divergente, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + y_n)$ é divergente.

Observação 13. Se as séries $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ são divergentes, a série $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + y_n)$ pode ou não ser convergente.

3. Se $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é uma série convergente de termos positivos, seus termos podem ser reagrupados de qualquer modo, e a série resultante também será convergente e terá a mesma soma que a série dada.

Teorema 5.31. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k + \dots$ uma série. Se a série

$$\sum_{n=\alpha}^{\infty} u_n = u_{n-\alpha} + u_{n-(\alpha+1)} + u_{n-(\alpha+2)} + \dots$$

for convergente, então a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k + \dots$$

também será convergente.

Demonstração: Suponhamos que a série $\sum_{n=\alpha}^{\infty} u_n$ é convergente, então possui soma. Seja $S_{\alpha-n}$ o termo geral da sua soma, $S_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\alpha-n}$ e seja $S_{\alpha} = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k$. Desse modo, o termo geral da soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ será $S_n = S_{\alpha} + S_{\alpha-n}$ e, portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\alpha-n} + \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\alpha}$ donde vem $S = S_1 + S_{\alpha}$. Consequentemente, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é convergente.

5.3. Propriedades

Sejam

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k + \dots$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_k + \dots$$

duas séries que convergem para S e S' , respectivamente, então são válidas as seguintes propriedades:

- i) $\sum_{n=1}^{\infty} k u_n = k \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ para todo $k \in \mathbb{R}$ e a série $\sum_{n=1}^{\infty} k u_n$ converge para kS .
- ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ e a série $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm y_n)$ converge para $S \pm S'$.

Exercícios

Em cada uma das séries abaixo encontre o termo geral da soma e verifique se a série é convergente.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ Resposta $S_n = \frac{n}{2n+1}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(4n-3)(4n+1)}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ Resposta $S_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ Resposta $S_n = \ln\left(\frac{1}{n+1}\right)$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$ Resposta $S_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1.2.3.4.5.6.....n(n+2)}$ Resposta $S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+2)!}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+4}{n^3+3n^2+2n}$, Resposta $S_n = \frac{5}{2} - \frac{2}{n+1} - \frac{1}{n+2}$.

Condição necessária para convergência.

Não existe uma regra geral para verificar se uma série é convergente. Como veremos nos próximos itens há critérios que dão respostas a tipos particulares de séries. Porém, verificando se uma série não possui a condição necessária para convergência saberemos que ela não é convergente. Essa condição é dada pelo teorema que segue.

Teorema 5.32. *Seja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ uma série convergente, então $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.*

Demonstração: Suponhamos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge para S , então podemos afirmar que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, de modo que pela definição 5.28 dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $K > 0$ tal que para todo $n > K$ vale a desigualdade $|S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $|S_{n-1} - S| < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $|u_n| = |S_n - S_{n-1}|$ podemos escrever

$$\begin{aligned}
 |u_n - 0| &= |S_n - S_{n-1} - 0| \\
 |u_n| &= |S_n - S + S - S_{n-1}| \\
 |u_n| &= |(S_n - S) + (-(S_{n-1} - S))| \\
 |u_n| &= |(S_n - S) + (-(S_{n-1} - S))| \\
 |u_n| &\leq |(S_n - S)| + |(S_{n-1} - S)| \\
 |u_n| &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
 \end{aligned}$$

Assim, pela definição 5.3 segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Uma consequência muito importante desse teorema é o corolário a seguir:

Corolário 5.33. *Seja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ uma série tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, então $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é divergente.*

Exemplo 5.34. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+2}{3n+5}$ é divergente já que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+2}{3n+5} = \frac{2}{3} \neq 0$.

Porém, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, isto é, possui a condição necessária para convergência, mas não podemos, sem fazer um teste de convergência, afirmar se ela é convergente ou divergente.

Observação 14. Portanto fiquem atentos, se $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ prova-se que a série é divergente. Mas se $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ a série pode convergir ou divergir, para isso necessitamos estudar critérios para fazer tal verificação.

Veremos na sequência alguns resultados que permitem verificar se uma série é convergente ou não,

Teorema 5.35. Seja S_n uma sequência de somas parciais convergente. Então, dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $K > 0$ tal que para todo $m, n > K$ vale a desigualdade $|S_m - S_n| < \varepsilon$.

Demonstração: Suponhamos S_n seja uma sequência de somas parciais convergente. Então, dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $K > 0$ tal que para todo $m, n > K$ valem as desigualdades $|S_m - S| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $|S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}$. Agora

$$\begin{aligned} |S_m - S_n| &= |S_m - S + S - S_n| \\ |S_m - S_n| &= |(S_m - S) + (S - S_n)| \\ |S_m - S_n| &\leq |(S_m - S)| + |(S - S_n)| \\ |S_m - S_n| &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Logo, o teorema é válido.

Observação 15. O teorema 5.35 pode ser ilustrado considerando o problema 5.25. Lá nossa suposição era saber a partir de que parcela a diferença entre o montante e o limite era menor do que $300UM$. Para obter a resposta tomamos $\varepsilon = 300$ e obteremos $K = 65,667$. Isso significa que em todas as parcelas, a partir da sexagésima sexta, a diferença entre o montante e o limite é menor do que $300UM$. Agora tomando $n = 70$ e $m = 80$ obteremos $S_{70} = \frac{20000 * 70}{70 + 1} = 19718$ e $S_{80} = \frac{20000 * 80}{80 + 1} = 19753$. Consequentemente, $|S_{70} - S_{80}| = |19718 - 19753| = 35.0 < 300$. Caso tomássemos $m, n < 66$ não necessariamente a diferença entre as somas será menor do que 300.

5.4. SÉRIES ESPECIAIS

Série harmônica

Definição 5.36. Denominamos série harmônica à série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

A série harmônica, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, embora possua a condição necessária para convergência não converge. Para provar vamos mostrar que ela contraria o teorema 5.35. Vamos inicialmente escrever a soma dos $n - \text{primeiros}$ termos e a soma dos $2n - \text{primeiros}$ termos,

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$S_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

Na sequência fazemos a diferença entre as duas somas parciais

$$S_{2n} - S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

Como $\frac{1}{n+1} > \frac{1}{2n}$, $\frac{1}{n+2} > \frac{1}{2n}$, $\frac{1}{n+3} > \frac{1}{2n}$, podemos escrever

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$S_{2n} - S_n > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

Tomando $m = 2^n$ obtemos $|S_m - S_n| > \frac{1}{2}$ e isso contraria o teorema 5.35. Logo, a série harmônica é divergente. Veja algumas somas de série harmônica obtidas com auxílio do MAPLE 6

$$\begin{array}{llll} S_{10} = 2,9289 & S_{100} = 5,1873 & S_{1000} = 7,485 & S_{\text{um milhão}} = 14,392 \\ S_{\text{um bilhão}} = 21,300 & S_{\text{um trilhão}} = 28,208 & & \end{array}$$

Como pode ser visto, lentamente a soma tende a infinito.

Série geométrica

Definição 5.37. Denominamos série geométrica à série escrita na forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$, onde q é denominada razão.

