Conteúdo

PLANO DE ENSINO

Departamento: Matemática
Disciplina: Cálculo Diferencial e Integral II **Sigla:** CDI-II
Carga Horária Total: 60 horas **Teórica:** 60 **Prática:** 0
Semestre/Ano: 02/2007
Cursos: Engenharia Civil, Engenharia Elétrica, Engenharia Mecânica, Licenciatura em Física, Engenharia de Produção e Sistemas.

Coordenação: Marnei Luis Mandler
Professores: Clodoaldo José Figueiredo, Enori Carelli, Lucas Ribeiro, Maria Bernadete Silva, Marnei Mandler, Milton Procópio de Borba

Objetivo Geral da Disciplina: Proporcionar ao estudante a oportunidade de apropriar-se dos conhecimentos de cálculo diferencial e integral, bem como aplicar seus conceitos em sua área de atuação.

Objetivos Específicos da Disciplina:

a) Reconhecer e resolver problemas que envolvam integral definida;

b) Reconhecer e resolver problemas que envolvam funções de várias variáveis;

c) Reconhecer e resolver problemas que envolvam integrais múltiplas;

d) Reconhecer e resolver problemas que envolvam seqüências e séries.

Ementa: Integrais definidas. Teorema Fundamental do Cálculo. Funções de várias variáveis reais. Integrais duplas. Integrais triplas. Séries Numéricas. Série de Funções.

Cronograma de Atividades:

1. Integral Definida (14 h/a)

1.1. Integral Definida (2 h/a)

1.2. Teorema Fundamental do Cálculo e Propriedades (1 h/a)

1.3. Substituição de Variáveis (1 h/a)

1.4. Integração por Partes (1 h/a)

1.5. Integrais Impróprias (1 h/a)

1.6. Área em Coordenadas Cartesianas (1 h/a)

1.7. Área em Coordenadas Polares (1 h/a)

1.8. Comprimento de Arco (2 h/a)

1.9. Volume de Sólido de Revolução (2 h/a)

1.10. Superfície de Sólido de Revolução e outras aplicações (2 h/a)

2. Funções de Várias Variáveis (14 h/a)

2.1. Introdução, Definição, Representação Gráfica (2 h/a)

2.2. Limite de Funções de várias Variáveis (2 h/a)

2.3. Continuidade de Funções de várias variáveis (1 h/a)

2.4. Derivadas Parciais (1 h/a)

2.5. Regra da Cadeia (1 h/a)

2.6. Derivação Implícita (1 h/a)

2.7. Taxas de Variação (1 h/a)

2.8. Diferencial Parcial e Diferencial Total (2 h/a)

2.9. Derivadas Parciais de Ordem Superior (1 h/a)

2.10. Extremos de Funções de duas variáveis (2 h/a)

3. Integrais Duplas (6 h/a)

3.1. Definição (1 h/a)

3.2. Propriedades (1 h/a)

3.3. Interpretação Geométrica (1 h/a)

3.4. Cálculo de Integrais Duplas em Coordenadas Cartesianas (1 h/a)

3.5. Integral Dupla em Coordenadas Polares (2 h/a)

4. Integrais Triplas (10 h/a)

4.1. Definição

4.2. Propriedades (1 h/a)

4.3. Interpretação Geométrica (1 h/a)

4.4. Cálculo de Integrais Triplas em Coordenadas Cartesianas (2 h/a)

4.5. Cálculo de Integrais Triplas em Coordenadas Cilíndricas (2 h/a)

4.6. Cálculo de Integrais Triplas em Coordenadas Esféricas (2 h/a)

4.7. Apresentação de Trabalhos (2 h/a)

5. Séries Numéricas e Séries de Funções (16 h/a)

5.1. Seqüências (2 h/a)

5.2. Séries Numéricas (2 h/a)

5.3. Critério do Termo Geral

5.4. Critério da Comparação (1 h/a)

5.5. Critério de D'Alembert

5.6. Critério de Cauchy

5.7. Critério da Integral (2 h/a)

5.8. Séries Alternadas – Teorema de Leibnitz (1 h/a)

5.9. Convergência Absoluta e Convergência Condicional (1 h/a)

5.10. Séries de Funções (1 h/a)

5.11. Séries Majoráveis

5.12. Continuidade da Soma de uma Série (1 h/a)

5.13. Derivação e Integração de Séries (1 h/a)

5.14. Séries de Potências, Raio e Intervalo de Convergência (2 h/a)

5.15. Séries de Taylor e Séries de MacLaurin (2 h/a)

Avaliações: Serão realizadas 4 avaliações escritas individuais:

1^a *Prova*: referente ao Capítulo 1: nota x
2^a *Prova*: referente ao Capítulo 2: nota y
3^a *Prova*: referente aos Capítulos 3 e 4: nota z
4^a *Prova*: referente ao Capítulo 5: nota w

Fará parte da terceira avaliação a apresentação oral de um trabalho, valendo até dois pontos na nota da terceira prova, conforme procedimentos estabelecidos na apostila. No entanto, a soma da nota da prova com a nota do trabalho não poderá ultrapassar 10.

Média Semestral: Será calculada pela relação: $M = \frac{2x+2y+3z+3w}{10}$.

Datas das Provas:

Diurno: 9:00 - 11:00 horas	**Noturno: 18:10 - 19:50 horas**
1^a *Prova*: 25/08/07	1^a *Prova*: 27/08/07
2^a *Prova*: 22/09/07	2^a *Prova*: 26/09/07
3^a *Prova*: 20/10/07	3^a *Prova*: 24/10/07
4^a *Prova*: 24/11/07	4^a *Prova*: 03/12/07
Exame : 11/12/07	*Exame* :10/12/07
2^a *época*:17/12/07	2^a *época*: 17/12/07

Bibliografia:

ANTON, H. **Cálculo: um novo Horizonte.** Bookman, PoA. Volume 1
ANTON, H. **Cálculo: um novo Horizonte.** Bookman, PoA. Volume 2
AYRES, F. J. **Cálculo.** Coleção Schaum. McGraw-Hill do Brasil. SP.
GONÇALVES, M. B. and FLEMMING, D. M. **Cálculo B: Funções de várias Variáveis, Integrais Duplas, Integrais Triplas.** Makron Books. SP.
LEITHOLD, L. **Cálculo com Geometria Analítica.** Harbra. SP.
PISKOUNOV, N. **Cálculo Diferencial e Integral.** Lopes e Silva. Porto.
SWOKOWSKI, E. **Cálculo com Geometria Analítica.** Makron Books, SP. Volumes 1 e 2
THOMAS, G. **Cálculo.** Addison Wesley, SP. Volume 1 e 2.
APOSTILA TEXTO DE CÁLCULO II

1. INTEGRAl DEFINIDA

Integrais definidas: Objetivos:

Ao final do capítulo espera-se que o aluno seja capaz de:

1. Definir integral inferior e integral superior;

2. Calcular o valor da integral definida por definição;

3. Aplicar o teorema fundamental do cálculo e suas propriedades;

4. Calcular integral definida por substituição de variáveis;

5. Resolver exercícios que envolvam integrais impróprias;

6. Resolver exercícios que envolvam integrais impróprias de funções descontinuas;

7. Calcular áreas delimitadas por funções em coordenadas retangulares;

8. Calcular áreas delimitadas por funções em coordenadas polares;

9. Calcular volume de um sólido de revolução;

10. Calcular o comprimento de um arco em coordenadas retangulares, paramétricas e polares;

11. Calcular a superfície de um sólido de revolução.

12. Resolver problemas através da integral nas áreas de física, produção, economia entre outras aplicações.

12. Resolver exercícios usando o Maple.

A prova será composta por questões que possibilitam verificar se os objetivos foram atingidos. Portanto, esse é o roteiro para orientações de seus estudos. O modelo de formulação das questões é o modelo adotado na formulação dos exercícios e desenvolvimento teórico desse capítulo, nessa apostila.

1.1. Introdução

Neste capítulo estudaremos a integral definida. Uma das principais aplicações da integral definida encontra-se em problemas que envolvem cálculo de área e volumes. Por exemplo, seja $f : [a, b] :\longrightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Nosso propósito é determinar a área delimitada pela curva $y = f(x)$ e pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$, conforme figura 1.1

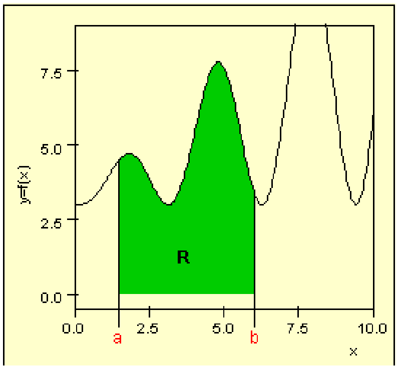


Figura 1.1: área da região R

Como você acha que poderíamos calcular a área da região?

Estimando o valor da área R: Sabemos como calcular a área de um retângulo (base x altura). Vamos considerar neste caso, $a = 2$ e $b = 6$ e dividir o intervalo $[2, 6]$, por exemplo, em 2 subintervalos de comprimento $x = 2$. Denotamos os extremos destes subintervalos por x_i, onde $0 \leq i \leq 2$. Veja que, neste caso, $x_0 = 2$, $x_1 = 4$ e $x_2 = 6$. Na figura 1.2, considere os retângulos de largura x e altura $M_i = Max\{f(x_{i-1}), f(xi)\}$.

A área é dada pela soma dos dois retângulos. Como a base é a mesma podemos dizer que a área é dada pelo $\sum_{i=0}^{i=2} M_i \Delta x$, onde $M_i = Max\{f(x_{i-1}), f(xi)\}$ e $\Delta x = x_i - x_{i-1}$. Você acha que podemos comparar a área da região R representada pela figura 1.1 e a região formada pelos retângulos da figura 1.2. ? A diferença é muito grande? O que aconteceria com esta diferença se dividissemos este intervalo em $n = 3, 4, 5, 6....?$

A definição formal de integral envolve a soma de muitos termos pequenos (diferenciais), com a finalidade de obter-se uma quantidade total após esta operação.

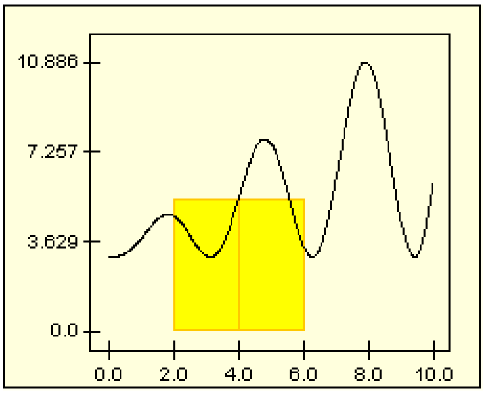


Figura 1.2: Estimativa da área por retângulo

Assim há uma conexão entre o cálculo integral e diferencial, onde o Teorema Fundamental do Cálculo (que veremos ainda neste cápitulo) relaciona a integral com a derivada. As integrais estão envolvidas em inúmeras situações: usando a taxa (derivada) podemos obter a quantidade (integral) de óleo que vaza de um tanque durante um certo tempo; utilizando a leitura do velocímetro de um ônibus espacial é possível calcular a altura atingida por ele em um dado intervalo de tempo. Assim, pode usar-se a integral para resolver problemas concernentes a volumes, comprimentos de curvas, predições populacionais, saída de sangue do coração, força sobre uma represa, excedente de consumo e futebol, potência consumida e a energia usada em um intervalo de tempo na cidade de Joinville, etc.

O Cálculo de Área

Ao tentar encontrar a área de uma região que está sob uma curva $s = f(t)$ de a até b, onde a curva s representa a derivada da distância percorrida, isto é, a velocidade de um automóvel ao percorrer uma certa distância durante um certo intervalo de tempo, e a área representará a distância total percorrida pelo automóvel durante este intervalo de tempo. Assim, isso significa uma região D (conforme a figura 1.3) , limitada por uma função $f(t)$ (onde $f(t) \geqslant 0$), retas verticais ao eixo t dos tempos, isto é, $t = t_i = a$ e $t = t_f = b$, onde $t_i = a$ e $t_f = b$ representam o tempo inicial e final respectivamente, e o eixo t

Calcular área de uma região retangular é tarefa simples. Para um retângulo a área é definida como o produto base pela altura. A área de um triângulo é a metade da

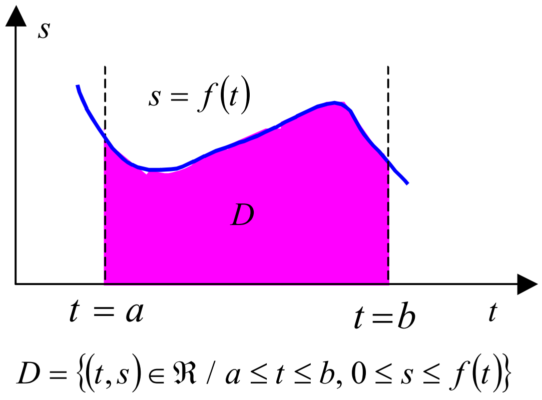


Figura 1.3: Distância de um automóvel

base vezes a altura. A área de um polígono é encontrada dividindo-o. No entanto, não é tão fácil encontrar a área de uma região com lados curvos. Assim, parte do problema da área é utilizar uma idéia intuitiva do que é a área de uma região. Recordando-se que ao definir uma tangente primeiro aproximando a inclinação da reta tangente por inclinações de retas secantes e então tomando o limite dessas aproximações, utiliza-se de uma idéia semelhante para obter áreas. Em primeiro lugar aproxima-se a região por retângulos e então toma-se o limite das áreas desses retângulos à medida que se aumenta o número destes, conforme a figura 1.4

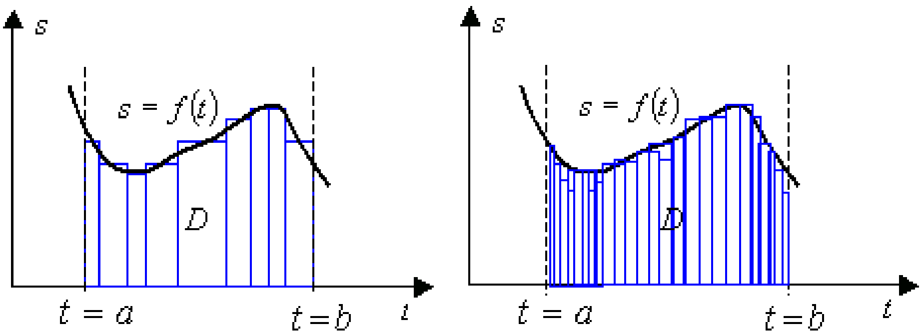


Figura 1.4: Aproximando áreas por n retângulos

E desta forma a área total será dada pela soma das área retangulares onde as bases $\to 0 \Rightarrow \Delta t \to 0$ quando o número de retângulo $\to \infty \Rightarrow n \to \infty$. Você consegue formalizar, matematicamente, este resultado?

Para dar início ao processo veremos algumas definições que auxiliam na compreensão.

Partição

Definição 1.1. *: Seja $[a, b]$ um intervalo. Denominamos partição de $[a, b]$ ao conjunto ordenado de pontos*

$$P = [x_0, x_1, x_2, ..., x_i...., x_n]$$

tais que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < .... < x_n = b$$

que dividem $[a, b]$ em n-subintervalos

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], ..., [x_{i-1}, x_i] .... [x_{n-1}, x_n]$$

denominados intervalos da partição.

Além disso, podemos escrever

$$\begin{array}{lll}
|[x_0, x_1]| & = x_1 - x_0 & = \Delta x_1 \\
|[x_1, x_2]| & = x_2 - x_1 & = \Delta x_2 \\
|[x_2, x_3]| & = x_3 - x_2 & = \Delta x_3 \\
. & . & . \\
|[x_{i-1}, x_i]| & = x_i - x_{i-1} & = \Delta x_i \\
. & . & . \\
|[x_{n-1}, x_n]| & = x_n - x_{n-1} & = \Delta x_n
\end{array}$$

Consideremos o intervalo $[1, 15]$. O conjunto de pontos

$$P = [1, 2, 4, 8, 12, 15] \text{ é uma partição do } [1, 15].$$

Os intervalos dessa partição são:

$$[1, 2], [2, 4], [4, 8], [8, 12]e[12, 15].$$

Naturalmente, temos:

$$1 = x_0 < 2 = x_1 < 4 = x_2 < 8 = x_3 < 12 = x_4 < 15 = x_5.$$

Sejam $[a, b]$ um intervalo,

$$P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_i...., x_n\}$$

e

$$Q = [x_0, x_1, x_2, ...y_{0..}., x_i...., x_n]$$

duas partições de $[a, b]$. Dizemos que a partição Q é um refinamento da partição P se $P \subset Q$.

Exemplo 1.2. *Consideremos o intervalo* $[1, 15]$. *Os conjuntos de pontos* $P = [1, 2, 4, 8, 12, 15]$ *e* $Q = [1, 2, 3, 4, 5, 8, 10, 12, 14, 15]$ *são duas partições de* $[1, 15]$ *tais que* $P \subset Q$. *Então* Q *é um refinamento de* P.

1.2. Integral Superior

Iniciaremos nosso estudo pela integral superior. Consideraremos uma função $f : [a, b] :\rightarrow \mathbb{R}$ definida num intervalo fechado $[a, b]$ e limitada nesse intervalo. Isto é, existem m, M tais que $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$.

Definição 1.3. *Seja* $f : [a, b] :\rightarrow \mathbb{R}$ *uma função limitada e seja* $P = [x_0, x_1, x_2, ..., x_i...., x_n]$ *tais que* $a = x_0 < x_1 < x_2 < .... < x_n = b$ *uma partição de* $[a, b]$. *Seja* M_i *o valor supremo de* f *no intervalo* $[x_{i-1}, x_i]$ *para* $i = 1, 2, 3, ...n$. *Denominamos soma superior em relação à partição* P *da função* f *e denotaremos por* $\overline{S}(f, P)$ *à expressão:*

$$\overline{S}(f, P) = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + .. + M_n(x_n - x_{n-1})$$

$$\overline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

Exemplo 1.4. *Considere a função* $f : [0, 2] :\rightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = xsenx$. *Na figura 1.5 podemos ver o gráfico de uma soma superior referente a uma partição composta por um número reduzido de pontos (15 pontos) e de uma soma superior referente a uma partição com maior número de pontos (80 pontos), conforme ilustra a figura 3.3*

Note que aumentando o número de pontos da partição, uniformemente distribuidos, a soma superior $\overline{S}(f, P)$ se aproxima da área sob o gráfico de $f(x) = xsenx$ no intervalo $[0, 2]$.

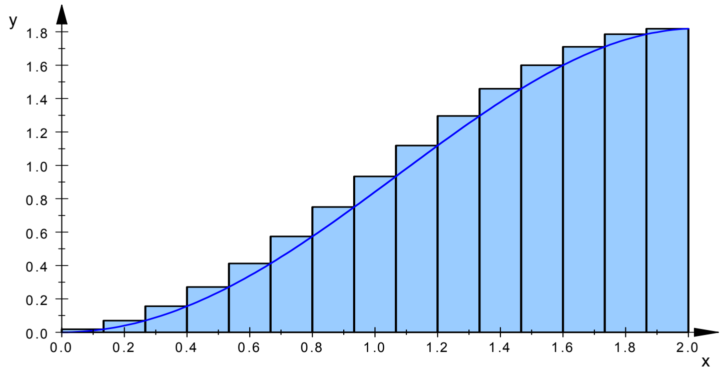


Figura 1.5: Soma superior, $\overline{S}(f, P)$, P com 15 pontos. $A = 1,863ua$

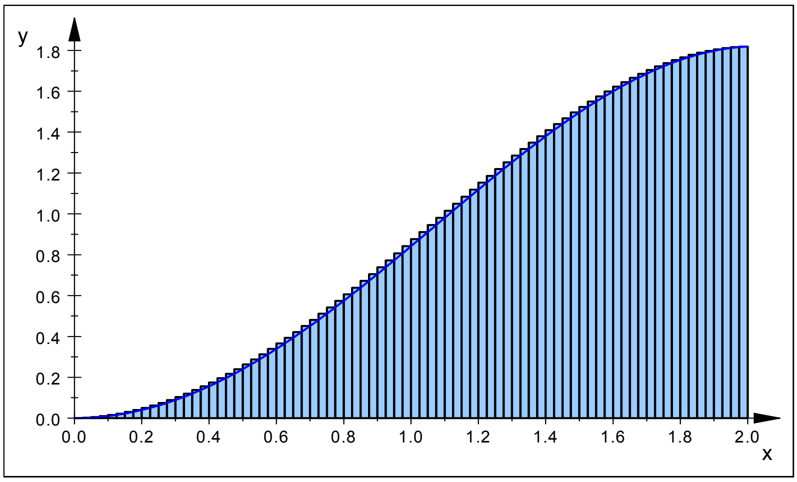


Figura 1.6: Soma superior, $\overline{S}(f, P)$, P com 80 pontos. $A = 1,746ua$

1.3. Integral Inferior

Definição 1.5. *Seja* $f : [a, b] :\rightarrow \mathbb{R}$ *uma função limitada e seja*

$$P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_i ...., x_n\}$$

tal que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < .... < x_n = b$$

uma partição de $[a, b]$. *Seja* m_i *o valor ínfimo de* f *no intervalo* $[x_{i-1}, x_i]$ *para* $i = 1, 2, 3, ...n$. *Denominamos soma inferior em relação à partição* P *da função* f *e deno-*

taremos por $\underline{S}(f,P)$ *à expressão:*

$$\underline{S}(f,P) = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + .. + m_n(x_n - x_{n-1})$$

$$\underline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

Exemplo 1.6. *Considere a função* $f : [0,2] :\rightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = xsenx$. *Na figura 1.7 podemos ver o gráfico de uma soma inferior referente a uma partição composta por um número reduzido de pontos (15 pontos) e na figura 1.8 de uma soma inferior referente a uma partição com maior número de pontos (84 pontos).*

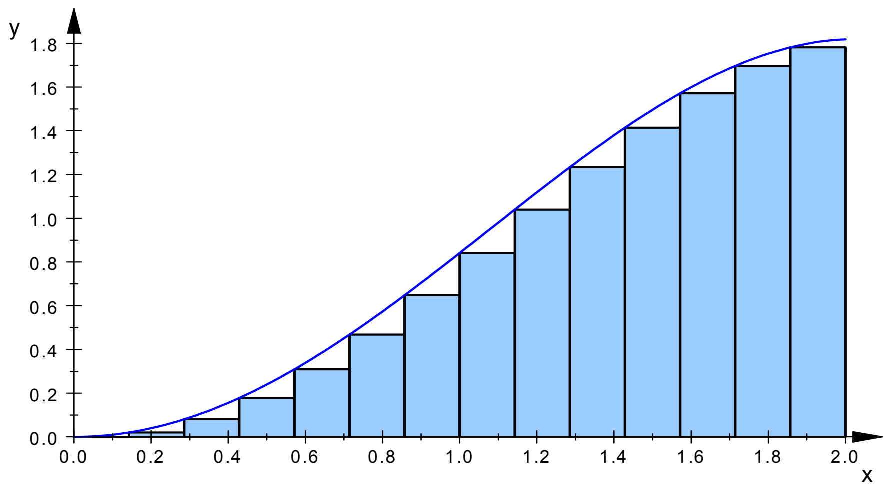


Figura 1.7: Gráfico de $\underline{S}(f,P)$, P com 15 pontos. $A = 1,642$

Note que aumentando o número de pontos de $[a,b]$ a soma inferior $\underline{S}(f,P)$ se aproxima da área sob o gráfico de $f(x) = xsenx$ no intervalo $[0,2]$.