Exemplo 5.38. Encontrar a soma da série geométrica e estudar sua convergência.

Solução: Consideremos a série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1}$ e a soma dos $n - \text{primeiros}$ termos dada por $S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1}$.

Multiplicamos essa soma pela razão q e obtemos $qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots + a_1q^n$.
Encontramos a diferença entre as duas somas

$$\begin{aligned} qS_n - S_n &= a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots + a_1q^n - (a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1}) \\ qS_n - S_n &= a_1q^n - a_1 \\ S_n(q - 1) &= a_1(q^n - 1) \\ \text{donde vem } S_n &= \frac{a_1(q^n - 1)}{(q - 1)} \end{aligned}$$

Para estudar a convergência dessa série devemos considerar três casos a saber:

- I Se $q = 1$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1(q^n - 1)}{(q - 1)} \rightarrow \infty$ e a série é divergente. Se $q = -1$ então S_n tem dois valores para o limite e, portanto, a série é divergente.
- II Se $|q| > 1$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1(q^n - 1)}{(q - 1)} \rightarrow \infty$ e a série é divergente.
- III Se $|q| < 1$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1(q^n - 1)}{(q - 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1q^n}{q - 1} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-a_1}{(q - 1)} = \frac{-a_1}{(q - 1)}$ e a série é convergente.

Desse modo, podemos escrever $S = \frac{a_1}{1 - q}$. Conclusão:

a série geométrica é divergente se $|q| \geq 1$ e convergente se $|q| < 1$.

Observação 16. A soma de uma série geométrica convergente ($|q| < 1$) converge para $S = \frac{a_1}{1 - q}$

Exemplo 5.39. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ é convergente pois tem razão $q = \frac{2}{3} < 1$. Já a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$ é divergente pois tem razão $q = \frac{3}{2} > 1$.

5.5. Critérios para verificar a convergência de uma série

Quando conhecemos o termo geral da soma de uma série é fácil fazer a verificação da convergência. Podemos verificar se uma série converge usando critérios para convergência que passaremos ao estudo de alguns.

Critério da comparação.

Teorema 5.40. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ uma série e seja $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ uma série cuja convergência queremos estudar, então:

i) Se $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ for uma série convergente e $0 \leq y_n \leq u_n$ para todo n a série $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ é convergente.

ii) Se $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ for uma série divergente e $y_n \geq u_n \geq 0$ para todo n a série $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ é divergente.

Demonstração: i) Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ uma série convergente e $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ uma série tal que $0 \leq y_n \leq u_n$ para todo n . Como $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ uma série convergente a sequência de somas parciais S_n tem limite L , de modo que $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k + \dots < L$. Como $0 \leq y_n \leq u_n$ para todo n segue que a sequência de somas parciais $0 \leq y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_k + \dots \leq u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k + \dots < L$. Consequentemente, a sequência de somas parciais $y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_k + \dots$ é limitada e, além disso, monótona. Logo, pelo teorema 5.22 é convergente e, assim, a série $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ é convergente.

ii) Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ uma série divergente e $y_n \geq u_n \geq 0$ para todo n a série $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ é divergente. Como $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ uma série divergente a sequência de somas parciais S_n não tem limite, de modo que dado um número $L > 0$ existe $K > 0$ tal que $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k + \dots > L$ para todo $n > K$. Como $y_n \geq u_n$ para todo n segue que a sequência de somas parciais $y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_k + \dots \geq u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k + \dots > L$. Consequentemente, a sequência de somas parciais $y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_k + \dots$ não é limitada e, assim, a série $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ é divergente.

Exemplo 5.41. Usando o teorema 5.40 estudar a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + n^2 + n + 1}$.

Solução: Conforme o teorema 5.40 devemos encontrar uma série que sabemos ser convergente ou divergente e fazer a comparação do termo geral dessa série com a série em estudo. Um procedimento usado para encontrar um termo geral adequado é majorar o termo geral da série proposta. Vamos descrever o processo.

i) Temos duas formas de majorar um quociente a saber: aumentando o denominador ou diminuindo o denominador. No termo geral da série em estudo vamos diminuir o denominador passo a passo

$$\frac{n}{n^3 + n^2 + n + 1} < \frac{n}{n^3 + n^2 + n} < \frac{n}{n^3 + n^2} = \frac{1}{n(n+1)}$$

No exemplo 5.25 vimos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{20000}{n(n+1)}$ é convergente. Como podemos escrever $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{20000}{n(n+1)} = 20000 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ segue (pela propriedade i) que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ é convergente.

ii) Vamos verificar se $\frac{n}{n^3 + n^2 + n + 1} \leq \frac{1}{n(n+1)}$ para todo n .

$$\frac{n}{n^3 + n^2 + n + 1} \leq \frac{1}{n(n+1)}$$

$$nn(n+1) \leq n^3 + n^2 + n + 1$$

$$n^3 + n^2 \leq n^3 + n^2 + n + 1$$

$$0 \leq n + 1$$

Verdadeiro para todo n

Logo, pelo teorema 5.40 a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + n^2 + n + 1}$ é convergente.

Crítério de D 'Alambert

Teorema 5.42. *Seja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ uma série tal que $u_n > 0$ para todo n e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L$. Então*

i) *A série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge se $L < 1$;*

ii) *A série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ diverge se $L > 1$;*

iii) *Nada podemos afirmar se $L = 1$.*

Demonstração: Seja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ uma série tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L$. Então, dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $K > 0$ tal que para todo $n > K$ vale a desigualdade $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - L \right| < \varepsilon$. Suponhamos que $L < 1$. Então existe q tal que $L < q < 1$, e isso implica em $q - L < 1$. Tomando $\varepsilon = q - L$ podemos escrever $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - L \right| < q - L$ donde vem $-(q - L) < \frac{u_{n+1}}{u_n} - L < q - L$ ou $-(q - L) + L < \frac{u_{n+1}}{u_n} < q$. Da última relação concluímos que $u_{n+1} < u_n q$. Dessa relação vem:

$$u_{n+1} < u_n q$$

$$u_{n+2} < u_{n+1} q < u_n q q$$

$$u_{n+2} < u_{n+2} q < u_n q^2 q$$

$$\text{ou seja } u_{n+2} < u_n q^2$$

$$\text{ou seja } u_{n+3} < u_n q^3$$

$$u_{n+k} < u_{n+(k-1)} q < u_n q^{k-1} q$$

$$\text{ou seja } u_{n+k} < u_n q^k$$

e assim sucessivamente, de forma que

$$u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots < u_n q + u_n q^2 + u_n q^3 + \dots$$

Note que $u_n q + u_n q^2 + u_n q^3 + \dots$ é uma série geométrica com razão $|q| < 1$ e, portanto, convergente. Assim, pelo teorema 5.40 a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge se $L < 1$.

Por outro lado, suponhamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L > 1$, então obteremos $u_{n+1} > u_n$ para todo n e, desse modo, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$. Consequentemente, a série não possui a condição necessária para convergência. Logo, a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ diverge se $L > 1$.

Exemplo 5.43. Usando o critério de D 'Alambert, estudar a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$.

Solução: Temos $u_n = \frac{2^n}{n}$ e $u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{n+1}$. Logo,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} = \frac{n 2^{n+1}}{2^n (n+1)} = \frac{n 2^2}{2^n (n+1)} = \frac{2n}{n+1}$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} = 2 > 1$$

Consequentemente, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$ é divergente.

Exemplo 5.44. Usando o critério de D 'Alambert, estudar a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Solução: Temos $u_n = \frac{1}{n!}$ e $u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$. Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

portanto a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ converge.

Cr terio de Cauchy

Teorema 5.45. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ uma série tal que $u_n > 0$ para todo n e $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = L$.
Então

- i) A série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge se $L < 1$;
- ii) A série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ diverge se $L > 1$;
- iii) Nada podemos afirmar se $L = 1$.

Demonstra o: A demonstra o deste teorema   análoga a do teorema 5.42.

Exemplo 5.46. Usando o cr terio de Cauchy, estudar a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+5}\right)^n$.

Solu o: Temos

$$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+5}\right)^n} = \frac{n}{2n+5}$$

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+5} = \frac{1}{2} < 1.$$

Logo, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+5}\right)^n$   convergente.

Exemplo 5.47. Usando o cr terio de Cauchy, estudar a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-5}{2n+1}\right)^n$.

Solu o: Temos

$$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{4n-5}{2n+1}\right)^n} = \left(\frac{4n-5}{2n+1}\right)$$

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n-5}{2n+1}\right) = 2 > 1.$$

Logo, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-5}{2n+1}\right)^n$   divergente.

Critério da integral

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ uma série tal que $u_{n+1} \leq u_n$ para todo n . Seja $f(x)$ uma função maior do que zero, contínua e decrescente no intervalo $[0, \infty)$ tal que $f(1) = u_1, f(2) = u_2, \dots, f(n) = u_n, \dots$. Então, se $\int_1^{\infty} f(x) dx$ existe a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é convergente. Caso contrário, divergente.

A demonstração deste teorema poderá ser estudada em qualquer um dos livros constantes na bibliografia.

Série p

Definição 5.48. Denominamos série p a série escrita na forma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ onde p é uma constante positiva.

A denominação p vem do fato dessa série também ser conhecida como série *hiper-harmônica*. Vamos usar o teorema 5.5 para o estudo da série p . A série p é bastante utilizada no critério da comparação.

Exemplo 5.49. Estudar a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

Solução: Temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots + \frac{1}{n^p} \dots$$

Seja $f(x) = \frac{1}{x^p}$, então $f(x)$ satisfaz as condições do teorema 5.5, de modo que podemos escrever

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x^p} dx.$$

Temos três casos a considerar:

i. Se $p = 1$ teremos

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln x \Big|_1^n = \lim_{n \rightarrow \infty} [\ln n - \ln 1] = \infty$$

Consequentemente, se $p = 1$ a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente. Note que se $p = 1$ temos a série harmônica.

ii. Se $p < 1$ teremos $1 - p > 0$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x^p} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_1^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right] = \infty$$

Consequentemente, se $p < 1$ a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ é divergente.

iii. Se $p > 1$ teremos $1 - p < 0$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x^p} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_1^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1-p}}{1-p} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-p} = -\frac{1}{1-p}$$

Consequentemente, se $p > 1$ a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ é convergente.

Exemplo 5.50. As séries abaixo são exemplos de séries p .

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^9}$ convergente pois $p > 1$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ divergente pois $p < 1$.

5.6. Exercícios

1. Usando o teste de comparação verifique se as séries abaixo são convergente ou não.

$$0a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n} \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 1} \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} \quad d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4n^3 + 1}$$

$$0 e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 4n}} \quad f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\text{sen}(n)|}{2^n} \quad g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2+n)!} \quad h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 5}}$$

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2 + 5}} \quad j) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \sqrt{n + 5}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^3 + n + 1} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!}$$

2. Usando o teste de D'Alambert verifique se as séries abaixo são convergente ou não.

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2 2^n} \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n} \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{\sqrt{n^3 + 1}} \quad e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n(n^2 + 2)} \quad f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n(2+n)!}$$

$$g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+5} \quad h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n4^n} \quad i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n+n+1}$$

3. Usando o teste de Cauchy, verifique se as séries abaixo são convergente ou não.

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^n}{n^{\frac{n}{2}}} \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n^2} \right)^n 2^n \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n^2 2^n} \right)^n$$

4. Usando o teste da integral verifique se as séries abaixo são convergente ou não.

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n} \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}} \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \quad e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg n}{n^2+1} \quad f) \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}$$

$$g) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n} \quad h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\arctg n}}{n^2+1} \quad i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+4)}$$

5.7. Séries de Termos Positivos e Negativos

Definição 5.51. Seja $u_n > 0$ para todo n . Denominamos *série alternada* à série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1} u_n$.

..

Exemplo 5.52. A série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p} = 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p} \dots$ é um exemplo de *série alternada*.

Convergência de uma série alternada

Infelizmente todos os critérios de convergência de séries vistos até o momento não são válidos para séries alternadas. Por isso, passaremos a ver alguns resultados que são válidos para esse caso.

Teorema 5.53. Teorema de Leibnitz.

Seja a série alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1} u_n \dots$$

tal que:

$$i) u_1 > u_2 > u_3 > u_4 > \dots;$$

Teorema 5.54. $ii) \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

Então são válidas as seguintes conclusões:

a) A série é convergente e

b) $0 < S_n < u_1$.

Demonstração: a) Consideremos a soma dos $2n$ – primeiros termos da série alternada. Suponhamos que os termos de ordem ímpar da série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1} u_n \dots$ sejam positivos e os de ordem par negativos. Se por acaso o primeiro termo for negativo iniciaremos a contagem em u_2 , pois a retirada um número finito de termos não afeta a convergência da série. Desse modo teremos u_{2n-1} positivo e u_{2n} negativo e, portanto, obteremos $0 < S_2 < S_4 < \dots < S_{2n}$.
 $S_{2n} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots - u_n + u_{n+1} - u_{n+2} + \dots - u_{2n}$.

Aplicando a propriedade associativa obtemos

$$S_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_n - u_{n+1}) + \dots + (u_{2n-1} - u_{2n}).$$

Como $u_1 > u_2 > u_3 > u_4 > \dots$ segue que

$$(u_1 - u_2) > 0, (u_3 - u_4) > 0, (u_n - u_{n+1}) > 0, \dots, (u_{2n-1} - u_{2n}) > 0$$

Consequentemente, S_{2n} é positiva

Podemos também associar os termos de outra forma como segue

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots - (u_n - u_{n+1}) - \dots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n}.$$

Em virtude da condição ii) cada termo entre parênteses é positiva. Portanto, subtraindo uma quantidade positiva de u_1 obteremos um resultado inferior a u_1 , de modo que $0 < S_{2n} < u_1$.