1.4. Função Integrável

Definição 1.7. *Seja* $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ *uma função. Dizemos que* f *é integrável quando*

$$\lim_{n\rightarrow\infty} \underline{S}(f,P) = \lim_{n\rightarrow\infty} \overline{S}(f,P)$$

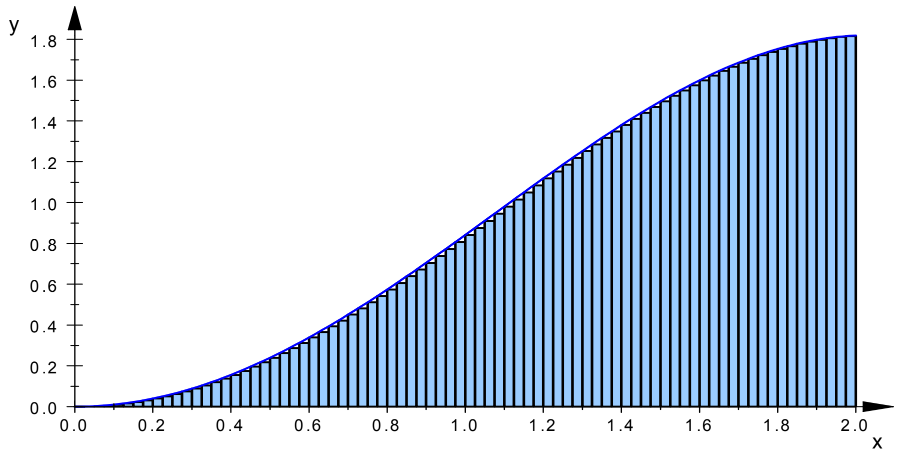


Figura 1.8: Gráfico de $\underline{S}(f, P)$, P com 84 pontos. $A = 1,718$

ou seja

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

nesse caso, denotamos por

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\chi)(x_i - x_{i-1}) \ \textit{onde}\ \chi \in [x_i - x_{i-1}]$$

.

Observação 1. *Para calcular integrais definidas por definição serão usadas as seguintes somas*

i. $\underbrace{1 + 1 + 1 + ...1}_{n - vezes} = n$

ii. $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{(1+n)n}{2}$

iii. $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

iv. $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

v. $1^4 + 2^4 + 3^4 + ... + n^4 = \dfrac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}$

Exemplo 1.8. *Usando a definição de soma superior, encontre a área delimitada pelas curvas* $y = x^2 + 1$, $x = 0, x = 4$ *e* $y = 0$ *(sabendo que a função é integrável).*

Solução:

Tomamos então uma partição $P \in \; 0 \leq x \leq 4$. Seja $P(x_o, x_1, x_2, ...x_n)$, conforme ilustra a figura 1.9

$x^2 + 1$

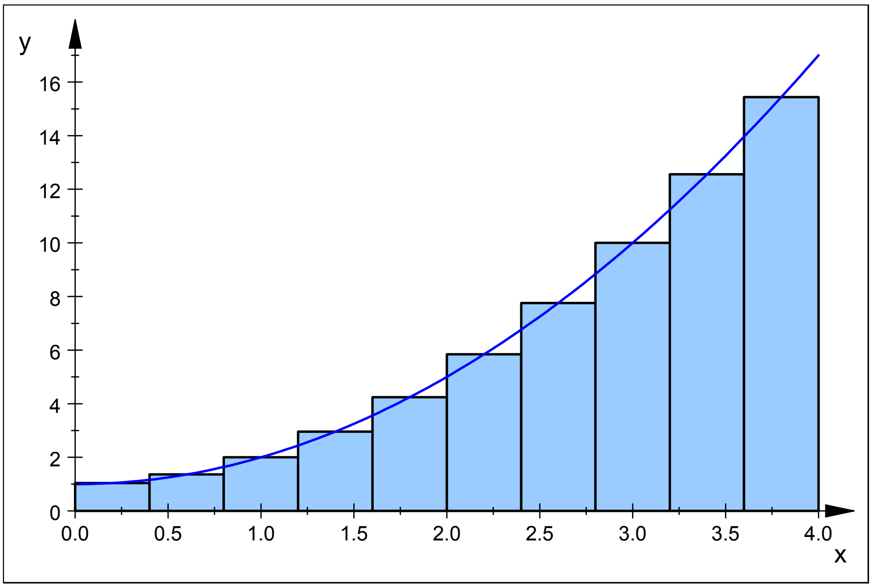


Figura 1.9: Soma superior

Como os subintervalos da partição podem ser quaisquer, podemos admitir que todos possuem o mesmo diâmetro, isto é, $\Delta x = \Delta x_1 = \Delta x_2 = ... = \Delta x_n$ e, portanto $\Delta x = \frac{4-(0)}{n} = \frac{4}{n}$de modo que podemos atribuir valores para cada $x_i \in P$ $x_o = 0$ $x_1 = \Delta x$, $x_2 = 2\Delta x, x_3 = 3\Delta x......, x_n = n\Delta x$

Seja $M_i = f(x_{i)}$ o supremo de f no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ Então a soma superior

$$\begin{aligned}
& \overline{S}(f,P) = M_1\Delta x + M_2\Delta x + M_3\Delta x + ... + M_n\Delta x \\
= \;& f(\Delta x)\Delta x + f(2\Delta x)\Delta x + f(3\Delta x)\Delta x + ... + f(nx)\Delta x \\
= \;& \Delta x[((\Delta x)^2+1) + ((2\Delta x)^2+1) + ((3\Delta x)^2+1) + ... + ((n\Delta x)^2+1) \\
= \;& \Delta x[1 + (\Delta x)^2 + (1+4\Delta x^2) + (1+9\Delta x^2) + ... + ((1+n^2\Delta x^2) \\
= \;& \Delta x[n + \Delta x^2(1+2^2+3^2+...n^2)] \\
= \;& \Delta x[n + \Delta x^2(\frac{n(n+1)(2n-1)}{6})] \\
= \;& \frac{4}{n}[n + \left(\frac{4}{n}\right)^2(\frac{n(n+1)(2n-1)}{6})] \\
= \;& 4 + \frac{64}{6}\frac{(n+1)}{n}\frac{(2n-1)}{n} \\
= \;& 4 + \frac{64}{6}(1+\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n})
\end{aligned}$$

Logo $\int_0^4 (x^2+1)dx = \lim_{n\to\infty} 4 + \frac{64}{6}(1+\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n}) = 4 + \frac{64}{3} = \frac{76}{3}$

1.5. Propriedades das Integrais

Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções integráveis, então são válidas as seguintes propriedades:

i. Seja c uma constante então $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$.

ii. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.

iii. Se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$ então vale a desigualdade $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

iv. Se $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a,b]$, então $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$

v. Se f for contínua existe $c \in [a,b]$ tal que $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$

vi. Seja $c \in [a,b]$ então $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

vii. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.

Observação 2. *Até o momento não exigimos que a função seja contínua. Isso porque a condição de continuidade não é necessária para que uma função seja integrável. Daqui para frente só trabalharemos com funções contínuas. A integrabilidade de funções não contínuas não será objeto de nosso estudo.*

1.6. O Teorema Fundamental do Cálculo

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua integrável. Vamos fixar o limite inferior a e variar o limite superior. Definiremos a função

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

Caso $f(t)$ seja positiva $F(x)$ é numéricamente igual a área do trapezóide curvilíneo.

Teorema 1.9. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$, então a função $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ é primitiva da função f. Isto é*
$F'(x) = f(x)$. . Veja na figura 1.10.

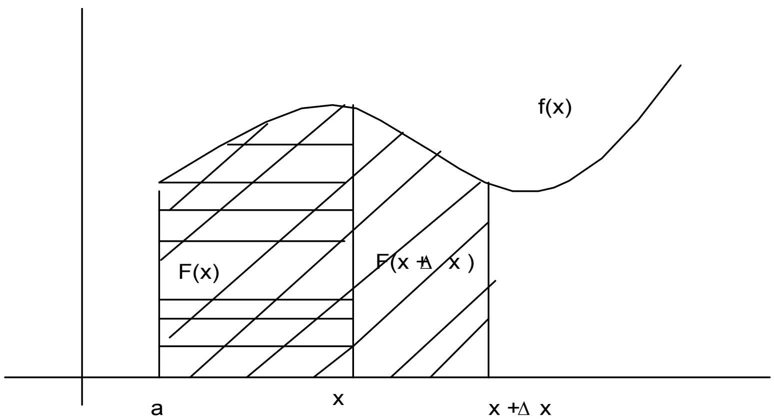


Figura 1.10: demonstração gráfica

Demonstração: Usaremos a definição de derivada para demonstrar o teorema.

$$
\begin{aligned}
F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{1}{\Delta x}[F(x+\Delta x) - F(x)] \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{1}{\Delta x}[\textstyle\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt] \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{1}{\Delta x}[\textstyle\int_a^{x} f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt] \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{1}{\Delta x} \textstyle\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt \\
&\ \text{pela propriedade V} \\
&\ \text{tem-se } \textstyle\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = f(c)\,\Delta x, \text{ portanto,} \\
F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{1}{\Delta x} f(c)\,\Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) \\
&\ \text{como } c \in [x, x+\Delta x] \\
&\ \text{se } \Delta x \to 0 \text{ então } c \to x. \text{ Logo,} \\
F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} &= f(x) \ \text{ ou seja} \\
&F'(x) = f(x)
\end{aligned}
$$

Uma consequência desse teorema é o corolário que segue:

Corolário 1.10. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ f for contínua no intervalo $[a,b]$, então $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivável em (a,b) e*

$$F'(x) = f(x)$$

A função $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ é denominada primitiva de $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Pelo teorema 1.9 toda função contínua num intervalo $[a,b]$ possui primitiva em $[a,b]$.

Teorema 1.11. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma contínua em $[a,b]$, tal que para todo $x \in [a,b]$ existe $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivável em (a,b) com $F'(x) = f(x)$ então*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Demonstração: Como f é contínua em $[a,b]$, existe $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, tal que

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Como

$$F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$$

segue que

$$F(x) = F(x) - 0 \text{ ou } F(x) = F(x) - F(a)$$

de modo que

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$$

para todo $x \in [a,b]$. Tomando $x = b$ tem-se :

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Trocando t por x vem:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x) - F(a)$$

A notação usual é

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\,|_a^b.$$

O teorema fundamental do cálculo permite que sejam determinadas as integrais definidas das funções contínuas em intervalos fechados sem usar o método visto para encontrar somas superiores e inferiores.

Exemplo 1.12. *Utilizando o teorema fundamental do cálculo, encontrar a área sob o gráfico de* $f : [1,5] \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = x^2$

Solução: Uma representação gráfica da função pode ser vista na figura 1.11

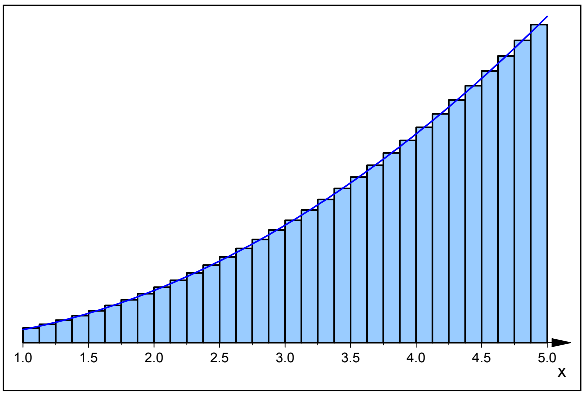


Figura 1.11: função quadrática

Pelo teorema $\int_a^b f(x)\,dx = F(x) - F(a)$, temos:

$$\int_1^5 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\,|_1^5 = \frac{124}{3}$$

:

Exemplo 1.13. *Calcule a área compreendida entre o eixo do x e a curva $f(x) = \frac{1}{8}(x^2 - 2x + 8)$ no intervalo de $[-2, 4]$.*

Solução: Uma representação gráfica pode ser visualizada na figura **??**

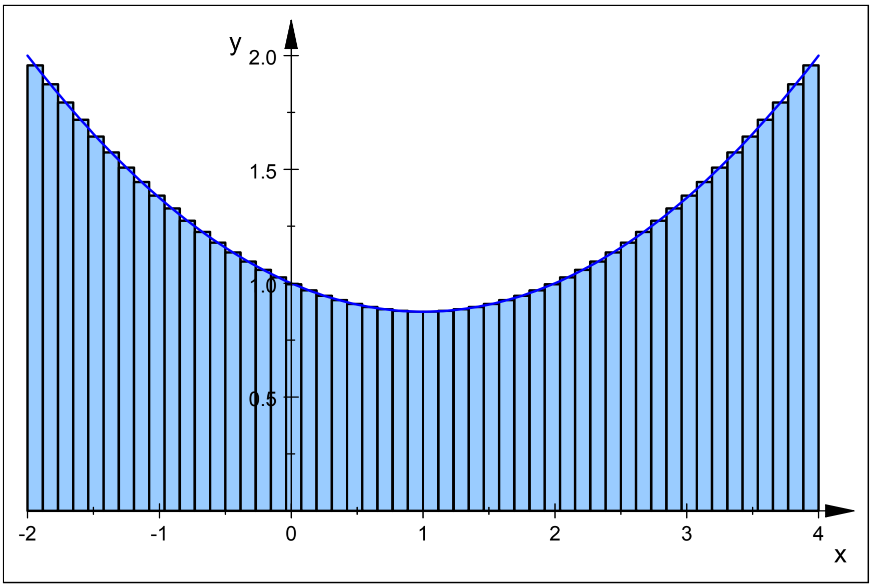


Figura 1.12:

Pelo teorema fundamental do cálculo

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

tem-se

$$= \frac{1}{8}\int_{-2}^{4}((x^2 - 2x + 8)dx$$

$$= \frac{1}{8}[\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + 8x] \uparrow_{-2}^{4}$$

$$= \frac{1}{8}[\frac{4^3}{3} - 2\frac{4^2}{2} + 8(4) - (\frac{(-2)^3}{3} - 2\frac{(-2)^2}{2} + 8(-2))]$$

$$= \frac{1}{8}[\frac{64}{3} - 16 + 32 + \frac{8}{3} + 4 + 16]$$

$$= \frac{1}{8}(60) = \frac{15}{2}ua$$

Exemplo 1.14. *Encontre o valor da área delimitada pelas curvas* $y = x^2$, $y = 2 - x^2$ *e* $y = 2x + 8$

Solução: Inicialmente vamos fazer uma representação gráfica, conforme ilustra a figura 1.13

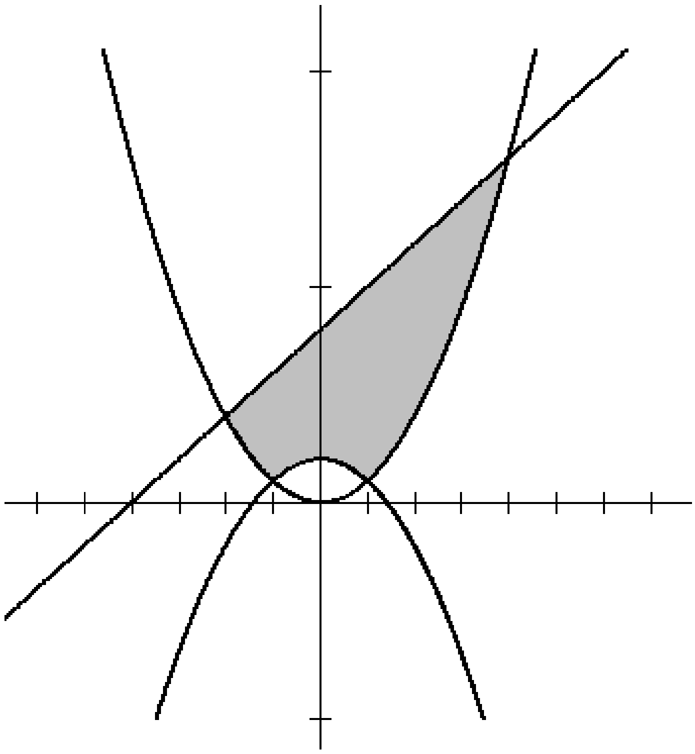


Figura 1.13: Área delimitada

Na sequência vamos encontrar as interseções das curvas

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x + 8 \end{cases}, \text{ Solução é: } [x = 4, y = 16], [x = -2, y = 4]$$

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2 - x^2 \end{cases}, \text{ Solução é: } [x = 1, y = 1], [x = -1, y = 1]$$

Vamos dividir a área em três partes

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

Onde

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_{-2}^{-1}[(2x+8)-(x^2)]dx = \int_{-2}^{-1}(2x+8-x^2)dx = \frac{8}{3}\\
A_2 &= \int_{-1}^{1}[(2x+8-(2-x^2)]dx = \int_{-1}^{1}(2x+6+x^2)dx = \frac{38}{3}\\
A_3 &= \int_{1}^{4}(2x+8-x^2)dx = 18\\
\text{logo } A &= A_1+A_2+A_3 = \frac{8}{3}+\frac{38}{3}+18 = \frac{100}{3}
\end{aligned}$$

Fórmulas Clássicas de Resolver Integal (Revisão)

Observação 3. *Vamos relembrar do cálculo I, algumas fórmulas clássicas do cálculo integral que permitem resolver uma série de problemas que envolvem o cálculo da integral.*

i. Mudança de variável

Teorema 1.15. *Sejam $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função contínua e $g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ uma função derivável tal que g' é integrável e $g([\alpha,\beta])\subset[a,b]$ e, além disso $g(\alpha)=a$ e $g(\beta)=b$. Então*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

Demonstração: Sejam $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função contínua e $g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ uma função derivável com g' integrável e $g([\alpha,\beta])\subset[a,b]$ com $g(\alpha)=a$ e $g(\beta)=b$. Então f possui uma primitiva $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ e, pelo teorema fundamental do cálculo, temos

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(g(\beta))-F(g(\alpha))$$

Por outro lado, pela regra da cadeia temos

$$(F\circ g)'(t) = F'(g(t))\,g'(t) = f(g(t))\,g'(t)$$

para todo $t\in[\alpha,\beta]$, consequentemente,

$$(F\circ g)(t):[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$$

é uma primitiva da função integrável $f(g(t))\,g'(t)$. Portanto,obtém-se:

$$\int_\alpha^\beta f(g(t))\,g'(t)\,dt = F(g(\beta))-F(g(\alpha)).$$

Exemplo 1.16. *Calcular a integral definida* $\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$ *usando o teorema 1.15*

Solução: Primeiro vamos encontrar a função $g(t)$.

Seja $t^2 = x - 1$, então podemos escrever $x = t^2 + 1$ e assim obtemos $g(t) = t^2 + 1$. A derivada de g é $g'(t) = 2t$.
Vamos determinar os valores de α e β. Sendo $g(\alpha) = a$ e $g(\beta) = b$ vem

$$\begin{array}{rcc}
g(\alpha) = a & e & g(\beta) = b \\
\alpha^2 + 1 = 1 & & \beta^2 + 1 = 5 \\
\alpha^2 = 0 & & \beta^2 = 4 \\
\text{donde vem } \alpha = 0 & e & \beta = 2
\end{array}$$

Na sequência determinaremos $f(g(t))$. Como $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x}$ vem

$$\begin{array}{lclc}
f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x} & ou & f(g(t)) = \frac{\sqrt{g(t)-1}}{g(t)} & \text{donde vem} \\
f(g(t)) = \frac{\sqrt{t^2+1-1}}{t^2+1} & \text{ou seja} & f(g(t)) = \frac{t}{t^2+1} &
\end{array}$$

Finalmente, podemos determinar o valor da integral.

$$\begin{aligned}
\text{como} \int_a^b f(x)\,dx &= \int_\alpha^\beta f(g(t))\,g'(t)\,dt \qquad \text{vem} \\
\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx &= \int_0^2 \left(\frac{t}{t^2+1}\right) 2tdt \\
&= 2\int_0^2 \frac{t^2}{t^2+1}dt \\
&= 2[\int_0^2 dt - \int_0^2 \frac{dt}{t^2+1}] \\
&= 2[t|_0^2 - arctgt|_0^2] \\
&= 2[2 - (arctg2 - arctg0)] \\
&= 2[2 - arctg2 - 0] \\
&= 4 - 2arctg2
\end{aligned}$$

ii. Integração por partes

Teorema 1.17. *Sejam* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *funções que possuem derivadas integráveis então*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = fg\,|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx \tag{1.1}$$

Na prática, costumamos fazer
$u = f(x) \Rightarrow du = f'(x)dx$
e
$v = g(x) \Rightarrow g'(x)dx$
substituindo em 1.1, vem:

$$\int_a^b udv = uv \mid_a^b - \int_a^b vdu$$

Exemplo 1.18. *Determine o valor da integral* $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 xdx$

Solução:
Nesse caso, fazemos:
$u = \sin^2 x \Rightarrow du = 2\sin x \cos xdx$
$dv = senxdx \Rightarrow v = \int senxdx = -\cos x$
Então,
$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 xdx = \sin^2 x(-\cos x) \mid_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} -\cos x(2\sin x \cos x)dx$
$= -\sin^2 x \cos x \mid_0^{\frac{\pi}{3}} +2 \mid_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x \sin xdx$
$= (-\sin^2 x \cos x - 2\frac{\cos^3 x}{3}) \mid_0^{\frac{\pi}{3}}$
$= -\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \frac{1}{2} - \frac{1}{12} + \frac{2}{3} = \frac{5}{24}$

iii. Teorema do valor médio para integrais

O teorema do valor médio para integrais equivale à propriedade V para integrais, isto é:

Se f for contínua existe $c \in [a, b]$ tal que $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,[b-a]$

Exemplo 1.19. *Uma vez que* $f(x) = x^2$ *é contínua no intervalo* $[1, 4]$, *o teorema do Valor Médio para Integrais garante exisitir um número* c *em* $\{1, 4]$, *tal que*

$$\begin{aligned} \int_1^4 x^2dx &= f(c)(4-1) = c^2(3) = 3c^2 \\ &\text{Mas} \\ \int_1^4 x^2dx &= \frac{x^3}{3} \mid_1^4 = 21 \text{ logo} \\ 3c^2 &= 21 \text{ ou } c = \pm\sqrt{7} \\ \text{Portanto, } c &= \pm\sqrt{7} \text{ é o número em } [1,4], \text{ cuja existência está garantida por } \mathbf{??} \end{aligned}$$

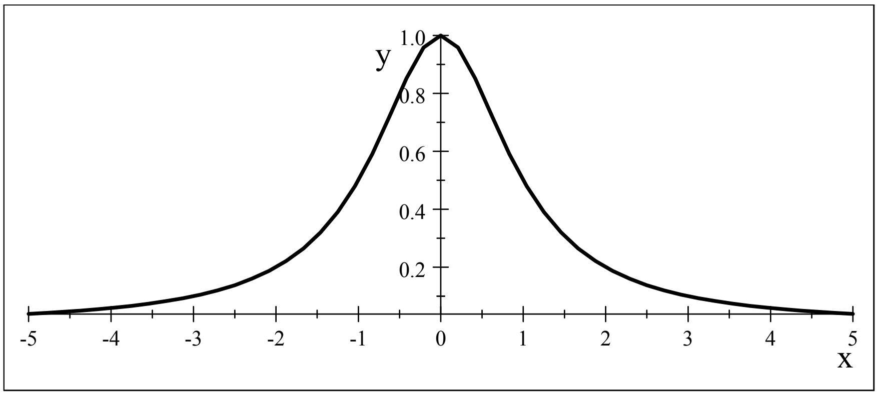
1.7. Integrais Impróprias

Definição 1.20. *Seja $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função contínua para todo $x \in [a, \infty)$, então vale a igualdade*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\, dx$$

se o limite $\lim\limits_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\, dx$ existir.

Exemplo 1.21. *Encontrar o valor numérico da integral $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$. Veja o gráfico de f na* **??**



$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Solução: Pela definição 1.20 temos

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{b \to \infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \to \infty} arctgx|_0^b \\
&= \lim_{b \to \infty} [arctgb - arctg0] \\
&= \lim_{b \to \infty} arctgb \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Definição 1.22. *Seja $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua para todo $x \in (-\infty, b]$, então vale a igualdade*

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\, dx$$

se o limite $\lim\limits_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\, dx$ existir.

Exemplo 1.23. *Encontrar o valor numérico da integral* $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx$.

Solução: Pela definição 1.22 temos

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} \tfrac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} \tfrac{1}{1+x^2} dx = \lim_{a \to -\infty} arctgx|_{a}^{0} \\
&= \lim_{a \to -\infty} [arctg0 - arctga] \\
&= - \lim_{a \to -\infty} arctga \\
&= -(-\tfrac{\pi}{2}) = \tfrac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Definição 1.24. *Seja* $f : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ *uma função contínua para todo* $x \in (-\infty, \infty)$, *então vale a igualdade*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{c} f(x)\, dx + \lim_{b \to \infty} \int_{c}^{b} f(x)\, dx$$

se os limites $\lim\limits_{a \to -\infty} \int_{a}^{c} f(x)\, dx$ *e* $\lim\limits_{b \to \infty} \int_{c}^{b} f(x)\, dx$ *existirem.*

Exemplo 1.25. *Encontrar o valor numérico da integral*$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$.

Solução: Pela definição 1.24 obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} \tfrac{1}{1+x^2} dx + \lim_{b \to \infty} \int_{0}^{b} \tfrac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \to \infty} arctgx|_{0}^{b} \\
&= \lim_{a \to -\infty} arctgx|_{a}^{0} + \lim_{b \to \infty} arctgx|_{0}^{b} \\
&= \lim_{a \to -\infty} [arctg0 - arctga] + \lim_{b \to \infty} [arctgb - arctg0] \\
&= - \lim_{a \to -\infty} arctga + \lim_{b \to \infty} arctgb \\
&= -(-\tfrac{\pi}{2}) + \tfrac{\pi}{2} = \pi
\end{aligned}$$

1.8. Integral de uma Função Descontínua num ponto c $\in [a,b]$

Definição 1.26. *Seja* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *uma função contínua no intervalo* $[a,b]$, *exceto no ponto* $c\in[a,b]$, *então*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to c^-}\int_a^\alpha f(x)\,dx + \lim_{\beta\to c^+}\int_\beta^b f(x)\,dx$$

se os limites $\lim\limits_{\alpha\to c^-}\int_a^\alpha f(x)\,dx$ *e* $\lim\limits_{\beta\to c^+}\int_\beta^b f(x)\,dx$ *existirem.*

Exemplo 1.27. *Encontrar o valor numérico da integral* $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$.

Observe a representação gráfica da função f na figura 1.14

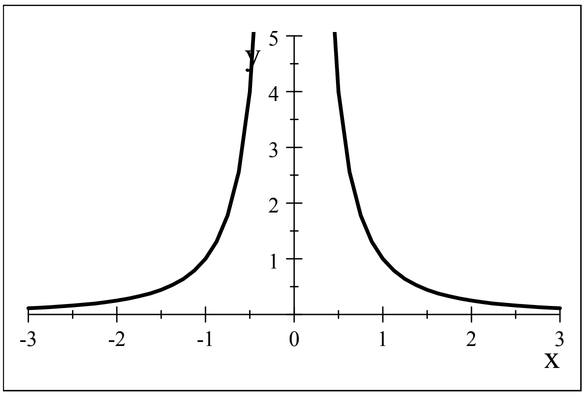


Figura 1.14: $f(x)=\frac{1}{x^2}$

Solução: A função $f(x)=\frac{1}{x^2}$ é contínua em todo ponto pertencente ao intervalo $[-1,1]$, exceto em $x=0$. Logo, pela definição 1.26 temos

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} &= \lim_{\alpha\to 0^-}\int_{-1}^\alpha \frac{dx}{x^2} + \lim_{\beta\to 0^+}\int_\beta^1 \frac{dx}{x^2}\\
&= \lim_{\alpha\to 0^-} -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^\alpha + \lim_{\beta\to 0^+} -\frac{1}{x}\Big|_\beta^1\\
&= \lim_{\alpha\to 0^-}\left[-\frac{1}{\alpha}-\left(\frac{-1}{-1}\right)\right] + \lim_{\beta\to 0^+}\left[-\frac{1}{1}-\left(\frac{-1}{\beta}\right)\right]\\
&= [\infty-1]+[-1+\infty]=\infty
\end{aligned}$$

Consequentemente, a função $f(x)=\frac{1}{x^2}$ não é integrável no intervalo $[-1,1]$.

Exercícios

1. Encontre, se existir, o valor de cada uma das integrais abaixo

$a)\int_0^1\left(x+\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$	$e)\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$	$i)\int_{-\infty}^1 e^x dx$	$m)\int_0^4\frac{xdx}{\sqrt{16-x^2}}$
$b)\int_1^2\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\sqrt[4]{x}\right)dx$	$f)\int_1^4\frac{xdx}{\sqrt{2+4x}}$	$j)\int_0^\infty xe^{-x}dx$	$n)\int_{-1}^1\frac{dx}{x^4}$
$c)\int_0^{\frac{\pi}{3}} tgxdx$	$g)\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{5-x}}$	$k)\int_1^\infty\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$	$o)\int_0^1\frac{dx}{x^3}$
$d)\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$h)\int_0^\infty e^{-x}dx$	$l)\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$	$p)\int_0^2\frac{dx}{x-1}$

2. Dadas as funções $f,g:[1,3]\to\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=x+2$ e $g(x)=x^2+x$ encontre $\overline{S}(f,P)$ e $\overline{S}(g,P)$.

3. Dada a função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=x^2+2$ encontre $\overline{S}(f,P)$.

4. Seja $f:[0,1)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Verifique se $\int_0^1 f(x)\,dx$ existe.

5. Seja $f:(-\infty,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$. Verifique se$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ existe.

1.9. Aplicações da Integral Definida

Cálculo da área em coordenadas retangulares

Se a função $f(x)$ for não negativa, isto é, $f(x)\geq 0$ no intervalo $[a,b]$, então a área da figura limitada pelas curvas $x=a$, $x=b$, $y=0$ e $y=f(x)$ é dada por

$$A=\int_a^b f(x)\,dx$$

Por outro lado, se a função $f(x)$ for negativa, isto é, $f(x)<0$ no intervalo $[a,b]$, então a área da figura limitada pelas curvas $x=a$, $x=b$, $y=0$ e $y=f(x)$ é dada por

$$A=-\int_a^b f(x)\,dx \text{ ou } A=\int_b^a f(x)\,dx$$

Exemplo 1.28. *Encontrar a área sob o gráfico da função* $f(x)=2x$ *no intervalo* $[-2,2]$.

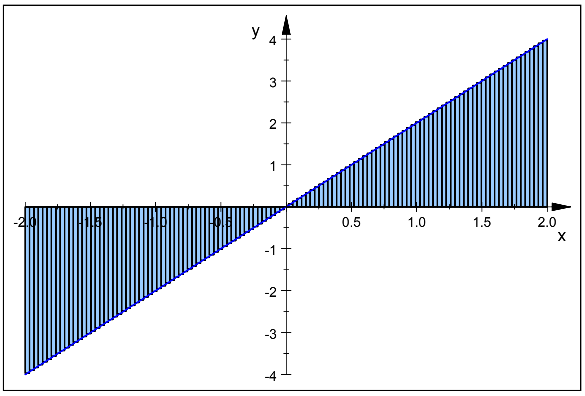


Figura 1.15: $f(x) = 2x$

Solução: a representação gráfica de f pode ser observada na figura 1.15

Essa função tem imagem negativa no intervalo $[-2, 0]$ e não negativa no intevalo $[0, 2]$. Desse modo, devemos proceder como segue:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{2} 2x dx \\
&= -\int_{-2}^{0} 2x dx + \int_{0}^{2} 2x dx \\
&= -x^2|_{-2}^{0} + x^2|_{0}^{2} \\
&= -\left[(0)^2 - (-2)^2\right] + 2^2 - 0^2 \\
&- [-4] + 4 = 8ua
\end{aligned}
$$

Logo, a área sob o gráfico da função $f(x) = 2x$ no intervalo $[-2, 2]$ é 8 unidades de área.

Exemplo 1.29. *Achar a área da região delimitada pelos gráficos de* $y + x^2 = 6$ *e* $y + 2x = 3$

Solução: Vamos inicialmente fazer uma representação gráfica da área delimitada, conforme ilustra a figura 1.16

Encontrando a interseção do sistema $\begin{cases} y = 6 - x^2 \\ y = 3 - 2x \end{cases}$ temos: $6 - x^2 = 3 - 2x \Rightarrow$ $x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$ e portanto os pontos de interseção são $P_1 = (-1, 5)$ e $P_2 = (3, -3)$. Portanto a área é igual a área da parábola menos a área da reta no intervalo de [-1,3].

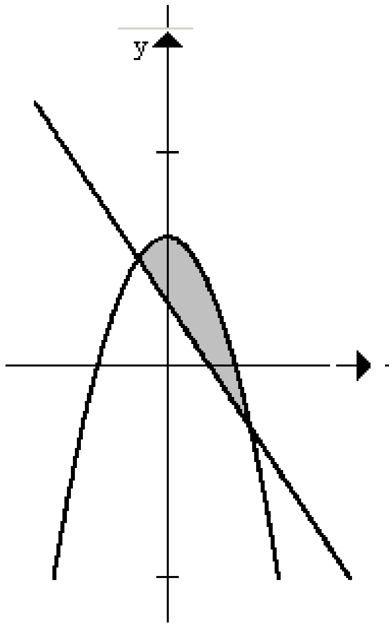


Figura 1.16: área delimitada

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{3} [(6 - x^2) - (3 - 2x)]dx \\
&= \int_{-1}^{3} (3 - x^2 + 2x)dx \\
&= 3x - \frac{x^3}{3} + x^2|_{-1}^{3} \\
&= 3.3 - \frac{27}{3} + 9 - (-3 + \frac{1}{3} + 1) = \frac{32}{3} \text{ u.a}
\end{aligned}
$$

Exemplo 1.30. *Calcular a área da região delimitada pelas curvas* $y = x^2$ *e* $y = \sqrt{x}$.

Solução: Nesse exemplo não foi especificado o intervalo em que está situada a região delimitada pelas curvas. Portanto, devemos determiná-lo. O intervalo fica determinado se conhecermos os pontos de interseção das curvas. Encontramos tais pontos resolvendo o sistema de equações $\begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$. É fácil ver que a solução vem da igualdade $x^2 = \sqrt{x}$ e os valores de x que tornam a sentença verdadeira são $x = 0$ e $x = 1$, desse modo a região delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$ fica determinada se $x \in [0, 1]$. Graficamente, podem ser observado na seqüência de figuras, a área sob o gráfico de $y = x^2$ no intervalo $[0, 1]$ (na figura 1.17), a área sob o gráfico de $y = \sqrt{x}$

$[0,1]$ (na figura 1.18), e a área da região delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$ no intervalo $[0,1]$ (na figura 1.19). Como podemos observar a área procurada é igual a diferença entre as áreas um e dois. Assim, temos

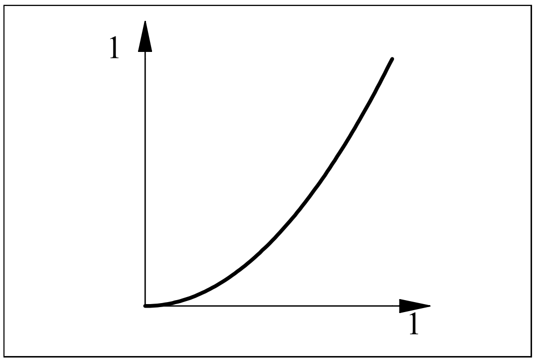


Figura 1.17: Área um

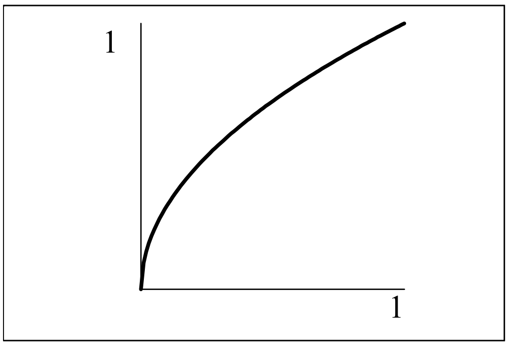


Figura 1.18: Área dois

$$
\begin{aligned}
&\text{Área procurada} = (\text{área dois}) - (\text{área um})\\
&A = \int_0^1 \sqrt{x}dx - \int_0^1 x^2 dx\\
&A = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx\\
&A = \tfrac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Logo, a área procurada é $A = \frac{1}{3}$.

Exemplo 1.31. *Calcule a área da região hachurada*

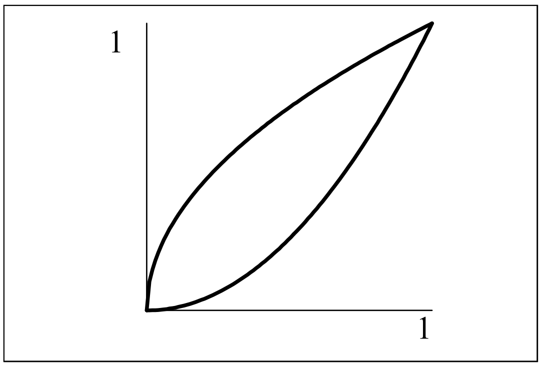
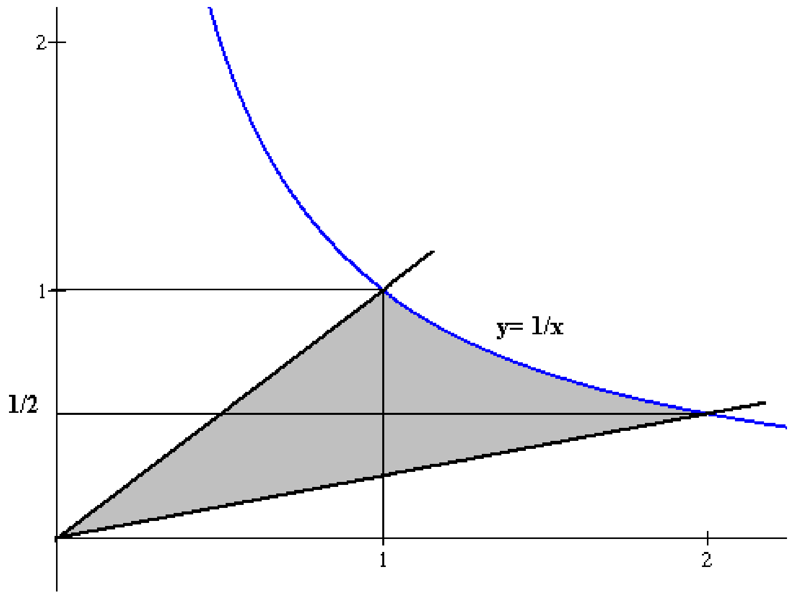


Figura 1.19: Área procurada



Solução:

Primeiro vamos identificar a lei que define as funções lineares presente no gráfico:

Uma reta passa pelos pontos (0,0) e (1,1) e a outra passa pelos pontos $(0,0)$ e $(2,\frac{1}{2})$, portanto as equações das retas são, respectivamente:

$y = x$

$y = \frac{1}{4}x$

Existem várias maneiras de calcular esta área, uma delas está apresentanda na sequência:

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^1 (x - \frac{1}{4}x)dx + \int_1^2 (\frac{1}{x} - \frac{1}{4}x)dx \\
A &= \frac{3}{4}\int_0^1 (x)dx + \int_1^2 (\frac{1}{x})dx - \frac{1}{4}\int_1^2 xdx \\
A &= \frac{3}{8}x^2 \mid_0^1 + (\ln|x| - \frac{1}{8}x^2) \mid_1^2 \\
A &= \frac{3}{8} + (\ln(2) - \frac{1}{2} - [\ln(1) - \frac{1}{8}]) \\
A &= \frac{4}{8} - \frac{1}{2} + \ln(2) = \ln(2)
\end{aligned}$$

Portanto, a área é igual a $A = \ln(2)$ u.a

Área delimitada por curvas escritas em equações paramétricas

Seja $y = f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$ que delimita uma região R. Se f for escrita em equações paramétricas dadas por exemplo, por $x = r\cos t$ e $y = rsent$, $t \in [\alpha, \beta]$ e podemos escrever $x = \phi(t)$ e $y = \psi(t)$, e, consequentemente, $a = \phi(\alpha)$ e $b = \psi(\beta)$. Desse modo, obtemos $dx = \phi'(t)dt$ e sendo $y = f(x)$, temos $f(x) = \psi(t)$. Assim, pelo teorema 1.15 vem:

Conforme vimos, a área de uma região retangular é dada por :

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b ydx$$

Fazendo a substituição $x = \psi(t)$ temos $dx = \phi'(t)dt$ obtendo em coordenadas paramétricas a fórmula para o cálculo de área como:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta \psi(t)\phi'(t)dt$$

Exemplo 1.32. *Encontrar a área da elipse* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, *definida pelas equações paramétricas* $\phi(t) = a\cos t$ *e* $\psi(t) = bsent$.

Solução: As equações paramétricas da elipse são

$$\phi(t) = a\cos t \text{ e } \psi(t) = bsent$$

.Desse modo, temos

$$\phi'(t) = -asentdt$$

Vamos determinar os valores de α e β. Sendo $\phi(\alpha) = 0$ e $\phi(\beta) = a$ vem

$$\phi(\alpha) = 0 \qquad e \qquad \phi(\beta) = a$$

$$a\cos\alpha = 0 \qquad a\cos\beta = a$$

$$\cos\alpha = 0 \qquad \cos\beta = 1$$

$$\text{donde vem } \alpha = \frac{\pi}{2} \quad e \qquad \beta = 0$$

Portanto, desse modo, obteremos a quarta parte da área da elipse. A área total será essa parcial multiplicada por quatro.

$$\begin{array}{lll}
\text{como } \int_a^b f(x)\,dx & = \int_\alpha^\beta \psi(t)\phi'(t)dt & \text{vem} \\
\int_a^b f(x)\,dx & = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 bsent(-asent)dt & \\
& = -4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^0 sen^2tdt & \\
& = \frac{4}{2}ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)\,dt & \\
& = 2ab\left(t - \frac{1}{2}sen2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} & \\
& = 2ab\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}sen2\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0\right) & \\
& = ab\pi &
\end{array}$$

Logo, a área da elipse é $A = ab\pi$

Exemplo 1.33. *Calcular a área interior a elipse* $E_1 = \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$ *e exterior a elipse* $E_2 = \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases}$

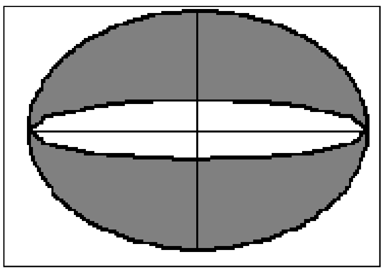


Figura 1.20:

$$A = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}[4\sin t(-2\sin t) - \sin t(-2\sin t)]dt$$

$$= 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (-8\sin^2 t + 2\sin^2 t)dt$$

$$= -4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} -6\sin^2 t dt =$$

$$= 24\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)dt$$

$$= 12(t - \frac{1}{2}\sin 2t) \mid_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 12\frac{\pi}{2} = 6\pi u.a$$

Área de um setor cuvilíneo em coordenadas polares

Seja $\rho = f(\theta)$ uma função contínua que descreve uma curva em coordenadas polares no intervalo $[\alpha, \beta]$. Como nosso interesse é determinar a área da região delimitada por $\rho = f(\theta)$ vamos tomar uma partição do intervalo $[\alpha, \beta]$, conforme ilustra a figura 1.21

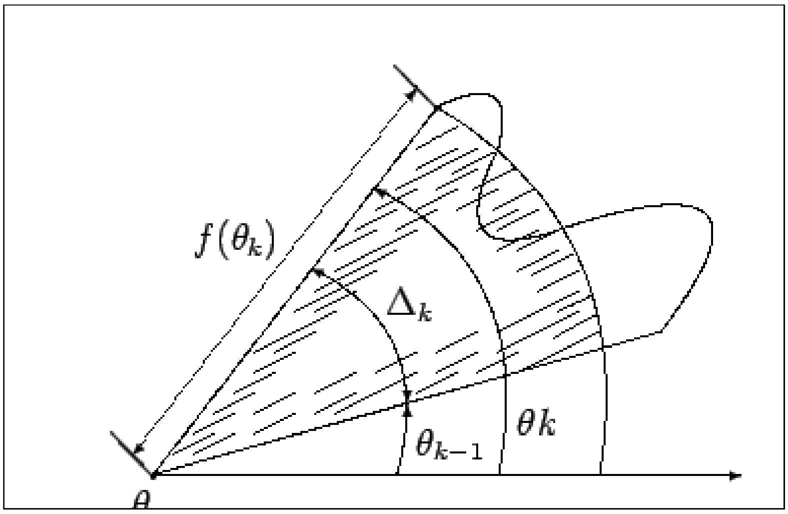


Figura 1.21: Área de um setor

Seja

$$X = \{\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, ...\theta_n\}$$

uma partição de $[\alpha, \beta]$ em que

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < .... < \theta_n = \beta$$

Sejam,

$$\Delta\theta_{1,}\Delta\theta_{2,}\Delta\theta_{3,}....\Delta\theta$$

os subarcos da partição. Seja ρ_i o comprimento do raio correspondente a um ângulo $\xi_i \in \Delta\theta$, isto é $\theta_{i-1} \leq \xi_i \leq \theta_i$.