Demonstraremos o item b). Como $0 < S_{2n} < u_1$ segue que S_{2n} é limitada com $0 < S_2 < S_4 < \dots < S_{2n}$. Assim, a sequência de somas $S_2, S_4, \dots, S_{2n}$ é monótona e, pelo teorema 5.22, é convergente. Seja $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S$. Pelo item a) segue que $s < u_1$. Sendo $S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1}$ podemos escrever:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n+1} = S + 0 = S$$

Consequentemente as somas de ordem ímpar tem a mesma soma dos termos de ordem par. Finalmente, mostraremos que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$.

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S$, dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $K_1 > 0$ tal quem $|S_{2n} - S| < \varepsilon$ sempre $2n > K_1$.

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = S$, dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $K_2 > 0$ tal quem $|S_{2n+1} - S| < \varepsilon$ sempre $2n + 1 > K_2$.

Tomando $K = \max \{K_1, K_2\}$, para todo $n > K$ vale a desigualdade $|S_n - S| < \varepsilon$. Logo, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ e a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ é convergente.

Exemplo 5.55. Usando o teorema de Leibnitz, estudar a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+2}{n(n+1)}$.

Solução: Vamos verificar se u_n satisfaz as condições do teorema 5.7. O termo geral da série é $u_n = \frac{n+2}{n(n+1)}$ e $\frac{n+2}{n(n+1)} > 0$ para todo n . Assim, Vamos verificar se $u_n > u_{n+1}$ para todo n . Temos

$$\begin{aligned} u_n &> u_{n+1} \\ \frac{n+2}{n(n+1)} &> \frac{(n+1)+2}{(n+1)(n+1)+1} \\ \frac{n+2}{n(n+1)} &> \frac{n+3}{(n+1)(n+2)} \\ (n+2)(n+1)(n+2) &> n(n+1)(n+3) \\ n^3 + 5n^2 + 8n + 4 &> n^3 + n^2 + 3 \\ 4n^2 + 8n &> -1 \text{ Verdadeiro para todo } n \end{aligned}$$

Consequentemente a primeira condição do teorema 5.7 Está satisfeita.

Agora vamos verificar se $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n(n+1)} = 0.$$

Verificamos, portanto, que todas as exigências do teorema 5.7 estão satisfeitas. Logo, a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+2}{n(n+1)}$ é convergente.

5.8. Série de termos de sinais quaisquer

Definição 5.56. Denominamos série de termos de sinais quaisquer à série formada por termos positivos e negativos.

Exemplo 5.57. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + 0 \dots$ é um exemplo de série de termos de sinais quaisquer. As séries alternadas são casos particulares das séries de termos de sinais quaisquer.

Veremos na sequência um teorema que permite verificar se uma série de termos de sinais quaisquer é convergente.

Teorema 5.58. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ uma série de termos de sinais quaisquer. Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ for uma série convergente então a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ será convergente.

Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ for uma série divergente nada podemos afirmar sobre a convergência da série de sinais quaisquer $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Exemplo 5.59. Vimos no exemplo 5.55 que a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+2}{n(n+1)}$ é convergente.

Porém, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{n+2}{n(n+1)} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+1)}$ não é convergente. O leitor pode verificar essa afirmação usando o critério da comparação.

Exemplo 5.60. Usando o teorema 5.58 estudar a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^3}$.

Solução: Podemos escrever $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{1}{n^3} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. Como podemos observar, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ é uma série p com $p > 1$ e, portanto, convergente. Logo, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^3}$ é convergente. A convergência desta série também pode ser estudada pelo teorema de Leibnitz.

Exemplo 5.61. Usando o teorema 5.58 estudar a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(nt)}{n^2}$.

Solução: Podemos escrever $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\text{sen}(nt)}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\text{sen}(nt)|}{n^2}$. Usando o teste de comparação, sabendo que $|\text{sen}(nt)| \leq 1$ para todo n , podemos concluir que $\frac{|\text{sen}(nt)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ para todo n . Portanto, o termo geral da série $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\text{sen}(nt)}{n^2} \right|$ é menor que o termo geral da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ que é uma série p convergente pois $p > 1$. Logo, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(nt)}{n^2}$ é convergente.

5.9. Séries absolutamente convergente e condicionalmente convergentes.

Antes de definir séries absolutamente convergente e condicionalmente convergentes vamos considerar os exemplos abaixo.

Exemplo 5.62. Consideremos a série harmônica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} \dots$$

já mostramos que é divergente. Porém

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \dots$$

é convergente. Vamos mostrar que a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ converge sob condições, isto é, podemos interferir na sua forma de convergir.

Solução: Para modificar o limite de convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ basta reagrupar os termos como segue:

a) Agrupamos a soma dos termos de ordem ímpar contra os de ordem par

$$S_n = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} \dots\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \dots + \frac{1}{2n} \dots\right)$$

Como o leitor pode observar, poderemos escrever

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$$

e, cada uma das subsomat é divergente. Logo, ocorre $S_n = \infty - \infty$, isto é a soma é indeterminada, significando que se escrevermos

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

na forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} \dots\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \dots + \frac{1}{2n} \dots\right)$$

nada podemos afirmar sobre a sua convergência. Isso ocorre porque a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

não converge.

Com base no exemplo vamos definir séries absolutamente convergente e condicionalmente convergente.

Definição 5.63. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ uma série de termos de sinais quaisquer, então:

- i) Se $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ converge a série é denominada absolutamente convergente;
- ii) Se $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge e $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ diverge, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é condicionalmente convergente.

Exemplo 5.64. A série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ estudada no exemplo 5.62 é condicionalmente convergente e a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n^2}$ estudada no exemplo 5.61 é absolutamente convergente.

5.10. Exercícios

Verifique se as séries abaixo são absolutamente ou condicionalmente convergente.

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n}{n!} \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2}{n!}$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad e) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n!}{2^{n+1}} \quad f) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2 + 2n}$$

$$g) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^n}{n!} \quad h) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2 + 1}{n^3} \quad i) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^n}{n!}$$

5.11. SÉRIES DE FUNÇÕES

Consideremos as seguintes funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x^3$, $f_4(x) = x^4$,, $f_n(x) = x^n \dots$ podemos escrever a soma

$$S_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x) + \dots + f_n(x) = x^n \dots$$

ou

$$S_n(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n \dots$$

A essa soma denominamos série de funções e $S_n(x)$ é a soma dos n – primeiros termos da série. Mais geralmente definimos série de funções como segue.

Definição 5.65. Denominamos série de funções a toda série na qual o termo geral é uma função da variável x e denotaremos por

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

Convergência de séries de funções

Como no estudo das séries numéricas, estamos interessados na convergência da séries de funções. Uma série de funções se for convergente converge para uma função. A imagem de cada valor de x numa série de funções é uma série numérica que pode ser convergente ou divergente. Por exemplo, a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n \dots$$

para cada valor de x é uma série geométrica e, portanto, converge se $|x| < 1$ e diverge

caso contrário. Já sua soma será a função $S(x) = \frac{1}{1-x}$ se $|x| < 1$. Isso significa que uma série de funções convergente, converge para um conjunto de valores de x denominado domínio ou intervalo de convergência.