A área do setor circular de raio ρ_i e arco $\Delta\theta_i$ é dada por

$$A_i = \frac{1}{2}(\rho_i)^2 \Delta\theta_i$$

e a área aproximada área da região delimitada por $\rho = f(\theta)$ é dada por

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(\rho_i)^2 \Delta\theta_i$$

Seja $|\Delta\theta|$ o subintervalo da partição X, de maior diâmetro. Então se n tende a infinito segue que $|\Delta\theta|$ tende a zero. Desse modo podemos escrever

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{|\Delta\theta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(\rho_i)^2 \Delta\theta_i = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\theta$$

ou

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\theta \tag{1.2}$$

Exemplo 1.34. *Ache a área exterior à cardióide $\rho = 1 - \cos\theta$ e interior ao círculo $\rho = 1$*

Solução: A figura 1.22 ilustra a área procurada

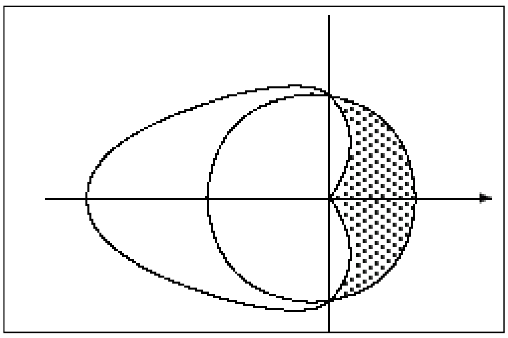


Figura 1.22: Área delimitada

A área é dada por 1.2

$$A = 2\frac{1}{2}\int .^{\frac{\pi}{2}}_{0} [(1)^2 - (1-\cos\theta)^2] d\theta$$

$$= \int \cdot_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos\theta - \cos^2\theta) d\theta$$

$$= \int \cdot_0^{\frac{\pi}{2}} [2\cos\theta - \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)] d\theta$$

$$= 2\sin\theta - \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 - \frac{\pi}{4}$$

Portanto, a área é igual $A = 2 - \frac{\pi}{4}$ u.a

Exemplo 1.35. *Escreva, em coordenadas polares, a integral que calcula a área exterior ao círculo $\rho = 1$ e interior a rosácea $\rho = 2\cos(2\theta)$*

Solução: a figura 1.23 ilustra a área delimitada

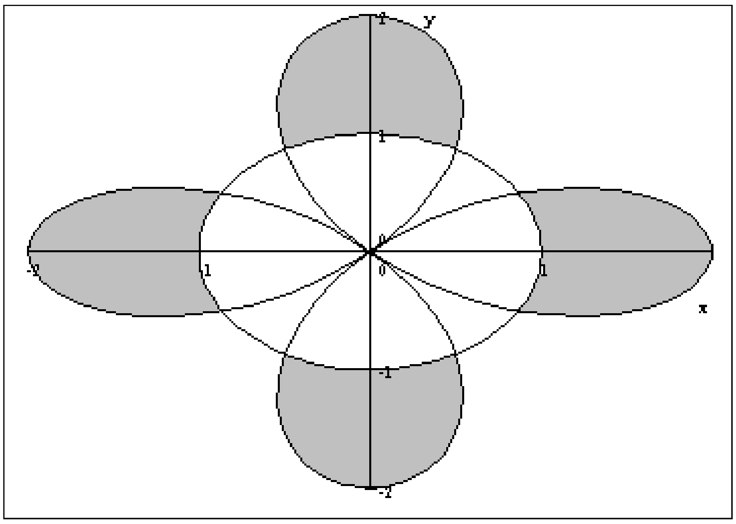


Figura 1.23: Área delimitada

Inicialmente, vamos determinar os pontos de interseção das duas curvas: $\begin{cases} \rho = 2\cos(2\theta) \\ \rho = 1 \end{cases}$, temos:

$$\begin{cases} 2\cos(2\theta) = 1 \\ \cos 2\theta = \frac{1}{2} \\ \theta = \frac{\pi}{6} \text{ (no I quad)} \end{cases}$$

Vamos calcular a área no intervalo de $[0, \frac{\pi}{6}]$ e multiplicar por 8, já que as demais são equivalentes. Utilizando a fórmula 1.2

e verificando que a área total é igual a área da rosácea menos a área do círculo obtemos:

$$A = 8.\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} [(2\cos(2\theta))^2 - (1)^2] d\theta$$

Comprimento de um arco

Seja $y = f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$ cujo gráfico descreve o arco $\widehat{AB}$, conforme ilustra a 1.24

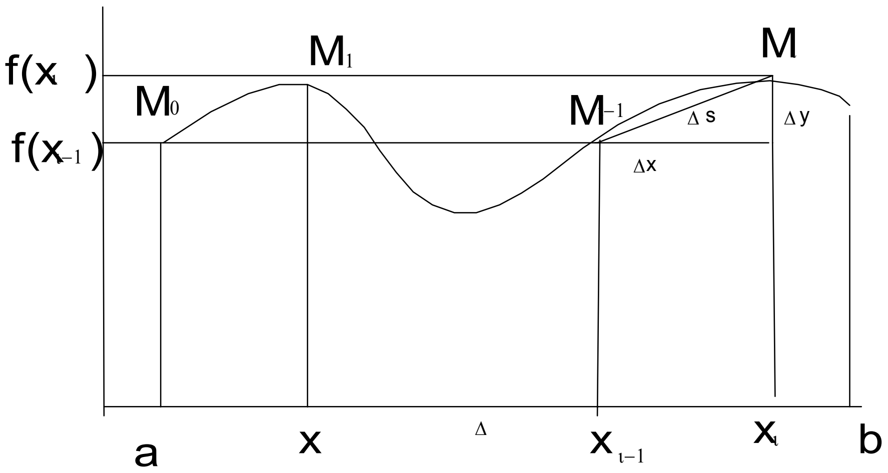


Figura 1.24: Comprimento de arco

Vamos dividir o arco $\widehat{AB}$ em subarcos por meio da partição

$$X = \{M_0, M_1, M_2, ..., M_n\}$$

em que

$$A = M_0 < M_1 < M_2 < ..... < M_n = B$$

e abscissas são

$$x_0, x_1, x_2, ..., x_n.$$

Tracemos as cordas

$$\overline{M_0M_1}, \overline{M_1M_2}, ..., \overline{M_{i-1}M_i}, ..., \overline{M_{n-1}M_n}$$

e designemos os seus comprimentos por

$$\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_i, ..., \Delta S_n.$$

Obtem-se então a linha poligonal

$$AM_0M_1, ..., M_{n-1}B$$

ao longo do arco $\widehat{AB}$ cujo comprimento aproximado é:

$$l_n = \Delta S_1 + \Delta S_2 + ... + \Delta S_i + ... + \Delta S_n$$

ou

$$l_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i.(I)$$

Mas ΔS_i é a hipotenusa do triângulo de lados Δx_i e Δy_i. de modo que podemos escrever

$$(\Delta S_i)^2 = (\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2$$

dividindo tudo por Δx_i vem

$$\left(\frac{\Delta S_i}{\Delta x_i}\right)^2 = \left(\frac{\Delta x_i}{\Delta x_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2$$

ou

$$\frac{\Delta S_i}{\Delta x_i} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}$$

ou seja

$$\Delta S_i = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\Delta x_i \text{ (II)}$$

Como

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \text{ e } \Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$$

segue que

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

e pelo teorema de Lagrange, existe $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i)$$

Portanto, obtemos $\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = f'(\xi_i)$ (III).

Agora substituindo (II) em (I) resulta

$$l_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\Delta x_i \text{ (IV)}$$

substuindo (III) em (IV)resulta

$$l_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\Delta x_i$$

Seja $|\Delta x|$ o intervalo de maior diâmetro de cada partição de $\widehat{AB}$. Então, se $n \to \infty$ segue que $|\Delta x| \to 0$ e $(\xi_i) \to x$. Assim:

$$l = \lim_{n\to\infty} l_n = \lim_{|\Delta x|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

Portanto, o comprimento do arco $\widehat{AB}$ no intervalo $[a, b]$ é dado por

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx \tag{1.3}$$

Exemplo 1.36. *Determinar o comprimento do arco na função* $y = \sqrt{x}$ *no intervalo* $[0, 4]$.

Solução: a figura 1.25 ilustra o comprimento de arco

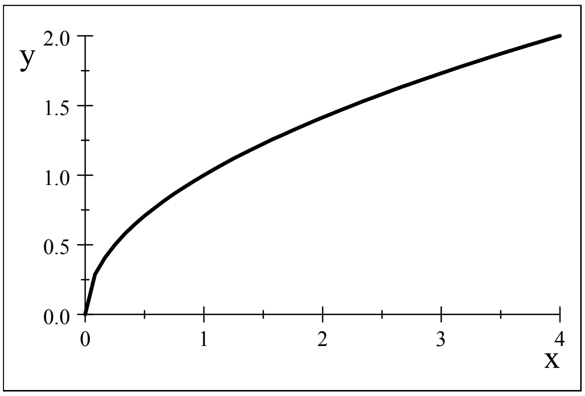


Figura 1.25: $f(x) = \sqrt{x}$

Sendo $y = f(x) = \sqrt{x}$ temos $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Assim, aplicando a fórmula 1.3 vem

$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$

$l = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}dx$

$l = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}dx$

$l = \int_0^4 \sqrt{\frac{4x+1}{4x}}dx$

$l = \frac{1}{2}\int_0^4 \frac{\sqrt{4x+1}}{\sqrt{x}}dx$

tendo $t^2 = x$ temos $dx = 2tdt$, $t \in [0, 2]$.

$l = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{\sqrt{4t^2+1}}{\sqrt{t^2}}2tdt = \int_0^2 \sqrt{4t^2+1}dt$

a primitiva de $\sqrt{4t^2+1}$é tabelada, logo

$l = \frac{1}{2}t\sqrt{4t^2+1} + \frac{1}{4}\ln\left(2t + \sqrt{4t^2+1}\right)|_0^2$

Cujo resultado é

$l = \sqrt{17} + \frac{1}{4}\ln\left(\sqrt{17} + 4\right)$

Comprimento de um arco em coordenadas paramétricas

Sejam $x = \phi(t)$ e $y = \psi(t)$ para $t \in [\alpha, \beta]$ as equações paramétricas de $y = f(x)$. Então, como $dx = \phi'(t)\,dt$, $dy = \psi'(t)\,dt$ e $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ podemos escrever:

$$f'(x) = \tfrac{dy}{dx}$$
$$f'(x) = \frac{\psi'(t)\,dt}{\phi'(t)\,dt} = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}$$

Substituindo na fórmula 1.3 vem

$$\begin{aligned}
l &= \textstyle\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx \\
l &= \textstyle\int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}\right)^2}\phi'(t)\,dt \\
l &= \textstyle\int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \frac{(\psi'(t))^2}{(\phi'(t))^2}}\phi'(t)\,dt \\
l &= \textstyle\int_\alpha^\beta \sqrt{\frac{(\phi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}{\phi'(t)^2}}\phi'(t)\,dt \\
l &= \textstyle\int_\alpha^\beta \frac{\sqrt{(\phi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}}{\phi'(t)}x'(t)\,dt \\
l &= \textstyle\int_\alpha^\beta \sqrt{(\phi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}dt
\end{aligned}$$

Portanto, o comprimento de arco em coordenadas paramétricas é dado por

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\phi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}dt \tag{1.4}$$

Exemplo 1.37. *Calcular o comprimento de arco da astróide dada por:*

$$\phi(t) = 3\cos^3 t$$

e

$$\psi(t) = 3sen^3 t.$$

Solução: Podemos encontrar o comprimento do subarco no primeiro quadrante e multiplicar o resultado por quatro. Como $\phi'(t) = -9\cos^2 sent$, $\psi'(t) = 9sen^2 t \cos t$ e $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ substituindo na fórmula 1.4 vem

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\phi'\left(t\right)\right)^2 + \left(\psi'\left(t\right)\right)^2}dt$$
$$l = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(-9\cos^2 t sent\right)^2 + \left(9sen^2 t\cos t\right)^2}dt$$
$$l = 4\cdot 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^4 t sen^2 t + sen^4 t\cos^2 t}dt$$
$$l = 36\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t sen^2 t\left[\cos^2 t + sen^2\right]}dt$$
$$l = 36\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t sent dt$$
$$l = 36\frac{sen^2 t}{2}|_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$l = 18uc$$

Portanto, o comprimento é $l = 18$ u.c

Exemplo 1.38. *As equações paramétricas do movimento de uma partícula no plano é dada por :*

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 2t^{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

Qual a distância percorrida pela partícula entre os instantes $t = 0$ e $t = 1$?

Solução:

Aplicando a fórmula 1.4

temos: $\begin{cases} \phi'(t) = 3 \\ \psi'(t) = (3t^{\frac{1}{2}}) \end{cases}$ logo, teremos:

$$\begin{aligned} l &= \int_0^1 \sqrt{3^2 + (3t^{\frac{1}{2}})^2}dt \\ l &= \int_0^1 \sqrt{9 + 9t}dt \\ l &= 3\int_0^1 \sqrt{1+t}dt \\ l &= 3\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}\ |_0^1 \\ l &= 2(2)^{\frac{3}{2}} - 2(1)^{\frac{3}{2}} = 4\sqrt{2} - 2 \text{ uc} \end{aligned}$$

Portanto, a distância percorrida pela partícula entre os instantes $t = 0$ e $t = 1$ é $l = 4\sqrt{2} - 2$ uc

Comprimento de arco em coordenadas polares

Sejam $\phi\left(t\right) = \rho\cos\theta$ e $\psi\left(t\right) = \rho sen\theta$ as coordenadas polares da curva $\rho = f\left(\theta\right)$, $\theta \in [\alpha, \beta]$. Então, substituindo ρ por $f\left(\theta\right)$ nas equações paramétricas vem

$\phi\left(\theta\right) = f\left(\theta\right)\cos\theta$ e $\psi\left(\theta\right) = f\left(\theta\right)sen\theta$
donde vem
$\phi'\left(\theta\right) = f'\left(\theta\right)\cos\theta - f\left(\theta\right)sen\theta$ ou $\phi'\left(\theta\right) = \rho'\cos\theta - \rho sen\theta$
$\psi'\left(\theta\right) = f'\left(\theta\right)sen\theta + f\left(\theta\right)\cos\theta$ ou $\psi'\left(\theta\right) = \rho' sen\theta + \rho\cos\theta$
Agora
$\left(\phi'\left(t\right)\right)^2 + \left(\psi'\left(t\right)\right)^2 = \left(\rho'\cos\theta - \rho sen\theta\right)^2 + \left(\rho' sen\theta + \rho\cos\theta\right)^2$
Resolvendo os produtos notáveis e simplificando obtemos
$\left(\phi'\left(t\right)\right)^2 + \left(\psi'\left(t\right)\right)^2 = \left(\rho'\right)^2 + \rho^2$

Substituindo na equação 1.4 obtemos a fórmula para o cálculo do comprimento de arco em coordenadas polares dada por

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\rho'\right)^2 + \rho^2}d\theta \tag{1.5}$$

Exemplo 1.39. *Encontrar o comprimento de arco do cardióide $\rho = a\left(1 + \cos\theta\right)$.*

Solução: Podemos determinar o comprimento do arco no primeiro e segundo quadrante e multipicar por dois. Como $\rho = a\left(1 + \cos\theta\right)$ tem-se $\rho' = -asen\theta$. Substituindo na fórmula 1.5 vem

$$\begin{aligned}
&l = \textstyle\int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\rho'\right)^2 + \rho^2}d\theta \\
&l = 2\textstyle\int_0^\pi \sqrt{\left(-asen\theta\right)^2 + \left(a\left(1 + \cos\theta\right)\right)^2}d\theta \\
&l = 2a\textstyle\int_0^\pi \sqrt{sen^2\theta + 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta}d\theta \\
&l = 2a\textstyle\int_0^\pi \sqrt{2 + 2\cos\theta}d\theta \\
&l = 2a \cdot 2\textstyle\int_0^\pi \cos\frac{\theta}{2}d\theta \\
&l = 4a \cdot 2\sin\tfrac{1}{2}\theta|_0^\pi \\
&l = 8a\ uc
\end{aligned}$$

Logo, o comprimento de arco do cardióide $\rho = a\left(1 + \cos\theta\right)$ é $l = 8a\ uc$.

Exemplo 1.40. *Mostre, usando coordenadas paramétricas, que o comprimento de uma circunferência de raio r é $2\pi r$.*

Solução:

Em paramétrica, a circunferência é representada por:
$$\begin{cases} x(t) = r\cos t \\ y(t) = r\sin t \end{cases}$$

O comprimento de arco em paramétrica é $l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$
Usando a simetria temos:

$$\begin{aligned}
l &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2}dt \\
l &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2(\sin^2 t + \cos^2 t)}dt \\
l &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} rdt \\
l &= 4rt \mid_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi r
\end{aligned}$$

Logo o comprimento da circunferência é $2\pi r$.

1.10. Volume de um sólido de revolução

Considere o sólido T gerado pela rotação da curva $y = f(x)$ em torno do eixo x no intervalo $[a, b]$. (ver figura 1.26)

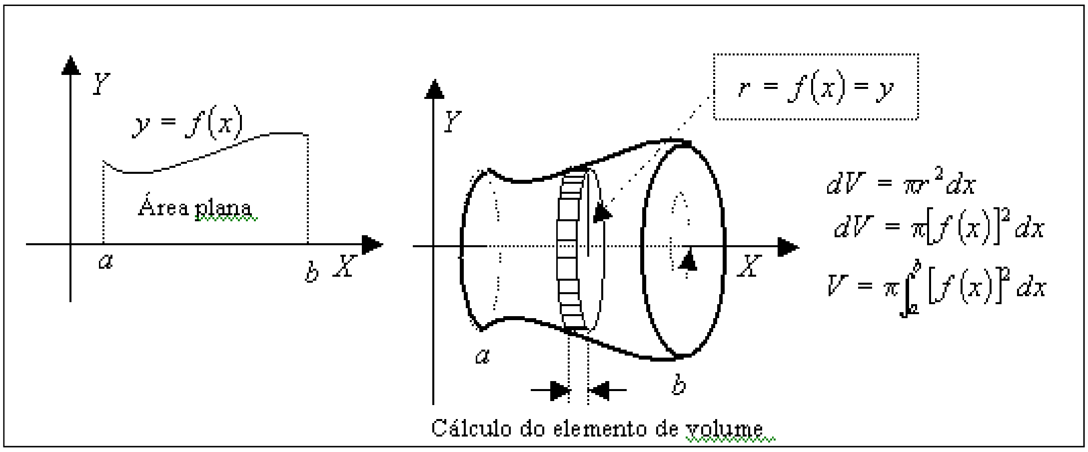


Figura 1.26: Rotação de uma curva em torno do eixo x

Demonstração: Seja

$$P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$$

uma partição do intervalo $[a, b]$ e sejam

$$\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$$

os subintervalos da partição. Seja $\xi_i \in \Delta x_i$, então o volume do cilindro de raio $f(\xi_i)$ comprimento Δx_i é dado por

$$V_i = \pi \left[f(\xi_i)\right]^2 \Delta x_i$$

e o volume aproximado do sólido será dado pela soma dos volumes dos $n - cilindros$, isto é,

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \pi \left[f(\xi_i)\right]^2 \Delta x_i$$

Seja $|\Delta\theta|$ o subintervalo de maior diâmetro, então se $n \to \infty$ segue que $|\Delta\theta| \to 0$, $\xi_i \to x$ e o volume V do sólido T será dado por

$$V = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{|\Delta\theta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi \left[f(\xi_i)\right]^2 \Delta x_i = \pi \int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx$$

Portanto, o volume de um sólido de revolução no intervalo $[a, b]$ é dado pela fórmula:

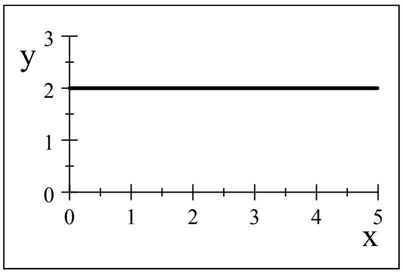
$$V = \pi \int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx \tag{1.6}$$

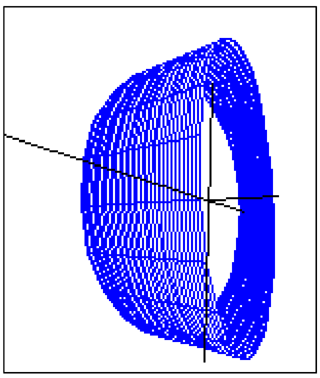
Exemplo 1.41. *A fim de que não haja desperdício de ração e seus animais estejam bem nutridos, um fazendeiro construiu um recipiente (conforme figura 1.27) com uma pequena abertura na parte inferior, que permite a reposição automática da alimentação, conforme mostra a figura abaixo. Determine, usando sólido de revolução, a capacidade total de armazenagem do recipiente, em metros cúbicos.*

Vamos encontrar o volume do cilindro e do cone

$$V = V_1 + V_2$$

Vamos rotacionar a reta $y = 2$ em torno do eixo x





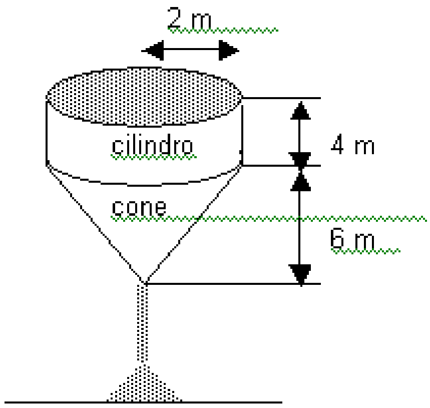
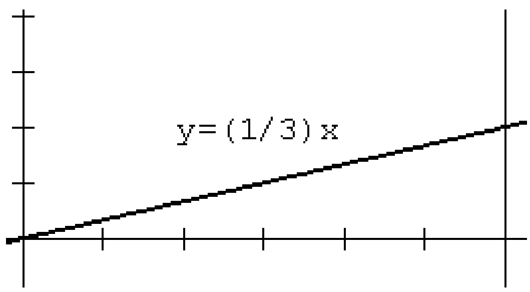
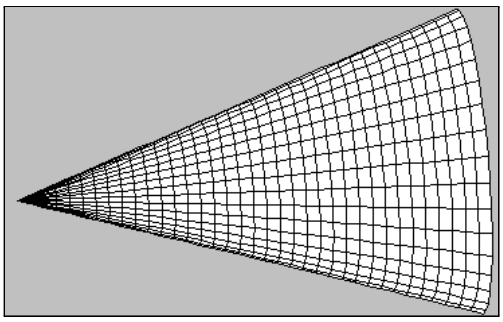


Figura 1.27:

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_0^4 2^2 dx \\ V_1 &= 4\pi 4 = 16\pi \end{aligned}$$

como temos um raio igual a $r = 3$ e $h = 6$ para o cone, obtemos a reta $y = \frac{1}{3}x$ para rotacionar em torno do eixo x





$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \int_0^6 \left(\frac{1}{3}x\right)^2 dx \\ V_2 &= \frac{1}{27}\pi x^3 \;|_0^6 = \frac{6^3}{27}\pi = 8\pi \\ \text{portanto o } V &= 16\pi + 8\pi = 24\pi \text{ uv} \end{aligned}$$

Exemplo 1.42. *Calcule o volume do sólido gerado pela rotação da curva $f(x) = x^3$, no intervalo [1,2].*

Resolução : Observe a figura 1.28

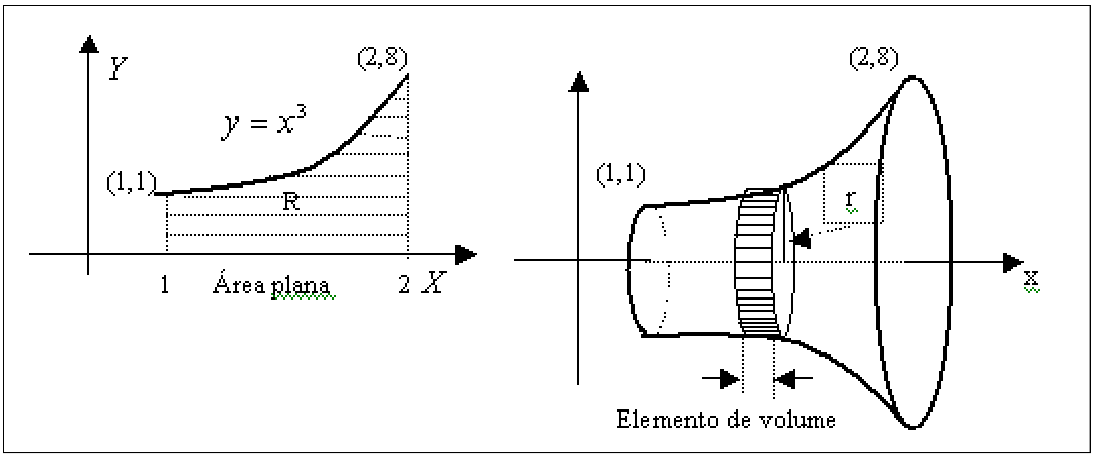


Figura 1.28: fonte:Pilchowski (2004)

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

$$V = \pi \int_1^2 \left[x^3\right]^2 dx$$

$$= \pi \int_1^2 x^6 dx$$

$$= \pi \frac{x^7}{7} \Big|_1^2$$

$$= \pi[\frac{2^7}{7} - \frac{1}{7}] = \frac{127\pi}{7} u.v$$

Portanto, o volume é $V = \frac{127\pi}{7} u.v$

Exemplo 1.43. *Determinar o volume do sólido de revolução gerado pela região delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = x + 2$ em torno do eixo x.*

ver figura 1.29

Solução: Nesse exemplo não foi especificado o intervalo em que está situada a região delimitada pelas curvas. Portanto, devemos determiná-lo. O intervalo fica determinado se conhecermos os pontos de interseção das curvas. Encontramos tais pontos resolvendo o sistema de equações $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases}$. É fácil ver que a solução vem

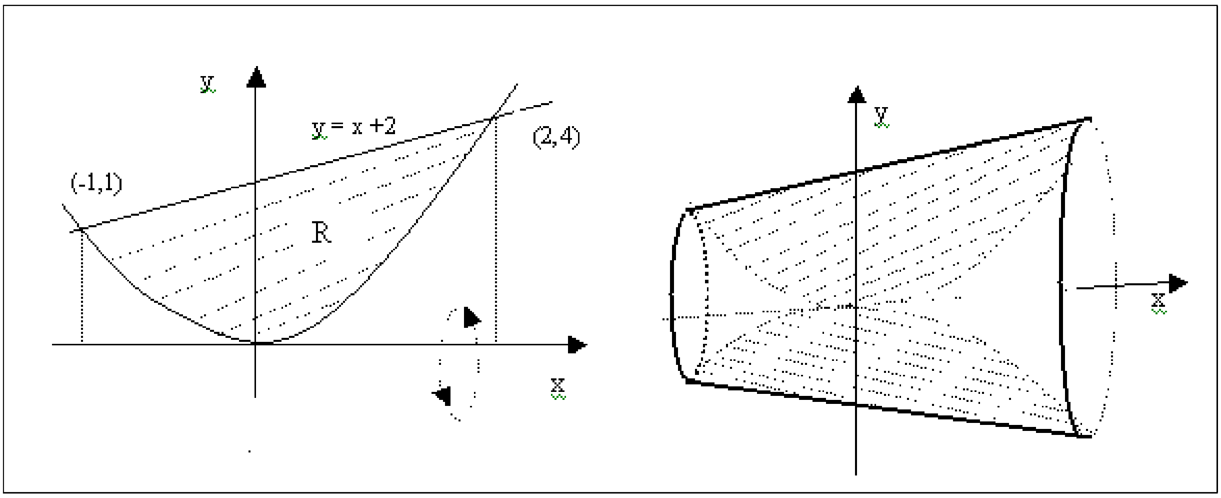


Figura 1.29: fonte:Pilchowski (2004)

da igualdade $x^2 = x + 2$ e os valores de x que tornam a sentença verdadeira são $x = -1$ e $x = 2$.

Aplicado a fórmula 1.6 vem:

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-1}^{2} [x+2]^2 \, dx - \pi \int_{-1}^{2} [x^2]^2 \, dx \\
V &= \pi \left(\int_{-1}^{2} (x^2 + 4x + 6 - [x^4]) \, dx \right) \\
V &= \pi \left(\int_{-1}^{2} (-x^2 + 4x + 6 - x^4) \, dx \right) \\
V &= \pi \left(-\tfrac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 6x - \tfrac{1}{5}x^5 \right) |_{-1}^{2} \\
V &= \pi \left(\tfrac{72}{5} \right) uv
\end{aligned}
$$

Logo, o volume do sólido de revolução gerado pela região delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = x + 2$ em torno do eixo x é

$$V = \frac{72}{5} \pi uv.$$

Exemplo 1.44. *Encontre o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da curva $(x-2)^2 + y^2 = 1$ em torno do eixo y.*

Solução: Observe a figura 1.30 que representa a circunferência deslocada da origem.

Isolando a variável x em $(x-2)^2 + y^2 = 1$, vem:
$(x-2)^2 = 1 - y^2$

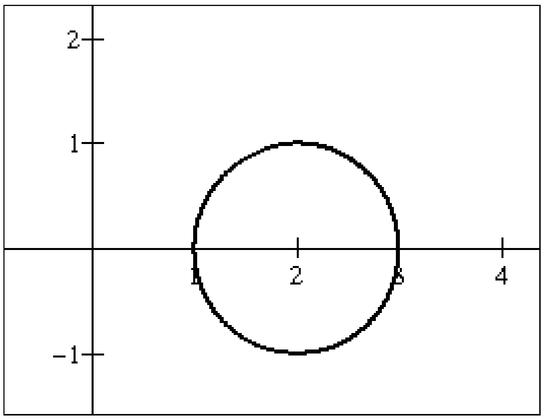


Figura 1.30: $(x-2)^2+y^2=1$

$x=\pm\sqrt{1-y^2}+2$

Observe que o volume do sólido de revolução é formado pela rotação da curva $x=\sqrt{1-y^2}+2$ em torno do eixo y menos o volume formado pela rotação da curva $x=-\sqrt{1-y^2}+2$. Portanto, o volume é igual a $V=V_1-V_2$

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_a^b [f(y)]^2 dy \\
V &= V_1-V_2 \\
\text{onde } V_1 &= \pi\int_{-1}^{1}(\sqrt{1-y^2}+2)^2 dy \text{ e } V_2=\int_{-1}^{1}(-\sqrt{1-y^2}+2)^2 dy \\
\text{portanto temos } V &= \int_{-1}^{1}[(\sqrt{1-y^2}+2)^2-(-\sqrt{1-y^2}+2)^2]dy \\
V &= \int_{-1}^{1} 8\sqrt{1-y^2}dy \\
\text{Fazendo } y &= sen\theta \rightarrow dy=\cos\theta do \\
V &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 8\sqrt{1-sen^2\theta}\cos\theta d\theta \\
&= 8\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta \\
&= 4(1+\cos 2\theta)d\theta \\
&= 4(\theta+\frac{\sin 2\theta}{2})\mid_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 4(\frac{\pi}{2}-(\frac{-\pi}{2}))=4\pi
\end{aligned}
$$

Portanto, o volume é dado por $V=4\pi$ u.v

Área de um sólido de revolução

Considere o sólido T gerado pela rotação da curva $y = f(x)$ em torno do eixo x no intervalo $[a, b]$. Seja a partição

$$X = \{M_0, M_1, M_2, ..., M_n\}$$

do arco $\widehat{AB}$ em que

$$A = M_0 < M_1 < M_2 < ..... < M_n = B$$

e abscissas são $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$. designemos por ΔS_i o comprimento das cordas $\overline{M_{i-1}M_i}$. Cada ΔS_i, rotacionando em torno do eixo x gera um tronco de cone cujo raio da base menor é $f(x_{i-1})$ da base maior é $f(x_i)$. A área em torno do cone é dada aproximadamente pelo produto do comprimento da secção mediana do tronco pela geratriz, conforme ilustra a figura 1.31.

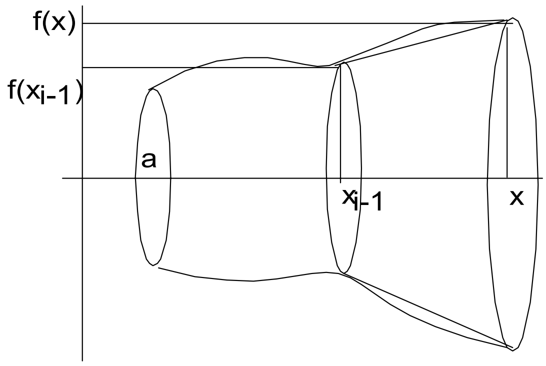


Figura 1.31: Área de um sólido de revolução

Na figura 1.32 podemos observar a área lateral do tronco de cone aberta sobre uma região plana.

Note que podemos formar um retângulo de comprimento r e altura ΔS_i. A área desse retângulo é $A_i = r\Delta S_i$.

Porém,

$$r = \frac{2\pi f(x_i) + 2\pi f(x_{i-1})}{2} = \pi [f(x_i) + f(x_{i-1})].$$

Portanto, segue que

$$A_i = \pi [f(x_i) + f(x_{i-1})] \Delta S_i$$

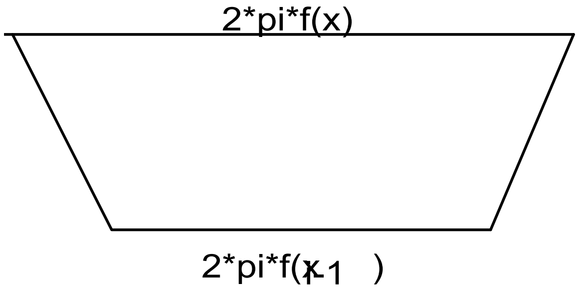


Figura 1.32: Área lateral do tronco de cone

Vimos anteriormente que

$$\Delta S_i = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\Delta x_i.$$

Assim, teremos

$$A_i = \pi\left[f\left(x_i\right) + f\left(x_{i-1}\right)\right]\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\Delta x_i.$$

Como há n-subdivisões, há n-tronco de cones inscritos no sólido T , de modo que a área total aproximada é dada por

$$A_n = \sum_{i=1}^{n}\pi\left[f\left(x_i\right) + f\left(x_{i-1}\right)\right]\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\Delta x_i.$$

Embora esta soma não seja uma integral porque não está em função de um único ponto ξ_i é possível mostrar que:

$$A = 2\pi\int_a^b f\left(x\right)\sqrt{1 + \left(f'\left(x\right)\right)^2}dx \tag{1.7}$$

Exemplo 1.45. *Determinar a área lateral da figura de revolução gerada pela função* $f\left(x\right) = 2x$ *no intervalo* $[0, 4]$.

Solução: Aplicando a fórmula 1.7 vem

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$
$$A = 2\pi \int_0^4 2x\sqrt{1 + 2^2} dx$$
$$A = 2\pi\sqrt{5} \int_0^4 2x dx$$
$$A = 2\pi\sqrt{5} x^2|_0^4$$
$$A = 32\pi\sqrt{5} ua$$

Portanto, a área lateral da figura de revolução gerada pela função $f(x) = 2x$ no intervalo $[0, 4]$ é $A = 32\pi\sqrt{5}ua$.

Exemplo 1.46. *O disco $x^2 + (y-1)^2 \leq 1$ rotaciona em torno do eixo x dando origem a um sólido. Calcule a área deste sólido.*

Solução: a figura 1.33 ilustra a rotação do disco em torno do eixo x

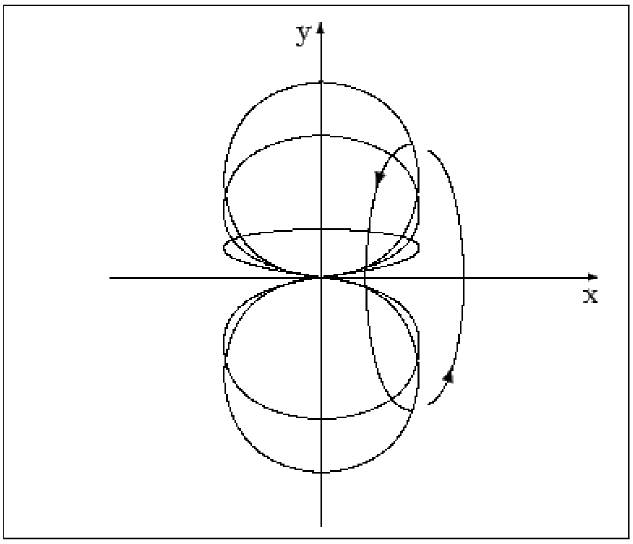


Figura 1.33: Rotação de um disco

Podemos visualizar a superfície como a resultante da rotação de dois arcos descritos a seguir, conforme ilustra a figura 1.34

$$A = A_1 + A_2$$

$$A = 2\pi[\int_{-1}^{1} (1 + \sqrt{1 - x^2}) \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx + \int_{-1}^{1} (1 - \sqrt{1 - x^2}) \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx]$$

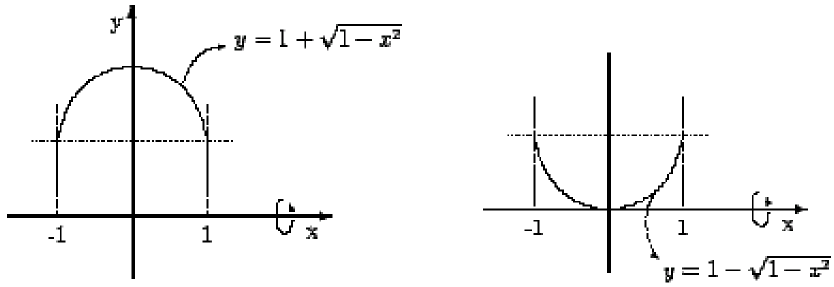


Figura 1.34: rotação dos dois arcos

$$A = 2\pi[\int_{-1}^{1}(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(1+\sqrt{1-x^2}+1-\sqrt{1-x^2})dx$$

$$= 2\pi\int_{-1}^{1}(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}})dx = 4\pi\int_{-1}^{1}(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})dx$$

fazendo $x = \cos\theta \rightarrow dx = -sen\theta d\theta$
temos então:

$$A = 4\pi\int_{\pi}^{0} -\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}d\theta$$

$$= 4\pi\int_{0}^{\pi} d\theta = 4\pi^2$$

Portanto, a área é de $4\pi^2 u.a$

1.11. Exercícios Gerais

1. Usando a definição de integral definida encontre o valor numérico de $\int_0^4 [4 - x^2]dx$

2. Determine o valor das seguintes integrais, se possível.

    1. $\int_1^{\sqrt{2}} xe^{-x^2} dx$
    2. $\int_{-1}^{1} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3+9}}$
    3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \sec^2 x dx$
    4. $\int_0^1 x \sin x dx$
    5. $\int_{-\infty}^{0} xe^x dx$
    6. $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx.$

3. Interpretar graficamente (desenhar e sombrear) a área que a integral abaixo calcula:

$$A = \int_0^2 [(y+6) - (\sqrt{4-y^2})]dy$$

4. Encontre a área da região limitada pelas curvas:

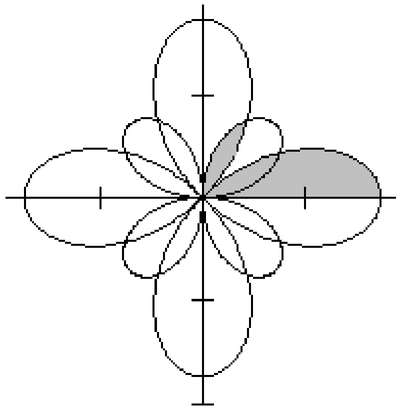
    1. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$ $[R = 2\sqrt{2} - 2]$
    2. $y - x = 6$, $y - x^3 = 0$ e $2y + x = 0$. $[R = 22u.a]$
    3. $y = -x^2 + 9$ e $y = 3 - x$. $[R = \frac{125}{6} u.a]$
    4. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. $[R = \frac{3\pi a^2}{8}]$
    5. $\rho = 2(1 + \sin\theta)$ e $\rho = 2(1 + \cos\theta)$.
    6. $28 - y - 5x = 0$, $x - y - 2 = 0$, $y = 2x$ e $y = 0$.

5. Calcular a área comum aos seguintes pares de curvas:

    1. $\rho = 3\cos\theta$ e $\rho = 1 + \cos\theta$;
    2. $\rho = 1 + \cos\theta$ e $\rho = 2$;$[R = \frac{3\pi}{2}]$
    3. $\rho = sen\theta$ e $\rho = 1 - \cos\theta$;$[R = \frac{1}{2}(\pi - 2)]$
    4. $\rho^2 = \cos 2\theta$ e $\rho^2 = sen 2\theta$; $[R = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}]$

6. Encontrar a área interior ao círculo $\rho = 6\cos\theta$ e exterior a $\rho = 2(1 + \cos\theta)$.

7. Escreva a integral que permite calcular a área sombreada $\begin{cases} \rho = \sin 2\theta \\ \rho = \sqrt{3}\cos 2\theta \end{cases}$



8. Determinar o comprimento das curvas $\rho = a\cos\theta$

9. Encontre o comprimento das curvas que limitam a região formada pela interseção das curva $\rho = \sqrt{3}sent$ e $\rho = 3\cos t$ no primeiro quadrante.

10. Mostre, em coordenadas paramétricas, que o comprimento de uma circunferência de raio r é $2\pi r$.

11. Determinar o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da curva $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} = 1$ em torno do eixo x.$[R = \frac{4\pi ab^2}{3}]$

12. Determinar o volume do toro gerado pela rotação do círculo de equação $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ em torno do eixo x.

13. Encontre o volume delimitado pela rotação das funções $y = -x^2 + 9$ e $y = 3 - x$ em torno do eixo x

14. Determinar a área da superfície do toro gerado pela rotação do círculo de equação $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ em torno do eixo x. $[R = 4\pi^2 ab]$

15. Mostre que o volume de um cone de raio r e altura h é $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$

2. FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

Funções de várias variáveis: Objetivos:

Ao final do capítulo espera-se que o aluno seja capaz de:

1. Definir funções de várias variáveis e dar exemplos práticos;
2. Encontrar o domínio e fazer o gráfico (esferas, cones, cilindros, parabolóides, planos e interseções entre essas superfícies) com funções de várias variáveis com duas variáveis independentes;
3. Usando a definição mostrar que o limite de uma função de duas variáveis existe;
4. Verificar se uma função de duas variáveis é contínua num ponto;
5. Encontrar derivadas parciais e interpretá-las geometricamente quando a função for de duas variáveis independentes;
6. Encontrar derivadas parciais de funções compostas;
7. Encontrar as derivadas parciais de funções implícitas;
8. Resolver problemas que envolvam derivadas parciais como taxa de variação;
9. Representar geometricamente as diferenciais parciais e totais;
10. Resolver problemas que envolvam diferenciais parciais e totais;
11. Encontrar derivadas parciais de ordem superior;
12. Encontrar os extremos de uma função de duas variáveis quando existem;
13. Resolver problemas que envolvam extremos de funções de duas variáveis.
14. Resolver exercícios usando o Maple.

A prova será composta por questões que possibilitam verificar se os objetivos foram atingidos. Portanto, esse é o roteiro para orientações de seus estudos. O modelo de formulação das questões é o modelo adotado na formulação dos exercícios e desenvolvimento teórico desse capítulo, nessa apostila.

2.1. Introdução

Um fabricante pode constatar que o custo da produção C de um determinado artigo depende da qualidade do material usado, do salário - hora dos operários, do tipo de maquinaria necessário, das despesas de manutenção e da supervisão. Dizemos então que C é função de cinco variáveis, porque depende de cinco quantidades diferentes.

Neste Capítulo estudaremos as funções de várias variáveis, começando com o caso de funções de duas variáveis e então a um número arbitrário de variáveis. Como exemplo de função de duas variáveis podemos utilizar a área de um retângulo, função esta muito conhecida de vocês.

Consideremos o retângulo de base a e altura b. A área desse retângulo é

$$A = ab$$

Por outro lado, se a for uma variável x podemos escrever a área desse retângulo em função de x, isto é,

$$A(x) = xb$$

Desse modo, temos a área como função de uma variável.

Podemos também, fazer variar a base e a altura simultaneamente. Nesse caso, tomando $b = y$ teremos a área dada por

$$A(x, y) = xy$$

ou seja, a área expressa como função de duas variáveis.

A função $A(x, y)$ é definida para todo par de pontos pertencentes ao plano $\mathbb{R}^2$ e a imagem é um número real. O convencional é escrever $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Um raciocínio análogo pode ser feito para o volume de um paralelepípedo. Sejam a, b e c as dimensões de um paralelepípedo. O volume será dado por

$$V = abc$$

Por outro lado, se a for uma variável x podoemos escrever o volume desse paralelepípedo expresso como função de uma variável x, isto é,

$$V(x) = xbc$$

Podemos também, fazer variar as dimensões a e b simultaneamente, isto é tomando $b = y$ teremos o volume do paralelepípedo expresso como uma função de duas variáveis x e y, ou seja,

$$V(x, y) = xyc$$

Também, é possível variar as três dimensões simultaneamente e, nesse caso tomando $z = c$ o volume do paralelepípedo será expresso como uma função de três variáveis x, y e z, isto é,

$$V(x, y, z) = xyz$$

A função $V(x, y, z)$ é definida para toda tripla de pontos pertencentes ao espaço $\mathbb{R}^3$ e a imagem é um número real. O convencional é escrever $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Vejamos um exemplo que envolve mais do que três variáveis.