Definição 5.66. Seja $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ uma série de funções que converge. Denominamos domínio ou intervalo de convergência da série ao conjunto de todos os valores de x para os quais a série é convergente e denominamos raio de convergência à distância entre o centro e a extremidade do intervalo convergência.

Exemplo 5.67. O raio e o intervalo de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ é $R = 1$ e o intervalo de convergência é dado por $(-1, 1)$.

Séries de funções majoráveis num intervalo

Definição 5.68. Seja $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ uma série de funções. Dizemos que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ é majorável no intervalo $[a, b]$ se existir uma série numérica convergente $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ tal que $|u_n(x)| \leq u_n$.

Exemplo 5.69. Seja $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2+1}$ uma série de funções. Então essa série é majorável para todo x .

Prova: Pela definição 5.68, devemos mostrar que existe uma série numérica convergente $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ tal que $|\frac{\cos nx}{n^2+1}| < u_n$. Como $|\cos nx| \leq 1$ para todo n e todo x podemos escrever

$$|\frac{\cos nx}{n^2+1}| \leq \frac{|\cos nx|}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$$

Portanto, tomando $u_n = \frac{1}{n^2}$ segue que existe a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, convergente tal que $|\frac{\cos nx}{n^2+1}| < \frac{1}{n^2}$ para todo $n > 1$. Logo, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2+1}$ é majorável.

Teorema 5.70. Seja $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ uma série de funções majorável no intervalo $[a, b]$, então $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ é absolutamente convergente em $[a, b]$.

Demonstração: Uma série que satisfaz a definição 5.68, também satisfaz as da definição 5.61 e, portanto, é absolutamente convergente.

Continuidade da soma de uma série de funções.

Sabemos do Cálculo que a soma de um número finito de funções contínuas é contínua. Porém, se a soma for infinita ela pode não ser contínua. Vejamos um exemplo.

Exemplo 5.71. Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}} \right)$. Essa série não converge para uma função contínua.

Prova: Escrevemos a soma dos n – primeiros termos

$$S_n(x) = \left(x^{\frac{1}{3}} - x\right) + \left(x^{\frac{1}{5}} - x^{\frac{1}{3}}\right) + \left(x^{\frac{1}{7}} - x^{\frac{1}{5}}\right) + \dots + \left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}\right)$$

Eliminando os parênteses vem

$$S_n(x) = -x + x^{\frac{1}{2n+1}}$$

Agora,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-x + x^{\frac{1}{2n+1}}\right) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 - x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$ existe para todo $x \in \mathbb{R}$. Porém, a soma da série não é uma função contínua.

O teorema que segue permite identificar as séries de funções que convergem para funções contínuas.

Teorema 5.72. *Seja $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ uma série de funções majorável no intervalo $[a, b]$, então a soma $S_n(x)$ converge para uma função contínua $S(x)$ no intervalo $[a, b]$.*

Exemplo 5.73. A série de funções $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge para a função $S(x) = \frac{1}{1-x}$ no intervalo $(-1, 1)$.

Integração de uma série de funções contínuas

A integração de uma série de funções também exige cuidados. No Cálculo vimos que a integral da soma finita de funções é igual a soma das integrais. Se a soma de funções for infinita, isso pode não ocorrer. As condições necessárias para integração da soma infinita de funções são dadas pelo teorema abaixo.

Teorema 5.74. *Seja $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ uma série de funções contínuas majorável no intervalo $[a, b]$ e seja $S(x)$ a soma. Então, para $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ vale a afirmação*

$$\int_{\alpha}^{\beta} S(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} u_1(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} u_2(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} u_3(x) dx + \dots$$

Exemplo 5.75. A série de funções contínuas $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ é majorável no intervalo $(-1, 1)$.

Assim, para qualquer $[\alpha, \beta] \subset (-1, 1)$ tem-se

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{1-x} dx = \int_{\alpha}^{\beta} dx + \int_{\alpha}^{\beta} x dx + \int_{\alpha}^{\beta} x^2 dx + \int_{\alpha}^{\beta} x^3 dx + \dots$$

Derivadas de uma série de funções contínuas

No Cálculo vimos que a derivada da soma finita de funções é igual a soma das derivadas. Se a soma de funções for infinita, isso pode não ocorrer. As condições necessárias para derivação da soma infinita de funções são dadas pelo teorema a seguir.

Teorema 5.76. *Seja $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ uma série de funções contínuas majorável no intervalo $[a, b]$ que converge para a função $S(x)$ no intervalo $[a, b]$. Então $S'(x) = u'_0(x) + u'_1(x) + u'_2(x) + \dots + u'_n(x) \dots$ se as seguintes condições estiverem satisfeitas:*

- i) *As funções $u_0(x), u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ tem derivadas contínuas;*
- ii) *A soma $u'_0(x) + u'_1(x) + u'_2(x) + \dots + u'_n(x) \dots$, é majorável.*

Exemplo 5.77. *A série de funções contínuas $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ é majorável no intervalo $(-1, 1)$. Assim, para qualquer intervalo $[\alpha, \beta] \subset (-1, 1)$:*

- i) *As funções $u_1(x) = x, u_2(x) = \frac{x^2}{2}, u_3(x) = \frac{x^3}{3}, \dots, u_n(x) = \frac{x^n}{n} \dots$ tem derivadas contínuas;*
- ii) *A soma $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n \dots$ é majorável no intervalo $(-1, 1)$.*

Consequentemente, $S'(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n \dots = (\ln |1 - x|)'$.

A condição de que soma $S'(x) = u'_0(x) + u'_1(x) + u'_2(x) + \dots + u'_n(x) \dots$, seja majorável é extremamente importante. Caso não esteja satisfeita a derivação termo a termo pode se tornar impossível. Vejamos um exemplo.

Exemplo 5.78. *Consideremos a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^4 x)}{n^2}$. Nesse exemplo, a soma infinita das derivadas é diferente da derivada da soma da série.*

Prova: Como $|\sin(n^4 x)| \leq 1$ para todo n e todo x real, segue que $\left| \frac{\sin(n^4 x)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$. Portanto, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^4 x)}{n^2}$ é uma série de funções contínuas majorável para todo x real. Agora,

$$S(x) = \frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin(2^4 x)}{2^2} + \frac{\sin(3^4 x)}{3^2} + \frac{\sin(4^4 x)}{4^2} + \dots + \frac{\sin(n^4 x)}{n^2} \dots$$

e

$$S'(x) = \frac{\cos x}{1^2} + \frac{2^4 \cos(2^4 x)}{2^2} + \frac{3^4 \cos(3^4 x)}{3^2} + \frac{4^4 \cos(4^4 x)}{4^2} + \dots + \frac{n^4 \cos(n^4 x)}{n^2} \dots$$

ou

$$S'(x) = 1^2 \cos x + 2^2 \cos 2^4 x + 3^2 \cos 3^4 x + 4^2 \cos 4^4 x + \dots + n^2 \cos(n^4 x) + \dots$$

Para $x = 0$ temos

$$S'(x) = 1^2 \cos 0 + 2^2 \cos 0 + 3^2 \cos 0 + 4^2 \cos 0 + \dots + n^2 \cos 0 + \dots$$

ou

$$S'(x) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 + \dots$$

que é uma seqüência de somas divergente.