Exemplo 2.1. *Suponhamos que uma pessoa vá a um supermercado e a nota de compras seja descrita conforme o modelo abaixo.*

Nota da compras

Produtos	unidades	preço por unidade	total
Leite	2 pacotes	1,00	2,00
pão	10	0,10	1,00
Laranja	2kg	0,50	1,00
Maçã	2kg	2,50	5,00
Açúcar	5kg	0,60	3,00
		Total a pagar	12,00

Suponhamos que as variáveis x, y, z, w e t representem, respectivamente, leite, pão, laranja, maçã e açúcar, então podemos escrever a função " total a pagar " por

$$T(x, y, z, w, t) = x + 0,1y + 0,5z + 2,5w + 0,6t$$

A função T é uma função de cinco variáveis. Para encontrar o total a pagar referente a tabela anterior fazemos

$$\begin{aligned} T(2, 10, 2, 2, 5) &= 2 + 0,1(10) + 0,5(2) + 2,5(2) + 0,6(5) \\ &= 2 + 1 + 1 + 5 + 3 \\ &= 12 \end{aligned}$$

A função $T(x, y, z, w, t)$ é definida para todo ponto $(x, y, z, w, t) \in \mathbb{R}^5$. O convencional é escrever $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$.

Note que, em todos os exemplos examinados, a imagem da função é um número real. Com base nesses exemplos vamos definir funções de várias variáveis.

Definição 2.2. *Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto e seja $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \in D$. Se a cada $n-$upla ordenada pertencente a D corresponder um único número real $f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ dizemos que f é uma função de $n-$ variáveis, definida em D com imagem em $\mathbb{R}$. Convencionalmente escreve-se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.*

Exemplo 2.3. *Vejamos alguns exemplos de funções de várias variáveis.*

Para $D \subset \mathbb{R}^2$ temos	$f : D \to \mathbb{R}$	definida por $f(x, y) = 2x + 3y + 1$
Para $D \subset \mathbb{R}^3$ temos	$f : D \to \mathbb{R}$	definida por $f(x, y, z) = x^2 + y + z + 6$
Para $D \subset \mathbb{R}^4$ temos	$f : D \to \mathbb{R}$	definida por $f(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z + w + 6$
Para $D \subset \mathbb{R}^5$ temos	$f : D \to \mathbb{R}$	definida por $f(x, y, z, w, t) = x^2 + y^2 + z + w + t^2 + 6$

Nosso estudo vai ficar restrito às funções de duas e três variáveis.

Gráfico de uma Função de Várias Variáveis

Apenas podemos representar graficamente funções de uma e duas variáveis independentes.

Por exemplo, o gráfico de $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$ é um parabolóide conforme mostra a figura 2.1

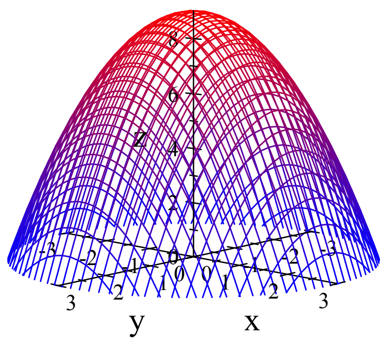


Figura 2.1: $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$

A equação de uma superfície pode ser escrita na forma implícita ou explícita, em função de duas variáveis, isto é, $F(x, y, z) = 0$ ou $z = f(x, y)$

Exemplo 2.4. *A equação da esfera centrada na origem pode ser escrita como segue:*

- Implicitamente $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$
- Explicitamente em função de (x, y) com $z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

Representação Gráfica de uma Superfície

Para representar graficamente uma superfície procede-se como segue:

1. Escolhe-se um plano coordenado.
2. Determina-se as interseções com os eixos cartesianos determinando os pontos $(x, 0, 0)$, $(0, y, 0)$ e $(0, 0, z)$.
3. Determina-se os traços das superfícies sobre os planos;

   a) xy fazendo $z = 0$ na equação;

   b) xz fazendo $y = 0$ na equação;

   c) yz fazendo $x = 0$ na equação.
4. Determina-se as simetrias:

   a) em relação aos planos coordenados.

   - Uma superfície é simétrica em relação ao plano xy se para qualquer ponto $P(x, y, z)$ existe um ponto $P'(x, y, -z)$.
   - Uma superfície é simétrica em relação ao plano xz se para qualquer ponto $P(x, y, z)$ existe um ponto $P'(x, -y, z)$.
   - Uma superfície é simétrica em relação ao plano yz se para qualquer ponto $P(x, y, z)$ existe um ponto $P'(-x, y, z)$.

   b) em relação aos eixos coordenados

   - Uma superfície é simétrica em relação ao eixo x se para quaquer ponto $P(x, y, z)$ existe um ponto $P'(x, -y, -z)$.
   - Uma superfície é simétrica em relação ao eixo y se para quaquer ponto $P(x, y, z)$ existe um ponto $P'(-x, y, -z)$.
   - Uma superfície é simétrica em relação ao eixo z se para quaquer ponto $P(x, y, z)$ existe um ponto $P'(-x, -y, z)$.

   c) em relação à origem:

   - Uma superfície é simétrica em relação à origem se para quaquer ponto $P(x, y, z)$ existe um ponto $P'(-x, -y, -z)$.

5. Secções e Extensão: Quando os traços principais não forem suficientes para caracterização da superfície, recorre-se a determinação de secções com planos paralelos aos planos coordenados. Para isso fazemos:

   - $z = k$ sendo k uma constante na equação $F(x, y, z) = 0$, isto é, teremos a equação $F(x, y, k) = 0$ sobre o plano coordenado xy.
   - $y = k$ sendo k uma constante na equação $F(x, y, z) = 0$, isto é, teremos a equação $F(x, k, z) = 0$ sobre o plano coordenado xz.
   - $x = k$ sendo k uma constante na equação $F(x, y, z) = 0$, isto é, teremos a equação $F(k, y, z) = 0$ sobre o plano coordenado zy.

6. Traça-se o esboço do gráfico da superfície.

Exemplo 2.5. *Traçar o esboço do gráfico da superfície de equação*

$-$

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} - \frac{z^2}{3^2} = 1.$$

Solução:

1. Vamos tomar como plano coordenado o plano xz.

2. Interseções com os eixos coordenados : Os pontos $(x, 0, 0)$ e $(0, 0, z)$ não são reais e o ponto $(0, y, 0)$ é duplo ou seja temos os pontos $P(0, 4, 0)$ e $P'(0, -4, 0)$.

3. Traços:

   - Sobre o plano xy: Fazendo $z = 0$ tem-se a hipérbole $-\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$.

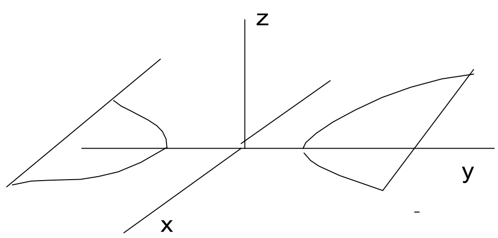


Figura 2.2: Traços sobre xy

- Sobre o plano xz: Fazendo $y = 0$ tem-se a elipse imaginária $-\frac{x^2}{5^2} - \frac{z^2}{3^2} = 1$.
- Com o plano zy: Fazendo $x = 0$ tem-se a hipérbole $\frac{y^2}{4^2} - \frac{z^2}{3^2} = 1$.

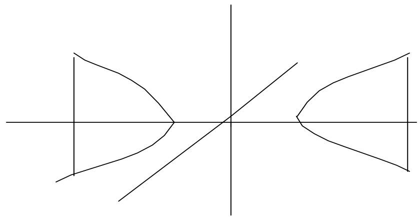


Figura 2.3: Traços sobre yz

4. Simetrias: Explicitamente a equação $-\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} - \frac{z^2}{3^2} = 1$ pode ser escrita como segue:

   $y = 4\sqrt{1 + \frac{x^2}{5^2} + \frac{z^2}{3^2}}$ ou $y = -4\sqrt{1 + \frac{x^2}{5^2} + \frac{z^2}{3^2}}$

   Logo, é simétrica em relação aos planos coordenados, aos eixos coordenados e à origem:

5. Secções e extensões: fazendo $z = k, \ k \in R$, obtemos uma família de hipérboles sobre os planos $z = k$. Por outro, lado fazendo $y = k, \ k \in R$, obtemos uma família de elipses sobre os planos $z = k$. (fazendo $x = k$ as curvas são imaginárias).

   - Por exemplo,fazendo $z = k = 3$ temos as equações

   $y = 4\sqrt{1 + \frac{x^2}{5^2} + \frac{3^2}{3^2}}$ ou $y = -4\sqrt{1 + \frac{x^2}{5^2} + \frac{3^2}{3^2}}$

   donde vem a equação da hipérbole sobre o plano $z = 3$ dada por

   $y = \sqrt{2 + \frac{x^2}{5^2}}$ ou $y = -\sqrt{2 + \frac{x^2}{5^2}}$

- Por exemplo, fazendo $y = k = \pm 8$ temos a equação elíptica

  $-\frac{x^2}{5^2} + \frac{(\pm 8)^2}{4^2} - \frac{z^2}{3^2} = 1 \Longrightarrow -\frac{x^2}{5^2} + 4 - \frac{z^2}{3^2} = 1 \Longrightarrow 3 = \frac{x^2}{5^2} + \frac{z^2}{3^2}$
  sobre os planos $y = 8$ e $y = -8$.

  Construção da superfície.

  Os elementos fornecidos pela discussão acima permitem construir a superfície hipebólica de duas folhas conforme a figura 2.6.

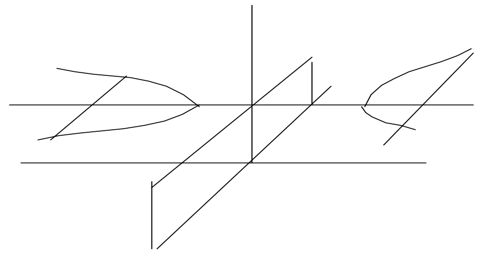


Figura 2.4: Traços sobre o plano z=3

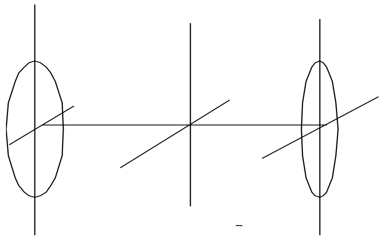


Figura 2.5: Traços sobre o plano y=8

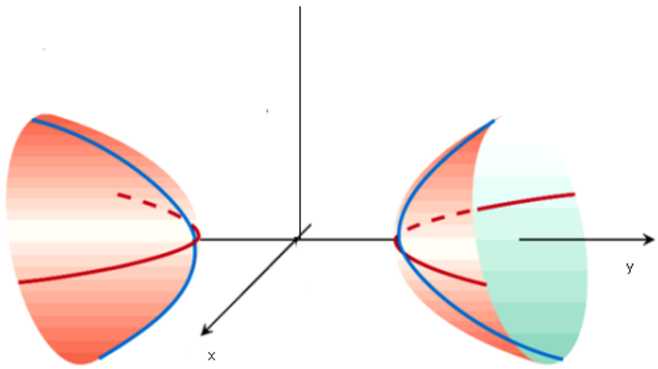


Figura 2.6:

Exercícios

Discutir e representar graficamente as superfícies

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

2. $x^2 + y^2 - z^2 = 25$

3. $9x + 4y + 12z = 36$

4. $z^2 - x^2 - y^2 = 0$

5. $\begin{cases} z + x^2 = 16 \\ z + y = 7 \\ y = 0 \text{ e } y = 4 \end{cases}$

6. $\begin{cases} z = 18 - x^2 - y^2 \\ z = x^2 + 5y^2 \end{cases}$

Distâncias e Bolas no Espaço

Sejam $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ e $A(y_1, y_2, ..., y_n)$ dois pontos de $\mathbb{R}^n$, a distância de P até A, denotada por $||P - A||$, é dada por

$$||P - A|| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + .. + (x_n - y_n)^2}$$

Definição 2.6. *Sejam $A(y_1, y_2, ..., y_n)$ um ponto de $\mathbb{R}^n$ e $r > 0$ um número real. Denominamos bola aberta de centro A e raio ε ao conjunto de todos os pontos $P \in \mathbb{R}^n$ tais que $||P - A|| < r$. Isto é, o conjunto*

$$B(A, \varepsilon) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \text{ tais que } ||P - A|| < r\}$$

Sejam $A(1, 2)$ e $r = 1$ então a bola aberta

$$B((1, 2), 1) = \left\{P \in \mathbb{R}^2 \text{ tais que } ||(x, y) - (1, 2)|| < 1\right\}$$

é graficamente representada por **??**

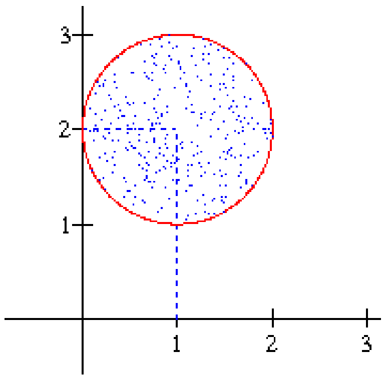


Figura 2.7:

Exemplo 2.7. *Sejam* $A(1,1,2)$ *e* $r = 1$ *então a bola aberta*

$$B(1,2,1) = \left\{P \in \mathbb{R}^3 \text{ tais que } ||(x,y,z) - (1,1,2)|| < 1\right\}$$

é graficamente representada pela figura 2.8

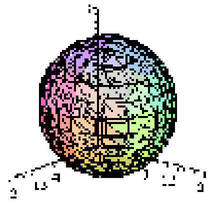


Figura 2.8:

2.2. Limite de uma Função de duas Variáveis

Vamos estudar a existência do limite de uma função de duas variáveis. O raciocínio análogo é feito para funções de $n-$ variáveis.

Definição 2.8. *Seja* f *uma função de duas variáveis definida numa bola aberta centrada em* $A(x_0, y_0)$, $B(A(x_0,y_0), r)$, *exceto possivelmente em* $A(x_0, y_0)$. *Dizemos que o número* L *é o limite de* $f(x,y)$ *quando* (x,y) *tende para* (x_0,y_0) *se dado* $\varepsilon > 0$ *podemos encontrar um* $\delta > 0$ *tal que* $|f(x,y) - L| < \varepsilon$ *sempre que* $0 < ||(x,y) - (x_0,y_0)|| < \delta$. *Nesse caso, escrevemos*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

Exemplo 2.9. *Mostrar que* $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} 2x + 3y = 11$

Demonstração: Devemos mostrar que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x,y) - 11| < \varepsilon$ sempre que $0 < ||(x,y) - (1,3)|| < \delta$. Assim,

$$\begin{aligned}
|f(x,y) - 11| &= |2x + 3y - 11| \\
&= |(2x-2) + (3y-9)| \\
&= |2(x-1) + 3(y-3)| \\
|f(x,y) - 11| &\leq |2(x-1)| + |3(y-3)| = 2|(x-1)| + 3|(y-3)| < \varepsilon \\
&\text{donde obtemos } 2|(x-1)| + 3|(y-3)| < \varepsilon \text{ (I)}
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\text{de } 0 < ||(x,y) - (x_0, y_0)|| < \delta \text{ obtemos } 0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} < \delta.$$

Como podemos observar na figura acima, $|x-1|$ e $|y-3|$ são os lados do triângulo e $||(x,y)-(x_0,y_0)|| = \sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}$ é a hipotenusa. É claro que

$$|x-1| \leq \sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2} < \delta$$

e

$$|y-3| \leq \sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2} < \delta$$

de modo que teremos

$$|x-1| < \delta \text{ e } |y-3| < \delta$$

Observe a figura 2.9

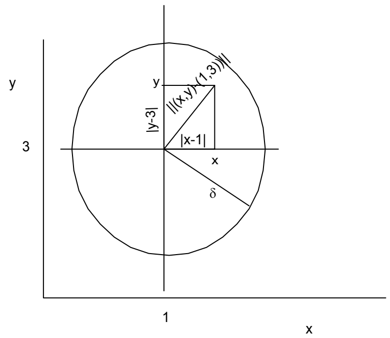


Figura 2.9:

Substituindo estes resultados no termo à esquerda do sinal em (I) vem:

$$\begin{aligned} 2\left|(x-1)\right| + 3\left|(y-3)\right| &< 2\delta + 3\delta \\ &< 5\delta \quad (\text{ II }) \end{aligned}$$

Portanto, de (I) e (II) podemos formar o sistema de inequações

$$\begin{cases} 2\left|(x-1)\right| + 3\left|(y-3)\right| < \varepsilon \\ 2\left|(x-1)\right| + 3\left|(y-3)\right| < 5\delta \end{cases}$$

Assim, podemos admitir $5\delta = \varepsilon$ donde vem $\delta = \dfrac{\varepsilon}{5}$.

Logo, $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} 2x+3y = 11$, pois dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \dfrac{\varepsilon}{5}$ tal que $|f(x,y) - 11| < \varepsilon$ sempre que $0 < ||(x,y)-(1,3)|| < \delta$.

Definição 2.10. *Seja $A(x_0, y_0)$ um ponto e D um subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Dizemos que $A(x_0, y_0)$ é ponto de acumulação de D se toda bola aberta centrada em $A(x_0, y_0)$ e raio r tem uma infinidade de pontos de D.*

Exemplo 2.11. *Seja D o conjunto de todos os pontos (x, y) tais que $x^2+y^2 \leq 1$. Então os pontos $A(x_0, y_0) = (0, 0)$ em $B(x_1, y_1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ são pontos de acumulação de D. Porém o ponto $(1, 1)$ não é.*

Definição 2.12. *Seja f uma função de duas variáveis definida num conjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^2$. Seja $B(x_0, y_0)$ um ponto de acumulação de D. Então o limite de $f(x, y)$ quando (x, y) tende para (x_0, y_0) é L se dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $\delta > 0$ tal que*

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon$$

sempre que

$$0 < ||(x, y) - (x_0, y_0)|| < \delta$$

Nesse caso, escrevemos

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (x_0, y_0) \\ D}} f(x, y) = L$$

Teorema 2.13. *Seja f uma função de duas variáveis definida numa bola aberta centrada em $A(x_0, y_0)$, $B(A(x_0, y_0), r)$, exceto possivelmente em $A(x_0, y_0)$. Se $f(x, y)$ tem limites diferentes quando (x, y) tende para (x_0, y_0) por caminho diferentes então*

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (x_0, y_0) \\ D}} f(x, y) \text{ não existe}$$

Exemplo 2.14. *Vamos mostrar que* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ *não existe.*

Solução: Seja $S_1 = \{(x, y) \in D \text{ } tal \text{ } que \text{ } x = 0\}$. Note que S_1 é exatamente o eixo y e é um caminho que passa pelo ponto $(0, 0)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ S_1}} f(x, y) &= \lim_{\substack{(0,y) \to (0,0) \\ S_1}} f(0, y) \\
&= \lim_{\substack{(0,y) \to (0,0) \\ S_1}} \frac{0 \cdot y}{0^2 + y^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Seja $S_2 = \{(x,y) \in D \; tal \; que \; y = kx\}$. Note que S_2 é o conjunto de retas que passam pelo ponto $(0,0)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ S_2}} f(x,y) &= \lim_{\substack{(x,kx)\to(0,0)\\ S_2}} f(x,kx) \\
&= \lim_{\substack{(x,kx)\to(0,0)\\ S_2}} \frac{xkx}{x^2+(kx)^2} \\
&= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ S_2}} \frac{x^2k}{x^2(1+k^2)} \\
&= \frac{k}{1+k^2}
\end{aligned}$$

Como $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ S_1}} f(x,y) \neq \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ S_2}} f(x,y)$

segue que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ não existe.

Exemplo 2.15. *Vamos mostrar que* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$ *existe.*

Solução: Primeiro vamos verificar se por caminhos diferentes o limite tem o mesmo valor numérico.

Seja $S_1 = \{(x,y) \in D \; tal \; que \; y = kx\}$. Note que S_1 é o conjunto de retas que passam pelo ponto $(0,0)$. Assim,

$$
\begin{aligned}
\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ S_1}} f(x,y) &= \lim_{\substack{(x,kx)\to(0,0)\\ S_1}} f(x,kx)\\
&= \lim_{\substack{(x,kx)\to(0,0)\\ S_2}} \frac{3x^2kx}{x^2+(kx)^2}\\
&= \lim_{\substack{(x,kx)\to(0,0)\\ S_2}} \frac{x^3k}{x^2(1+k^2)}\\
&= \lim_{\substack{(x,kx)\to(0,0)\\ S_2}} \frac{xk}{1+k^2}=0
\end{aligned}
$$

Seja $S_2 = \{(x,y)\in D \; tal \; que \; y = kx^2\}$. Note que S_2 é um conjunto de parábolas que passam pelo ponto $(0,0)$. Assim,

$$
\begin{aligned}
\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ S_1}} f(x,y) &= \lim_{\substack{(x,kx^2)\to(0,0)\\ S_1}} f(x,kx^2)\\
&= \lim_{\substack{(x,kx^2)\to(0,0)\\ S_2}} \frac{3x^2kx^2}{x^2+(kx^2)^2}\\
&= \lim_{\substack{(x,kx^2)\to(0,0)\\ S_2}} \frac{3x^4k}{x^2(1+k^2x^2)}\\
&= \lim_{\substack{(x,kx^2)\to(0,0)\\ S_2}} \frac{3x^2k}{1+k^2x^2}=0
\end{aligned}
$$

Como $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ S_1}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ S_2}} f(x,y)$ segue que há probabilidades de que $L=0$ seja o limite de $f(x,y)=\dfrac{3xy}{x^2+y^2}$.

Para confirmar, devemos verificar se a definição 2.8 está satisfeita. Devemos mostrar que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x,y)-0| < \varepsilon$ sempre que $0 < ||(x,y)-(0,0)|| < \delta$. Assim,

$$|f(x,y)-0| = \left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2}\right| = \frac{|3x^2y|}{|x^2+y^2|} = \frac{3\,|x^2|\,|y|}{x^2+y^2} < \varepsilon \quad (\text{ I })$$

De $0 < ||(x,y)-(0,0)|| < \delta$ obtemos $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$. Sendo $x^2 \leq x^2+y^2$ e $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ podemos escrever

$$\frac{3\,|x^2|\,|y|}{x^2+y^2} \leq \frac{3\,(x^2+y^2)\,|y|}{x^2+y^2} = 3\,|y| < 3\sqrt{x^2+y^2} < 3\delta \quad (\text{ II })$$

Comparando (I) com (II) podemos admitir $3\delta = \varepsilon$ donde vem $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Portanto, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$ existe e $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$.

2.3. Propriedades dos Limites

i) Sejam $f : \mathbb{R}^{\not{k}} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = ax+b$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Então $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y) = ax_o + b$

ii) Se $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y)$ e $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} g(x,y)$ existem e, $c \in \mathbb{R}$, então:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} [f(x,y) \pm g(x,y)] = \lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y) \pm \lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} g(x,y)$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} cf(x,y) = c \lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y)$

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} [f(x,y) \,.\, g(x,y)] = \lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y) \,.\, \lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} g(x,y)$

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} [\tfrac{f(x,y)}{g(x,y)}] = \frac{\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y)}{\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} g(x,y)}$ desde que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} g(x,y) \neq 0$

e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} [f(x,y)]^n = [\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y)]^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+^*$

f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} \sqrt[n]{f(x,y)} = \sqrt[n]{\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y)}$ para $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y) \geq 0$ e $n \in \mathbb{Z}$ ou $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y) \leq 0$ e $n \in \mathbb{N}$ impar.

Proposição 2.16. *Se f é uma função de uma variável, contínua num ponto a, e g(x,y) uma função tal que* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} g(x,y) = a$, *então* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f \circ g(x,y) = f(a)$ *ou*

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(g(x,y)) = f(\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} g(x,y))$$

Exemplo 2.17. *Calcular* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} \ln(x^2+xy-1)$

Consideramos as funções:
$$\begin{cases} g(x,y) = x^2 + xy - 1) \\ f(u) = \ln u \end{cases}$$
temos que $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} g(x,y) = 2$ e $f(u) = \ln(u)$ é contínua em 2.
Aplicando a proposição acima vem:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(1,2)} (f \circ g)(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(1,2)} \ln(x^2 + xy - 1) \\ &= \ln[\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x^2 + xy - 1)] \\ &= \ln 2 \end{aligned}$$

Proposição 2.18. *Se* $\lim\limits_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y) = 0$ *e* $g(x,y)$ *é uma função limitada numa bola aberta de centro* (x_o, y_o) *então*

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y).g(x,y) = 0$$

Exemplo 2.19. *Mostrar que* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0$

Resolução:
Consideremos que $f(x,y) = x$ e $g(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$
Sabemos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$, basta mostrar que $g(x,y)$ é limitada.
Escrevendo $g(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ em coordenadas polares temos que ($x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$)
$\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{r^2 \cos\theta \sin\theta}{r^2} = \cos\theta \sin\theta$
Evidentemente, $|\cos\theta \sin\theta| \leq 1$ e portanto, $g(x,y)$ é limitada.
Logo $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0$

Exercícios

Em cada exercício abaixo verifique se $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe

$a)\ f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ $\quad b) f(x,y) = \dfrac{x^2 y^2}{x^2+y^2}$ $\quad c) f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

$d) f(x,y) = \dfrac{x^2+y}{x^2+y^2}$ $\quad e) f(x,y) = \dfrac{x^2+y^3}{x^2+y^2}$ $\quad f) f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$

2.4. Continuidade de uma função de duas variáveis

Definição 2.20. *Seja f uma função de duas variáveis e (x_0, y_0) um ponto de $\mathbb{R}^2$. Dizemos que f é contínua em (x_0, y_0) se, e somente se, satisfaz as condições:*

$$i) f(x_0, y_0) \text{ existe;}$$

$$ii) \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \text{ existe;}$$

$$iii) \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$$

.

Exemplo 2.21. *Vamos verificar se* $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} \ se \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \ se \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$ *é contínua em* $(0,0)$.

Solução: Devemos verificar se f satisfaz as condições da definição 2.20.

Condição $i)$ Como $f(x,y) = 0$ se $(x,y) = (0,0)$ a primeira condição está satisfeita.

Condição $ii)$ Vimos no exemplo 2.14 que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ não existe. Portanto, a condição $ii)$ da definição 2.20 não é satisfeita.

Logo, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} \ se \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \ se \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$ não é contínua em $(0,0)$.

Exemplo 2.22. *A função definida por* $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4-(y-1)^4}{x^2+(y-1)^2} \ se \ (x,y) \neq (0,1) \\ 0 \ se \ (x,y) = (0,1) \end{cases}$ *é contínua em* $(0,1)$?

Para ser contínua deve ser verificado as três condições:

$$i) f(x_0, y_0) \text{ existe;}$$

$$ii) \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \text{ existe;}$$

$$iii) \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$$

i. $f(0,1) = 0$ e portanto existe.

ii. vamos verificar se $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ existe e é igual a zero (se for diferente a função não é contínua no ponto)

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^4-(y-1)^4}{x^2+(y-2)^2} = \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{(x^2-(y-1)^2)(x^2+(y-1)^2)}{x^2+(y-1)^2} = 0$$

iii. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^4-(y-1)^4}{x^2+(y-2)^2} = f(0,1)$

Portanto, a $F(x,y)$ é contínua no ponto $(0,1)$

Exemplo 2.23. *Vamos verificar se* $f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} \; se \; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \; se \; (x,y) = (0,0) \end{cases}$ *é contínua em* $(0,0)$.

Solução: Devemos verificar se f satisfaz as condições da definição 2.20.

Condição $i)$ Como $f(x,y) = 0$ se $(x,y) = (0,0)$, a primeira condição está satisfeita.

Condição $ii)$ Vimos no exemplo 2.15 que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$ existe, isto é, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$.

Condição $iii)$ Sendo $f(x,y) = 0$ e $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$ segue que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = f(0,0)$. Assim, a terceira concição da definição 2.20 está satisfeita.

Portanto, as três condições da definição 2.20 estão satisfeitas.

Logo, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} \; se \; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \; se \; (x,y) = (0,0) \end{cases}$ é contínua em $(0,0)$.

Exercícios

Em cada exercício verifique se as funções abaixo são contínuas em $(0,0)$.

$a)\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4+y^2} \; se \; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \; se \; (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$b) f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \; se \; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \; se \; (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$c) f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \; se \; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \; se \; (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$d) f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y}{x^2+y^2} \; se \; (x,y) \neq (0,0) \\ 1 \; se \; (x,y) = (0,0) \end{cases}$

2.5. Derivadas Parciais

As técnicas, regras e fórmulas desenvolvidas para derivação de funções de uma variável são generalizadas para funções de duas ou mais variáveis.

Definição 2.24. *Seja f uma função de duas variáveis e (x, y) um ponto no domínio de f então as derivadas parciais $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ e $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ de f em (x, y) são dadas por*

$$\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x+\Delta x,y\right)-f\left(x,y\right)}{\Delta x}$$

e

$$\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f\left(x,y+\Delta y\right)-f\left(x,y\right)}{\Delta y}$$

Exemplo 2.25. *Seja $f\left(x,y\right)=x^2y+xy^2$ encontre $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ e $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$.*

Solução: Aplicando a definição 2.25 vem

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= \lim_{\Delta x\to 0}\tfrac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\tfrac{(x+\Delta x)^2y+(x+\Delta x)y^2-\left(x^2y+xy^2\right)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\tfrac{x^2y+2xy\Delta x+y(\Delta x)^2+xy^2+y^2\Delta x-x^2y-xy^2}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\tfrac{2xy\Delta x+y(\Delta x)^2+y^2\Delta x}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\tfrac{\left(2xy+y\Delta x+y^2\right)\Delta x}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}2xy+y\Delta x+y^2=2xy+y^2
\end{aligned}$$

Portanto, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=2xy+y^2$.
Analogamente, encontra-se $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)+f(x,y)}{\Delta y}=x^2+2xy$.

Note que para encontrar $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ basta considerar y como uma constante na função $f\left(x,y\right)$ e aplicar as regras de derivação estudadas na derivação de funções de uma variável. Para encontrar $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ deriva-se em relação a y mantendo x constante.

Exemplo 2.26. *Seja $f\left(x,y\right)=3x^2y+2senxy$, encontrar $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ e $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$.*

Solução: Tomando y constante no primeiro caso e x no segundo temos

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 6xy + 2y\cos xy$$

e

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3x^2 + 2x\cos xy$$

Observação 4. *No caso de f ter mais de duas variáveis são consideradas constantes todas a s variáveis em relação a qual f não está sendo derivada.*

Exemplo 2.27. *Seja $f(x,y,z,t) = 3x^2yz^3t^2 + 2senx^2yz^3t^2$, encontrar*

$\frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial y}$, $\frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial z}$ e $\frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial t}$.

Solução: Tomando constante todas as variáveis em relação a qual f não está sendo derivada temos

$$\frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial x} = 6xyz^3t^2 + 4xyz^3t^2\cos x^2yz^3t^2$$

$$\frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial y} = 3x^2z^3t^2 + 2x^2z^3t^2\cos x^2yz^3t^2$$

$$\frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial z} = 9x^2yz^2t^2 + 6x^2yz^2t^2\cos x^2yz^3t^2$$

$$\frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial t} = 6x^2yz^3t + 4x^2yz^3t\cos x^2yz^3t$$

Interpretação Geométrica das derivadas parciais

Podemos interpretar geometricamente a derivada parcial como uma inclinação. Consideramos a secção da superfície $z = f(x,y)$ pelo plano vertical $y = y_o$. Neste plano a curva $z = f(x,y_o)$ tem uma tangente com inclinação em $f_x(x_o,y_o)$ em x_o.

Seja $f(x,y)$ uma função de duas variáveis. Seja $y = y_o$. Então, $f(x,y_o)$ descreve uma curva sobre a superfície S. Marcamos um ponto $P(x,y_o)$ sobre a curva $f(x,y_o)$e tracemos uma reta tangente à curva no ponto $P(x,y_o)$ com coeficiente angular $m = tg\alpha$. Então, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = tg\alpha$, ou seja $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ é o coeficiente angular da reta tangente à curva $f(x,y_o)$ no ponto $P(x,y_o)$ (veja a figura 2.10). Analogamente, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ é o coeficiente angular da reta tangente à curva $f(x_o,y)$ no ponto $P(x_o,y)$, conforme ilustra a figura **??**.

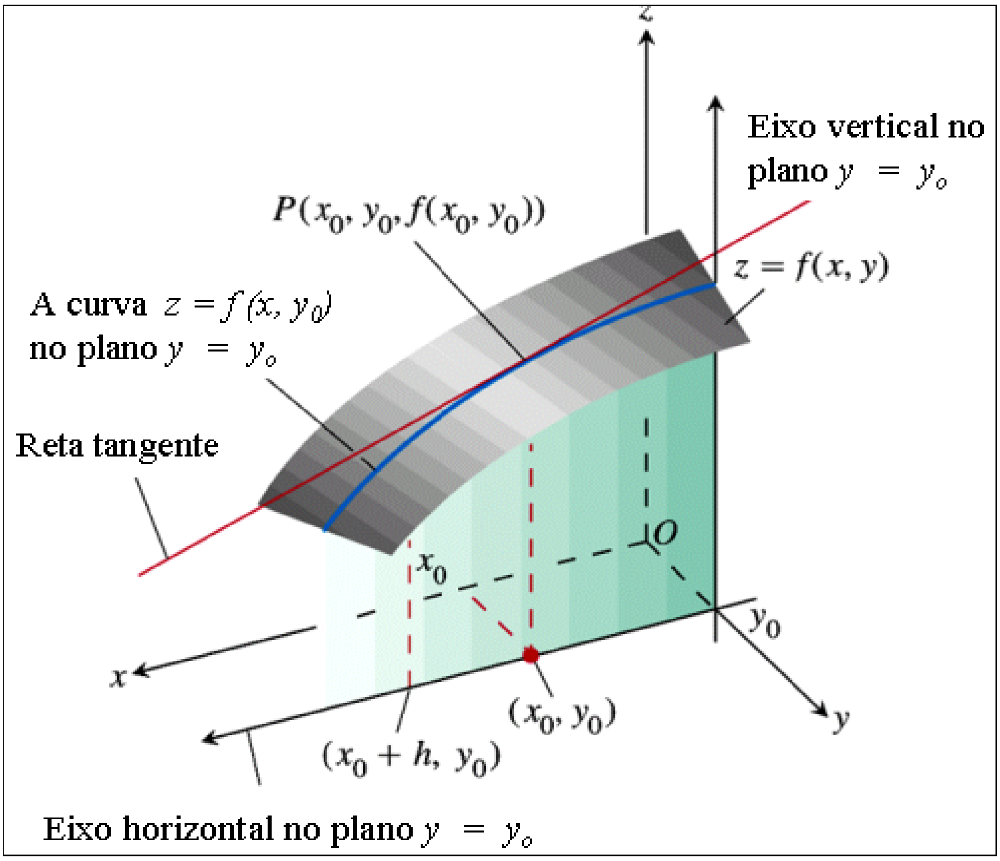


Figura 2.10:

2.6. Derivada de uma Função Composta

Antes de discutir a derivada de uma função composta vamos falar sobre função composta de duas variáveis.

Consideremos as funções $\phi(x, y) = x^2y + y$ e $\psi(x, y) = x + y^2$. Podemos definir uma função $F(\phi, \psi)$ por $F(\phi, \psi) = 2\phi^2 + 3\psi$. Escrevendo F em função de x e y temos:

$$\begin{aligned}
F(\phi, \psi) &= 2\phi^2 + 3\psi \\
F(\phi(x, y), \psi(x, y)) &= 2[\phi(x, y)]^2 + 3[\psi(x, y)] \\
&= 2[x^2y + y]^2 + 3[x + y^2] \\
&= 2[x^4y^2 + 2x^2y^2 + y^2] + 3x + 3y^2 \\
&= 2x^4y^2 + 4x^2y^2 + 2y^2 + 3x + 3y^2 \\
&= 2x^4y^2 + 4x^2y^2 + 5y^2 + 3x
\end{aligned}$$

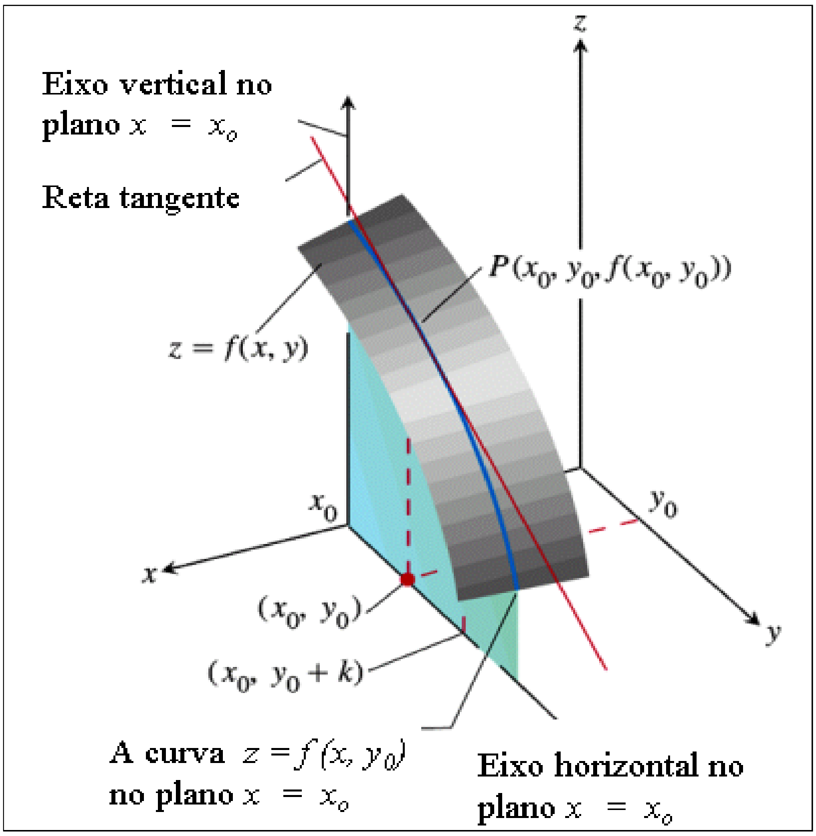


Figura 2.11:

Por exemplo,

$$F\left(\phi(1,2), \psi\left(1,2\right)\right) = 2\left(1\right)^4\left(2\right)^2 + 4\left(1\right)^2\left(2\right)^2 + 5\left(2\right)^2 + 3\left(1\right) = 47.$$

Como

$$\phi(x,y) = x^2y + y \text{ e } \psi\left(x,y\right) = x + y^2$$

segue que

$$\phi(1,2) = \left(1\right)^2 2 + 2 = 4$$

e

$$\psi\left(1,2\right) = 1 + 2^2 = 5.$$

Logo,

$$F\left(\phi(1,2), \psi\left(1,2\right)\right) = F\left(4,5\right) = 2\left(4\right)^2 + 3\left(5\right) = 47.$$

Nosso interesse é encontrar $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ e $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$. A função

$$F\left(\phi(x,y), \psi\left(x,y\right)\right) = 2x^4y^2 + 4x^2y^2 + 5y^2 + 3x$$

pode ser escrita como uma função (x, y). Isto é,

$$F\left(x,y\right) = 2x^4y^2 + 4x^2y^2 + 5y^2 + 3x$$

e, nesse caso, temos

$$\frac{\partial F\left(x,y\right)}{\partial x} = 8x^3y^2 + 8xy^2 + 3$$

e

$$\frac{\partial F\left(x,y\right)}{\partial y} = 4x^4y + 8x^2y + 10y$$

Como podemos observar, obter as derivadas parciais através desse processo não é muito animador. Isso é motivação suficiente para estudar a regra da cadeia. Se tivermos uma função composta $f\left(g\left(x\right)\right)$ sabemos que $\left[f\left(g\left(x\right)\right)\right]' = f'\left(g\left(x\right)\right)g'\left(x\right)$. A mesma teoria é aplicada para encontrar a derivada parcial de uma função composta de várias variáveis.

Seja $z\left(x,y\right) = F\left(\phi(x,y), \psi\left(x,y\right)\right)$ então

$$\frac{\partial z\left(x,y\right)}{\partial x} = \frac{\partial F\left(\phi,\psi\right)}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial F\left(\phi,\psi\right)}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

e

$$\frac{\partial z\left(x,y\right)}{\partial y} = \frac{\partial F\left(\phi,\psi\right)}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial F\left(\phi,\psi\right)}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial y}$$

Exemplo 2.28. *Consideremos as funções*

$$\phi(x,y) = x^2y + y$$

e

$$\psi\left(x,y\right) = x + y^2$$

Podemos definir uma função $F\left(\phi,\psi\right)$ *por*

$$z\left(x,y\right) = F\left(\phi,\psi\right) = 2\phi^2 + 3\psi$$

e depois encontrar $\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}$ e $\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}$.

Solução: Inicialmente, determinamos as derivadas parciais das funções $\phi(x,y)$, $\psi\,(x,y)$ e $F\,(\phi,\psi)$ Temos, então:

$$\tfrac{\partial F(\phi,\psi)}{\partial\phi}=4\phi,\qquad \tfrac{\partial F(\phi,\psi)}{\partial\psi}=3,\qquad \tfrac{\partial\phi}{\partial x}=2xy\quad \text{e}\quad \tfrac{\partial\psi}{\partial x}=1$$

$$\tfrac{\partial\phi}{\partial y}=x^2+1\qquad \tfrac{\partial\psi}{\partial y}=2y$$

Substituindo em

$$\frac{\partial z\,(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial F\,(\phi,\psi)}{\partial\phi}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial F\,(\phi,\psi)}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

e

$$\frac{\partial z\,(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial F\,(\phi,\psi)}{\partial\phi}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{\partial F\,(\phi,\psi)}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial y}$$

vem

$$\begin{aligned}\frac{\partial z\,(x,y)}{\partial x}&=4\phi\frac{\partial\phi}{\partial x}+3\frac{\partial\psi}{\partial x}\\&=4\left(x^2y+y\right)(2xy)+3\,(1)\\&=8x^3y^2+8xy^2+3\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial z\,(x,y)}{\partial y}&=4\phi\frac{\partial\phi}{\partial y}+3\frac{\partial\psi}{\partial y}\\&=4\left(x^2y+y\right)\left(x^2+1\right)+3\,(2y)\\&=4x^4y+8x^2y+10y\end{aligned}$$

Exemplo 2.29. *Determine* $\frac{\partial F}{\partial x}$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ *da função* $F(x,y)=\ln\sqrt[5]{(x^4+2xy+y^3)+(2xy+3x^2)}$

solução: Podemos rescrever a $F(x,y)$ como:

$$F(f,g)=\ln(f+g)^{\frac{1}{5}}$$

onde

$$f(x,y)=x^4+2xy+y^3$$

e

$$g(x,y)=2xy+3x^2$$

usando a regra da cadeia, temos:

$$F=\ln\sqrt[5]{(x^4+2xy+y^3)+(2xy+3x^2)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{6x + 4y + 4x^3}{20xy + 15x^2 + 5x^4 + 5y^3}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{1}{5}[\frac{\partial F}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial x}] \\
&= \frac{1}{5}[\frac{1}{f+g}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{f+g}\frac{\partial g}{\partial x}] \\
&= \frac{1}{5}[\frac{1(4x^3 + 2y) + (2y + 6x)}{x^4 + y^3 + 4xy + 3x^2}] \\
&= \frac{6x + 4y + 4x^3}{20xy + 15x^2 + 5x^4 + 5y^3}
\end{aligned}$$

Exemplo 2.30. *Variação dos valores de uma função ao longo de uma hélice. Encontre* $\frac{dw}{dt}$ *se* $w = xy + z$, $x = \cos t$, $y = \sin t$ *e* $z = t$.*Qual é o valor da derivada em* $t = 0$?

Solução:

$$\begin{aligned}
\frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt} \\
&= y(-\sin t) + x(\cos t) + 1(1) \\
&= \sin t(-\sin t) + (\cos t)(\cos t) + 1 \\
&= -\sin^2 t + \cos^2 t + 1 = 1 + \cos 2t \\
\text{Logo em } t &= 0 \text{ temos } \frac{dw}{dt} = 1 + \cos(2.0) = 2
\end{aligned}$$

Exercícios

Escreva as funções abaixo na forma de funções composta e encontre as derivadas parciais em relação a x e y.

a) $z = \ln\sqrt{x^2e^{2y} + x^2e^{-2y}}$ *b)* $z = \ln\left[\left(e^{x+y^2}\right)^2 + x^2 + y\right]$

c) $z = r^2\cos^2 t + 2r^2 sent\cos t + r^2 sen^2 t$ *d)* $z = \sqrt{x + y^2 + (x^2e^{-2y})^3}$

2.7. Derivadas de Funções Implícitas

Seja y uma função de x definida pela equação $F(x, y) = 0$. Por exemplo, $x^2 + y^2 - 9 = 0$ ou $x^2y^3 + x^3y^2 + xy + x + y - 9 = 0$. A equação $x^2 + y^2 - 9 = 0$ pode ser expressa explicitamente em função de x ou de y. Porém, não podemos fazer o mesmo com a equação $x^2y^3 + x^3y^2 + xy + x + y - 9 = 0$. Também, fazendo $F(x, y) = x^2 + y^2 - 9$ facilmente encontramos $\dfrac{dy}{dx}$ e $\dfrac{dx}{dy}$, o mesmo não ocorre se fizermos $F(x, y) = x^2y^3 + x^3y^2 + xy + x + y - 9$. Nosso interesse está em encontrar uma forma de determinar com rapidez as derivadas $\dfrac{dy}{dx}$ e $\dfrac{dx}{dy}$.