5.12. SÉRIE DE POTÊNCIAS

As séries de potências são séries de funções que aparecem com mais frequência nos problemas de engenharia. Por isso deve-se dar atenção especial ao seu estudo.

Definição 5.79. Denominamos *série de potências* a toda série escrita na forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, com coeficientes constantes c_n .

Observação 17. Para que os resultados anteriores possam ser usados sem mudanças nas notações vamos admitir $u_n = c_n x^n$ para o caso das séries de potências.

Teorema 5.80. Se uma série de potências, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, converge para um valor x_0 não nulo, então converge para todo $|x| < |x_0|$.

Definição 5.81. Seja uma série de potências, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, que converge para um valor x_0 não nulo. Denominamos *intervalo de convergência* da série ao conjunto de todos os pontos para os quais a série converge e raio de convergência R , à distância entre o centro e a extremidade do intervalo de convergência.

Processo para determinar o intervalo e o raio de convergência de uma série de potências

Usam-se os critérios de convergência de D'Alambert ou de Cauchy tomando $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} |(\sqrt[n]{u_n})^n|$ em que $u_n = c_n x^n$. Caso o limite exista valem as condições dos critérios usados.

Em qualquer caso teremos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |x| L$$

em que

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$$

e, desse modo, o raio e o intervalo de convergência serão dados resolvendo a inequação

$$|x| L < 1$$

- i. $|x| L < 1$ donde vem $|x| < \frac{1}{L}$ ou seja $R = \frac{1}{L}$.
- ii. Como pelo critério de D 'Alambert nada podemos afirmar se $|x| L = 1$, devemos verificar se a série converge para $x = \frac{1}{L}$ e $x = -\frac{1}{L}$.
- iii. Feita a verificação pode-se estabelecer o intervalo de convergência.

Exemplo 5.82. Determinar o intervalo e o raio de convergência para a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{5^n (1+n^2)}$.

Solução: Vamos aplicar o critério de D 'Alambert. Assim devemos primeiro encontrar $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{3^{n+1} x^{n+1}}{5^{n+1} (1+(n+1)^2)}}{\frac{3^n x^n}{5^n (1+n^2)}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{5^n 3^n 3 x^n x (1+n^2)}{5^n 5 (n^2+2n+2) 3 x^n} \right|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3x(1+n^2)}{5(n^2+2n+2)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3(1+n^2)}{5(n^2+2n+2)} \right| = |x| \frac{3}{5}.$$

A série converge se $|x| \frac{3}{5} < 1$ ou $|x| < \frac{5}{3}$. Portanto, o raio de convergência é $R = \frac{5}{3}$

Na sequência devemos verificar se a série converge para $x = -\frac{5}{3}$ e $x = \frac{5}{3}$.

- Se $x = -\frac{5}{3}$ teremos a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n \left(-\frac{5}{3}\right)^n}{5^n (1+n^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n 5^n}{5^n (1+n^2) 3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(1+n^2)}.$$

Pelo critério de Leibnitz a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(1+n^2)}$$

é convergente.

Logo, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{5^n (1+n^2)}$ converge se $x = -\frac{5}{3}$.

- Se $x = \frac{5}{3}$ teremos a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n \left(\frac{5}{3}\right)^n}{5^n (1+n^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n 5^n}{5^n (1+n^2) 3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+n^2)}$$

Usando o critério de comparação concluímos que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+n^2)}$$

é convergente.

Logo, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{5^n (1+n^2)}$ converge se $x = \frac{5}{3}$.

Conclusão: O raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{5^n (1+n^2)}$ é $R = \frac{5}{3}$ e intervalo é $-\frac{5}{3} \leq x \leq \frac{5}{3}$.

Série de potências em termos de $(x-a)$

Definição 5.83. Denominamos série de potências de $(x-a)$ a série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n (x-a)^n$.

Para obter o raio e o intervalo de convergência das séries em $(x-a)$ basta fazer $z = (x-a)$ e encontrar o intervalo de convergência para a série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$. Após substituí z por $(x-a)$ na inequação $-R < z < R$.

Exemplo 5.84. Determinar o raio e o intervalo de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(x-5)^n}{n^2+3}$.

Solução: Seja $z = (x-5)$. Então podemos escrever

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(x-5)^n}{n^2+3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2z^n}{n^2+3}$$

Usando o teorema de D’Alambert vem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{2z^{n+1}}{(n+1)^2 + 3}}{\frac{2z^n}{n^2 + 3}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n^2 + 3) 2z^{n+1}}{((n+1)^2 + 3) 2z^n} \right|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n^2 + 3) 2z^n z}{2z^n (n^2 + 2n + 4)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |z| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^2 + 3}{n^2 + 2n + 4} \right| = |z|.$$

A série converge se $|x| < 1$. Portanto, o raio de convergência é $R = 1$

Na sequência devemos verificar se a série converge para $x = -1$ e $x = 1$.

- Se $z = -1$ teremos a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2z^n}{n^2 + 3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2 + 3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{(n^2 + 3)}$$

Pelo critério de Leibnitz a série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{(n^2 + 3)}$ é convergente. Logo, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2z^n}{n^2 + 3}$ converge se $z = -1$.

- Se $x = 1$ teremos a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2z^n}{n^2 + 3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(1)^n}{n^2 + 3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n^2 + 3)}$$

Usando o critério de comparação concluímos que a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n^2 + 3)}$ é convergente. Logo, a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2z^n}{n^2 + 3}$$

converge se $z = 1$.

Conclusão: O raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2z^n}{n^2 + 3}$ é $R = 1$ e intervalo é $-1 \leq z \leq 1$.

Substituindo z por $(x - 5)$ em $-1 \leq z \leq 1$ obtemos

$$-1 \leq x - 5 \leq 1$$

donde vem

$$4 \leq x \leq 6$$

que é o intervalo de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(x-5)^n}{n^2 + 3}$.

5.13. Séries de Taylor

Considere a função $f(x)$. Pretende-se encontrar uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} u_n (x-a)^n$ tal que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n (x-a)^n. \text{ Em outras palavras queremos}$$

$$f(x) = u_0 + u_1(x-a) + u_2(x-a)^2 + u_3(x-a)^3 + u_4(x-a)^4 + \dots \quad (\text{Taylor})$$

Assim, precisamos determinar os coeficientes $u_0, u_1, u_2, \dots$.

- Primeiro determinamos u_0 tomando $x = a$ na função Taylor. Obtemos

$$f(a) = u_0 + u_1(a-a) + u_2(a-a)^2 + u_3(a-a)^3 + u_4(a-a)^4 + \dots$$

donde vem

$$f(a) = u_0$$

.

- Determinamos a derivada da função Taylor e, na sequência $f'(a)$ para obter u_1 . Temos

$$f'(x) = u_1 + 2u_2(x-a) + 3u_3(x-a)^2 + 4u_4(x-a)^3 + \dots$$

$$f'(a) = u_1 + 2u_2(a-a) + 3u_3(a-a)^2 + 4u_4(a-a)^3 + \dots$$

donde vem

$$f'(a) = u_1.$$

- Determinamos a terceira derivada da função Taylor e, na sequência $f''(a)$ para obter u_2 . Temos

$$f''(x) = 2u_2 + 3 \cdot 2u_3(x-a) + 4 \cdot 3u_4(x-a)^2 + 5 \cdot 4u_5(x-a)^3 + \dots$$

$$f''(a) = 2u_2 + 3 \cdot 2u_3(a-a) + 4 \cdot 3u_4(a-a)^2 + 5 \cdot 4u_5(a-a)^3 + \dots$$

donde vem

$$f''(a) = 2u_2 \text{ ou } u_2 = \frac{f''(a)}{2!}$$

.

- Determinamos a segunda derivada da função Taylor e, na sequência $f^3(a)$ para obter u_3 . Temos

$$f^3(x) = 3 \cdot 2u_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2u_4(x-a) + 5 \cdot 4 \cdot 3u_5(x-a)^2 \dots$$

$$f^3(a) = 3 \cdot 2u_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2u_4(a-a) + 5 \cdot 4 \cdot 3u_5(a-a)^2 \dots$$

donde vem

$$f^3(a) = 3 \cdot 2u_3 \text{ ou } u_3 = \frac{f^3(a)}{3!}.$$

- Prosseguindo dessa forma encontraremos $u_n = \frac{f^n(a)}{n!}$ de modo que podemos escrever a série de Taylor como segue

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^3(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

ou

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!} (x-a)^n.$$

Exemplo 5.85. Desenvolver em série de Taylor a função $f(x) = \operatorname{sen} x$.

Solução: Primeiro vamos determinar as derivadas de todas as ordens de $f(x) = \operatorname{sen} x$ no ponto a . Temos

$$f(a) = \operatorname{sena} \quad f'(a) = \cos a \quad f''(a) = -\operatorname{sena}$$

$$f^3(a) = -\cos a \quad f^4(a) = \operatorname{sena} \quad f^5(a) = \cos a$$

Substituímos na fórmula

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^3(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n \dots$$

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sena} + \cos a(x-a) - \frac{\operatorname{sena}}{2!}(x-a)^2 - \frac{\cos a}{3!}(x-a)^3 + \frac{\operatorname{sena}}{4!}(x-a)^4 \dots$$

Esta série pode ser reescrita separando os termos em seno dos termos em cosseno

$$\operatorname{sen} x = \left(\operatorname{sena} - \frac{\operatorname{sena}}{2!}(x-a)^2 + \frac{\operatorname{sena}}{4!}(x-a)^4 \dots \right) + \left(\cos a(x-a) - \frac{\cos a}{3!}(x-a)^3 + \dots \right)$$

escrevendo em forma de somatório vem

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{sena}}{(2n)!} (x-a)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos a}{(2n+1)!} (x-a)^{2n+1}$$

5.14. Série de Maclaurin

Colin Maclaurin (1698 - 1746) foi um matemático escocês. Para obter o desenvolvimento de uma função em série de Maclaurin basta tomar $a = 0$ na série de Taylor. Desse modo temos

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Exemplo 5.86. Desenvolver em série de Maclaurin a função $f(x) = \operatorname{sen} x$.

Solução: No exemplo 5.85 desenvolvemos $f(x) = \operatorname{sen} x$ em série de Taylor. Fazendo $a = 0$ vem

$$\operatorname{sen} x = \left(\operatorname{sen} 0 - \frac{\operatorname{sen} 0}{2!}(x-0)^2 + \frac{\operatorname{sen} 0}{4!}(x-0)^4 + \dots \right) + \left(\cos 0(x-0) - \frac{\cos 0}{3!}(x-0)^3 + \dots \right)$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots$$

.

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Uma aplicação dessa série pode ser feita para determinar, por exemplo, o valor de $\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{6} \right)$

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} - \frac{\left(\frac{\pi}{6} \right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{\pi}{6} \right)^5}{5!} - \frac{\left(\frac{\pi}{6} \right)^7}{7!} + \frac{\left(\frac{\pi}{6} \right)^9}{9!} + \dots = \frac{1}{2}.$$

Exemplo 5.87. Desenvolver em série de funções $\int \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$.

Solução: Usaremos o resultado do exemplo 5.86. Vimos no teorema 5.74 que uma série de funções contínuas majorável, a integral da soma é igual a soma das integrais. A série $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots$, é majorável para todo x .

- Primeiro dividimos cada termo do exemplo 5.86 por x $\frac{\text{sen}x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} +$

$$\frac{x^8}{9!} \dots$$

- Integramos a série termo a termo

$$\int \frac{\text{sen}x}{x} dx = \int dx - \int \frac{x^2}{3!} dx + \int \frac{x^4}{5!} dx - \int \frac{x^6}{7!} dx + \int \frac{x^8}{9!} dx \dots$$

donde vem

$$\int \frac{\text{sen}x}{x} dx = x - \frac{x^3}{3!3} + \frac{x^5}{5!5} - \frac{x^7}{7!7} + \frac{x^9}{9!9} \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}.$$

que é o resultado final.

Exemplo 5.88. Use séries para provar que o limite de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \frac{-1}{6}$

Resolução

$$g(a) = \sin(a)$$

$$g^1(a) = \cos(a)$$

$$g^2(a) = -\sin(a)$$

$$g^3(a) = -\cos(a)$$

$$g^4(a) = \sin(a)$$

em Maclaurin temos:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\frac{\sin x - x}{x^3} = \frac{\sin x}{x^3} - \frac{1}{x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \frac{x^4}{7!} + \frac{x^6}{9!} + \dots = -\frac{1}{6}$$

Exemplo 5.89. Desenvolver em série de Maclaurin a função $f(x) = \frac{\text{sen}2x}{x}$

Anteriormente, vimos que por série de Maclaurin,

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\ \sin 2x &= 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \frac{(2x)^7}{7!} + \frac{(2x)^9}{9!} + \dots + (-1)^n \frac{(2x)^{2n+1}}{2n+1} \\ \sin 2x &= 2x - \frac{2^3 x^3}{3!} + \frac{2^5 x^5}{5!} - \frac{2^7 x^7}{7!} + \frac{2^9 x^9}{9!} + \dots + (-1)^n \frac{2^{2n+1} x^{2n+1}}{2n+1} \\ \sin 2x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1} (x)^{2n+1}}{(2n+1)!}\end{aligned}$$

portanto para

$$f(x) = \frac{\sin 2x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1} (x)^{2n+1}}{(2n+1)!x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1} (x)^{2n}}{(2n+1)!}$$

5.15. Fórmula geral do binômio de Newton

Suponhamos que o interesse é o desenvolvimento do binômio $(a+b)^n$ para n inteiro positivo. Do desenvolvimento geral do binômio de Newton vem:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n b^n.$$

$$\text{Como } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))(n-k)!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))}{k!}$$

podemos escrever

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))}{k!}a^{n-k}b^k + \dots + b^n.$$

Tomando $a = 1$ e $b = x$ vem

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))}{k!}x^k + \dots + x^n.$$

Porém, se n não for um inteiro positivo ou zero, é conveniente desenvolver o binômio $(1+x)^n$ em série de Maclaurin. Desse modo teremos

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots + \quad (5.1)$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}x^k + \dots \quad (5.2)$$

Esta série é chamada série binomial e como o leitor poderá verificar através do critério de D 'Alambert é absolutamente convergente para todo x tal que $|x| < 1$. Pode ser provado

que esse desenvolvimento é verdadeiro para todo n . A prova pode ser encontrada nos livros citados na bibliografia. Escrevendo em forma de somatório vem para todo n .

$$(1+x)^n = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} x^k \text{ se } |x| < 1.$$

Exemplo 5.90. Desenvolver em série de funções a função $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

Solução: Temos

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$

Portanto, basta substituir $n = -1$ na fórmula??. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &= 1 + (-1)x + \frac{-1(-1-1)}{2!}x^2 + \frac{-1(-1-1)(-1-2)}{3!}x^3 + \dots \\ &\quad + \frac{-1(-1-1)(-1-2)\dots(-1-k+1)}{k!}x^k + \dots \end{aligned}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{-6}{3!}x^3 + \dots + \frac{-1(-1-1)(-1-2)\dots(-1-k+1)}{k!}x^k + \dots$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

Exemplo 5.91. Expresse como uma série de potência em x a função $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$

Vamos analisar inicialmente a função $\ln(x+1)$. A derivada de $\ln(x+1)$ é $\frac{1}{x+1}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &= 1 + (-1)x + \frac{-1(-1-1)}{2!}x^2 + \frac{-1(-1-1)(-1-2)}{3!}x^3 + \dots \\ \frac{1}{1+x} &= 1 - x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{-6}{3!}x^3 + \dots + \frac{-1(-1-1)(-1-2)\dots(-1-k+1)}{k!}x^k + \dots \\ \dots \\ \frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \text{ portanto se queremos} \end{aligned}$$

$\ln(x+1)$ devemos integrar os membros da equação:

$$\int \frac{1}{1+x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n x^n dx$$

$$\int \frac{1}{1+x} dx = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Como queremos $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$, temos:

$$\frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}}{x} = (-1)^n \frac{x^n}{n+1}$$

Exemplo 5.92. Desenvolver em série de funções a função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

Solução: Temos

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

Portanto, basta substituir $n = -\frac{1}{2}$ na fórmula??. Assim,

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)x + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2 + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3 + \dots +$$

$$+ \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}x^k + \dots$$

donde vem

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}x^2 + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}x^3 + \dots +$$

$$+ \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\dots\left(\frac{1-2k}{2}\right)}{k!}x^k + \dots$$

resultando em

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2^2 2!}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 3!}x^3 + \dots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n n!}x^n \dots$$

Exemplo 5.93. Desenvolver em série de funções a função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Solução: Podemos aproveitar o resultado do exemplo 5.92. Basta substituir x no exemplo 5.92 por $(-x^2)$. Teremos então

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+(-x^2)}} &= 1 - \frac{1}{2}(-x^2) + \frac{1 \cdot 3}{2^2 2!}(-x^2)^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 3!}(-x^2)^3 + \dots + \\ &+ (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n n!}(-x^2)^n \dots\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 2!}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 3!}x^6 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n n!}x^{2n} \dots$$

Exemplo 5.94. Desenvolver em séries de funções a função $f(x) = \arcsen x$.

Solução: Vimos no teorema 5.74 que uma série de funções contínuas majorável, a integral da soma é igual a soma das integrais. Sendo a derivada da função $f(x) = \arcsen x$ igual a $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ podemos aproveitar o resultado do exemplo 5.93, isto é

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int dx + \frac{1}{2} \int x^2 dx + \frac{1 \cdot 3}{2^2 2!} \int x^4 dx + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 3!} \int x^6 dx + \dots + \\ &+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n n!} \int x^{2n} dx \dots\end{aligned}$$

resultando em

$$\arcsen x = x + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 2! 5}x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 3! 7}x^7 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n n! (2n+1)}x^{2n+1} \dots$$

ou

$$\arcsen x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n n! (2n+1)} x^{2n+1}.$$

5.16. Exercícios Gerais

1. Usando séries, determine o valor de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x + 2x^2 - 1}{x^4}$$

2. Usando Maclaurin determine o valor de $\int x^2 \ln(x+1) dx$

3. Encontre o termo geral da soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4n^2-1}$ e verifique se ela é convergente.

4. Encontre a soma da série

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{(5n+2)(5n+7)} \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

5. Encontre o raio e o domínio de convergência da série: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x-2)^n}{(5)^n (1+n^2)}$

6. Determine o intervalo de convergência que representa a série $f(x) = \frac{4}{x^2}$

7. Usando séries de Maclaurin, prove que $\int \cos x dx = \sin x + k$

8. Use o teste de comparação para decidir se as séries abaixo são convergentes

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n} \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos n}{n^2} \quad d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+4}$$

$$e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{1+3^n} \quad f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\ln n}{n^3+1} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^*}{(n-1)n(n+1)}$$

9. Use o teste da integral para decidir se as séries são convergentes

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+7} \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2+1}} \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg n}{n^2+1}$$

10. Use o teste de D 'alambert para decidir se as séries são convergentes

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{2^n} \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2+2} \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)^3} \quad d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{5^n(n+1)}$$

11. Determine se a série é absolutamente ou condicionalmente convergente

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(n^n+3)2^n}{(2n-5)^n} \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^4}{e^n}$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+1} \quad e) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^3+3}$$

12. Encontre o raio e o domínio de convergência das séries

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x-5)^n}{n^2+1} \quad b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n^n+3)(x+2)^n}{(2n-5)^n} \quad c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4(x-1)^n}{e^n}$$

$$d) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(x+1)^n}{n^2+1} \quad e) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x-1)^{2n}}{n^3+3} \quad e) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1.3.5.7 \dots (2n-1)x^n}{3.6.9 \dots 3n}$$

13. Desenvolver em série de Taylor e Mclaurin as funções

$$\begin{array}{llll} a)f(x) = \operatorname{sen} 2x & b)f(x) = x^2 \operatorname{sen} 2x & c)f(x) = e^{3x} & d)f(x) = e^{-x^2} \\ e)f(x) = \cos 2x & g)f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} & h)f(x) = \frac{\cos x}{x^2} \end{array}$$

14. Desenvolver em série de Mclaurin as funções

$$\begin{array}{llll} a)f(x) = \frac{1}{1+x} & b)f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} & c)f(x) = \frac{1}{1+x^2} & d)f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ e)f(x) = \int \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx & g)f(x) = \int e^{-x^2} & h)f(x) = \int \frac{\ln(1+x)}{x} & i)f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} \\ j)f(x) = \operatorname{arcsen} x & l)f(x) = \arccos x & n)f(x) = \operatorname{arctag} x & o)f(x) = \sqrt[3]{1+x} \end{array}$$