Inicialmente, vamos resover o problema usando o conhecimento adquirido em Cálculo I. Vamos derivar y implicitamente em relação a x na equação

$$x^2y^3 + x^3y^2 + xy + x + y - 9 = 0.$$

Temos

$$(2xy^3 + 3x^2y^2y') + (3x^2y^2 + 2x^3yy') + (y + xy') + 1 + y' = 0$$

ou

$$(3x^2y^2y' + 2x^3yy' + xy' + y') + (2xy^3 + 3x^2y^2 + y + 1) = 0$$
$$(3x^2y^2y + 2x^3y + x + 1)\, y' = -(2xy^3 + 3x^2y^2 + y + 1)$$
$$y' = -\frac{2xy^3 + 3x^2y^2 + y + 1}{3x^2y^2y + 2x^3y + x + 1}$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy^3 + 3x^2y^2 + y + 1}{3x^2y^2y + 2x^3y + x + 1} \quad (\text{ I })$$

Sendo $F(x, y) = x^2y^3 + x^3y^2 + xy + x + y - 9$ obtemos as derivadas parciais de F dadas por

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = 2xy^3 + 3x^2y^2 + y + 1$$

e

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 3x^2y^2 + 2x^3y + x + 1.$$

Observando estes resultados e comparando com (I), podemos podemos escrever a fórmula

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial x}}{\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial y}}$$

sempre que $F(x, y)$, $\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial y}$ forem contínuas em $(x, y) \in D$ e $\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial y} \neq 0$.

Se F for uma função com mais de duas variáveis, usando o mesmo procedimento determinam-se as derivadas parciais.

Exemplo 2.31. *Dada a função implícita* $x^2+y^2+z^2-9=0$, *encontrar* $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial x}{\partial z}$.

Solução: Escrevemos $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-9$, então teremos

$$\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}=2x$$

$$\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}=2y$$

e

$$\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}=2z$$

Agora, substituindo convenientemente na fórmula acima vem:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}}{\dfrac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}}=-\frac{2x}{2z}=-\frac{x}{z}=-\frac{x}{\sqrt{9-(x^2+y^2)}},$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}}{\dfrac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}}=-\frac{2x}{2y}=-\frac{x}{y}=-\frac{x}{\sqrt{9-(x^2+z^2)}},$$

$$\frac{\partial x}{\partial z}=-\frac{\dfrac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}}{\dfrac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}}=-\frac{2z}{2x}=-\frac{z}{x}=-\frac{z}{\sqrt{9-(y^2+z^2)}}.$$

2.8. Derivada parcial como taxa de variação

Suponhamos que f é uma função de duas variáveis. Então, a derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ dá a razão instantânea de variação de f no ponto $P(x_0,y_0)$ por unidade de variação de x. Isto é a taxa de variação de f por unidade de x no ponto $P(x_0,y_0)$.

Analogamente, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ dá a taxa de variação de f por unidade de y.

Exemplo 2.32. *Suponhamos que um volume de gás em certo recipiente seja* $V=100cm^3$, *a temperatura seja* $T=90^oC$ *e a constante de proporcionalidade* $k=8$.
a) encontrar a taxa de variação instantânea da pressão P *por unidade de* T;
b) encontrar a taxa de variação instantânea de V *por unidade de* P.

Solução: De acordo com a lei do gás ideal para um gás comprimido vale a relação $PV=kT$.

Na questão a) do exercício estamos interessados na taxa de variação instantânea da pressão P por unidade de T, de modo que devemos escrever P em função de T e V. Isto é,

$$P\left(T,V\right)=\frac{kT}{V}$$

A taxa de variação instantânea da pressão P por unidade de T é dada pela derivada parcial

$$\frac{\partial P\left(T,V\right)}{\partial T}=\frac{k}{V}\text{ no ponto P}\left(90^{o},100\right)$$

Asssim,

$$\frac{\partial P\left(90^{o},100\right)}{\partial T}=\frac{8}{100}=0,0\,8.$$

Na questão b) do exercício estamos interessados na taxa de variação instantânea de V por unidade de P, de modo que devemos escrever V em função de T e P. Isto é,

$$V\left(T,P\right)=\frac{kT}{P}$$

A taxa de variação instantânea da pressão P por unidade de T é dada pela derivada parcial

$$\frac{\partial V\left(T,P\right)}{\partial P}=-\frac{kT}{P^{2}}\text{no ponto }P\left(90^{o},P\right)$$

Para determinar P usamos a relação

$$PV=kT$$

e obtemos

$$P=\frac{90\left(8\right)}{100}=7,2$$

Portanto,

$$\frac{\partial V\left(90,7.2\right)}{\partial P}=-\frac{8\left(90\right)}{\left(7.2\right)^{2}}=-13.\,889.$$

Exemplo 2.33. *A altura de um cone circular é de* $100cm$ *e decresce a razão de* $10cm/s$. *O raio da base é de* $50cm$ *e cresce a razão de* $5cm/s$. *Destermine a velocidade da variação do volume.*

Solução:

Primeiro vamos escrever o volume do cone em função do tempo:

$$V(t)=\frac{\pi r^{2}(t)h(t)}{3}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h}\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{2\pi rh}{3}(\frac{dr}{dt}) + \frac{\pi r^2}{3}\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{2\pi 50.100}{3}(5) + \frac{\pi(50)^2}{3}(-10)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{50000\pi}{3} - \frac{25000\pi}{3} = \frac{25000\pi}{3}$$

2.9. Diferencias Parciais e Totais

Para entender o significado das diferenciais parciais e total vamos examinar os exemplos.

Exemplo 2.34. *Consideremos um retângulo de lados x e y. Então a área desse retângulo é $A(x,y) = xy$.*

Considere a figura 2.12

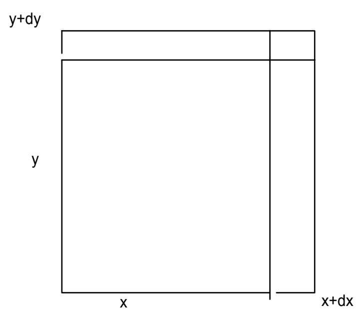


Figura 2.12:

Se ao lado x for dado um acréscimo infinitesimal dx a área do novo retângulo será

$$A'(x+dx,y) = (x+dx)\,y$$

$$A'(x+dx,y) = xy + ydx$$

$$A'(x+dx,y) = A(x,y) + ydx$$

$A'(x+dx,y)-A(x,y)=ydx$

A variação infinitesimal parcial
da área será

$dA_x = ydx$. Veja na figura 2.12.
Sendo $\dfrac{\partial A(x,y)}{\partial x} = y$ podemos escrever $dA_x = \dfrac{\partial A(x,y)}{\partial x}dx$.
Analogamente, a diferencial parcial em relação a y é dada por $dA_y = \dfrac{\partial A(x,y)}{\partial y}dy$.
Se aos lados x e y forem dados acréscimos infinitesimais dx e dy a área do novo retângulo será

$A'(x+dx,y+dy)=(x+dx)(y+dy)$

$A'(x+dx,y+dy)=xy+ydx+xdy+dxdy$

$A'(x+dx,y+dy)=A(x,y)+ydx+xdy+dxdy$

$A'(x+dx,y)-A(x,y)=ydx+xdy+dxdy$

A estimativa da variação total dA, da área será

$dA = ydx + xdy + dxdy$. Veja na figura 2.12

Sendo $\dfrac{\partial A(x,y)}{\partial x} = y$, $\dfrac{\partial A(x,y)}{\partial y} = x$ e o produto dos
infinitesimais dx e dy é desprezível, isto é $dxdy \approx 0$

podemos escrever $dA = \dfrac{\partial A(x,y)}{\partial x}dx + \dfrac{\partial A(x,y)}{\partial y}dy$.

Exemplo 2.35. *Consideremos um paralelepípedo de lados x, y e z. Então o volume deste paralelepípedo sera dado por $V(x,y,z)=xyz$.*

Desenvolvendo um raciocínio análogo ao do exemplo anterior obtemos

$V(x+dx,y,z)=(x+dx)yz$

$V'(x+dx,y,z)=xyz+yzdx$

$V'(x+dx,y,z)-V(x,y,z)=yzdx$

ou $dV_x = yzdx$ donde vem

$dV_x = \dfrac{\partial V\,(x,y,z)}{\partial x} dx$

Analogamente, obtemos $dV_x = \dfrac{\partial V\,(x,y,z)}{\partial x} dx$, $dV_y = \dfrac{\partial V\,(x,y,z)}{\partial y} dy$ e

$dV_z = \dfrac{\partial V\,(x,y,z)}{\partial z} dz$.

Se aos lados x e y forem dados acréscimos infinitesimais dx e dy o volume do novo paralelepípedo será

$$V'\,(x+dx, y+dy, z) = (x+dx)\,(y+dy)\,z$$

$$V'\,(x+dx, y+dy, z) = xyz + yzdx + xzdy + zdxdy$$

$$V'\,(x+dx, y+dy, z) = V\,(x,y,z) + yzdx + xzdy + zdxdy$$

$$dV_{xy} = yzdx + xzdy + zdxdy$$

O produto $zdxdy$ tende a zero. Logo, é desprezível e, portanto, a estimativa da variação infinitesimal parcial do volume do paralelepípedo após dado um acréscimo aos lados x e y será dada por

$$dV_{xy} = \frac{\partial V\,(x,y,z)}{\partial x} dx + \frac{\partial V\,(x,y,z)}{\partial y} dy$$

Finalmente, se aos lados x, y e z forem dados acréscimos infinitesimais dx, dy e dz o volume do novo paralelepipedo será

$$V'\,(x+dx, y+dy, z+dz) = (x+dx)\,(y+dy)\,(z+dz)$$

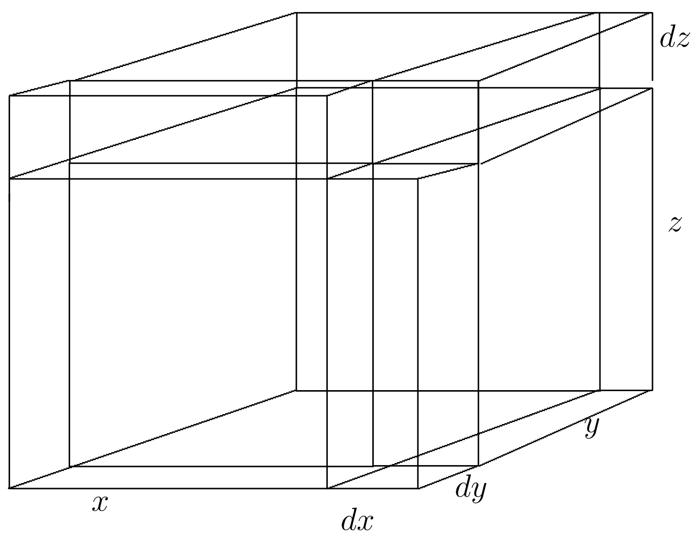
$$V'\,(x+dx, y+dy, z) = (xy + ydx + xdy + dxdy)\,(z+dz)$$

$$V'(x+dx, y+dy, z) = xyz + yzdx + xzdy + zdxdy + xydz + ydxdz + xdydz + dxdydz$$

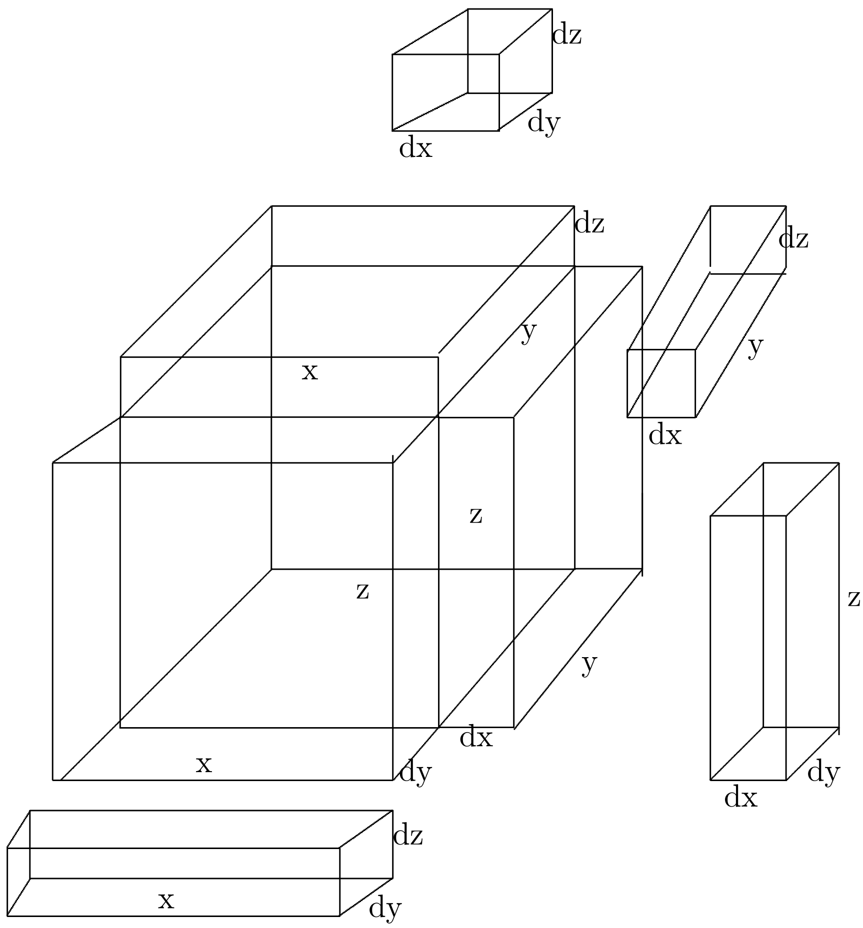
$$V'(x+dx, y+dy, z) - V(x, y, z) = yzdx + xzdy + zdxdy + xydz + ydxdz + xdydz + dxdydz$$

$$dV = yzdx + xzdy + zdxdy + xydz + ydxdz + xdydz + dxdydz$$

Nas figuras, a seguir, podemos ver, primeiro o parelelepípedo resultante dos acréscimos atribuídos a cada uma das variáveis e na sequências cada um dos volumes resultantes que compõe o DV.



Volumes resultantes em virtude dos acréscimos são vistos na figura abaixo



Os produtos $zdxdy$, $ydxdz$, $xdydz$ e $dxdydz$ tendem a zero. Logo, a soma

$zdxdy + ydxdz + xdydz + dxdydz$ é desprezível e, portanto, a estimativa da variação infinitesimal total do volume do paralelepípedo após dado um acréscimo aos lados x, y e z será dada por

$$dV = yzdx + xzdy + xydz$$

$$dV = \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x}dx + \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y}dy + \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z}dz$$

Geralmente, escreve-se

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

Seja $f\left(x,y,z\right)$ uma função então a diferencial total de f é dada por

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz$$

A diferencial total de uma função dá uma estimativa da variação da função quando dados acréscimos às variáveis independentes.

Exemplo 2.36. *Uma lata de metal fechada, na forma de um cilindro circular reto que possui altura interna igual a 6cm, raio interno 2cm e espessura 0,1cm. Usando diferencial total faça uma estimativa da quantidade de material necessário para fabricação dessa lata em cm*^{3}.

Solução: O volume exato de metal para fabricação da lata é a diferença entre o volume interno e o volume total da lata. Sejam h a altura interna, H a altura total r o raio interno e R o raio total. Então, teremos $h=6cm$, $H=6+2\left(0,1\right)=6,2cm$, $r=2cm$ e $R=2+0,1=2,1cm$. Seja v o volume interno e V o volume total. Temos, então

Volume Interno	Volume total
$v=\pi r^2h$	$V=\pi R^2H$
$v=\pi\left(2\right)^2 6$	$V=\pi\left(2,1\right)^2 6,2$
$v=24\pi cm^3$	$V=27,342\pi\text{cm}^3$

Portanto

$$\Delta V=V-v$$

$$\Delta V=3,342\pi cm^3$$

Porém, a estimativa do volume de material necessário para fabricar a lata, obtida através da diferencial total é:

$$dV=\frac{\partial v}{\partial r}dr+\frac{\partial v}{\partial h}dh$$

$$dV=2\pi rhdr+\pi r^2dh$$

$$dV=2\pi\left(2\right)\left(6\right)\left(0.1\right)+\pi\left(2\right)^2\left(0.2\right)=3.\,2\pi cm^3.$$

Note que a estimativa é dV menor do que ΔV, pois

$$\Delta V=\pi(r+dr)^2\left(h+dh\right)-\pi r^2h$$

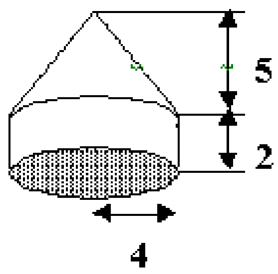


Figura 2.13:

$$\Delta V = \pi r^2 dh + 2\pi r dr h + 2\pi r dr dh + \pi \left(dr\right)^2 h + \pi \left(dr\right)^2 dh$$

$$\Delta V = \frac{\partial v}{\partial h} dh + \frac{\partial v}{\partial r} dr + 2\pi r dr dh + \pi \left(dr\right)^2 h + \pi \left(dr\right)^2 dh$$

Em função de ter sido desprezada a combinação

$$2\pi r dr dh + \pi \left(dr\right)^2 h + \pi \left(dr\right)^2 dh \text{ tem-se } dV < \Delta V.$$

Exemplo 2.37. *Usando diferencial, determine a variação do volume, do recipiente (ver figura* **??** *) quando a altura aumenta de 3% e o raio decresce de 1%.*

Solução:

$$V = V_1 + V_2$$

Onde $V_1 =$ cilindro e $V_2 =$Cone

dados do Cilindro : $R = 4$ e $h = 2$; $dR = \frac{-4}{100} = -0.04$; $dh = 2\frac{3}{100} = 0.06 \rightarrow V = \pi R^2 h$

dados do Cone: $R = 4$ e $H = 5; dR = \frac{-4}{100} - 0.04; dH = 0.15 \rightarrow V_2 = \frac{\pi R^2 h}{3}$

Portanto a diferencial de volume é igual a

$$
\begin{aligned}
dV + dV_1 &= \left[\frac{\partial V}{\partial R}dR + \frac{\partial V}{\partial h}dh\right] + \left[\frac{\partial V_1}{\partial R}dR + \frac{\partial V_1}{\partial H}dH\right] \\
&= [2\pi RhdR + \pi R^2 dh] + [\frac{2\pi Rh}{3}dR + \frac{\pi R^2}{3}dh] \\
& \quad [2\pi 4 * 2 * (-0,04) + \pi 16(0,06)] + [\frac{2\pi 4 * 5}{3}(-0,04) + \frac{\pi 16}{3}(0,15)] \\
&= [-0,64\pi + 0,96\pi] + [\frac{-1,6\pi}{3} + \frac{2,4\pi}{3}] = 0,32\pi + \frac{0,8}{3}\pi \cong 0,59\pi
\end{aligned}
$$

Exemplo 2.38. *Vamos considerar uma caixa com tampa, de forma cilindrica, com dimensões:* $r = 2cm$ *e* $h = 5$ *cm. O custo do material usado em sua confecção é de* $R\$$ $0,81$ *por* cm^2*.Se as dimensões sofrerem um acréscimo de* 10% *no raio e* 2% *na altura, pergunta-se:*

a. Qual o valor aproximado do acréscimo no custo da caixa?

b) Qual o valor exato do acréscimo no custo da caixa?

Solução

Podemos escrever a função custo como $C(r,h) = 0.81(2\pi rh + 2\pi r^2)$

onde $2\pi rh$ representa a área lateral da caixa e πr^2, a área da base ou tampa.

Quando o raio de base sofre um acréscimo de 10%, passa de 2 para $2,2$ cm, portanto $\Delta r = 0,2$

Quando a altura sofre um acréscimo de 2%, passa de $5cm$ para $5,1cm$, portanto, $\Delta h = 0,1$

Vamos usar a diferencial para encontrar o valor aproximado do acréscimo do custo. Portanto, temos:

$$dC = \frac{\partial C}{\partial r}dr + \frac{\partial C}{\partial h}dh$$

$$dC = 0,81(2\pi h + 4\pi r)dr + 0,81.2\pi rdh$$

$$dC = 0,81(2\pi 5 + 4\pi 2)0.2 + 0,81.2\pi 2.0,1 \approxeq 10,17$$

Portanto, o valor aproximado do acréscimo no custo da caixa quando as dimensões são modificadas é de $R\$10,17$, ou um acréscimo de $14,28\%$.

Para saber o valor exato do acréscimo no custo da caixa, temos que calcular:

$$
\begin{aligned}
\Delta C &= C(2,2;5,1) - C(2,5) \\
\Delta C &= 0.81(2\pi 2,2.5,1 + 2\pi(2,2)^2) - 0.81(2\pi 2.5 + 2\pi 2^2) \approxeq 10,47
\end{aligned}
$$

Assim, o valor exato é de $R\$10,47$, ou um acréscimo de $14,7\%$. Observamos, assim, que o erro do cálculo aproximado foi de $0,42\%$.

Exemplo 2.39. *Uma caixa em forma de paralelepípedo tem dimensões internas iguais a 6cm, 8cm e 12cm. Sendo a espessura das paredes 0,2cm, do fundo 0,3cm e da tampa 0,1cm, fazer uma estimativa aproximada em cm*^{3} *da quantidade de material necessário a ser usado na confecção da caixa.*

Solução: Vamos usar a diferencial total para fazer a estimativa solicitada. Sejam $x = 6$, $y = 8$ e $z = 12$. Como a espessura das paredes é 0,2cm tem-se $dx = dy = 2\,(0,2) = 0,4$ e sendo a espessura do fundo 0,3 e da tampa 0,1 tem-se $dz = 0,3 + 0,1 = 0,4$. Como $V = xyz$ segue que

$$
\begin{aligned}
dV &= \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz \\
&= yzdx + xzdy + xydz \\
&= 8\,(12)\,0,4 + 6\,(12)\,0,4 + 6\,(8)\,0,4 \\
&= 86,4cm^3
\end{aligned}
$$

Portanto, uma estimativa da quantidade de material necessário a ser usado na confecção da caixa é $dV = 86,4cm^3$.

2.10. Derivadas Parciais de Ordem Superior

Seja $z = f\,(x,y)$ que possui derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, também deriváveis. Cada uma dessas derivadas parciais pode ser novamente derivadas em relação a x e a y.

Notações

- $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ é a segunda derivada parcial de f em relação a x;
- $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)\right) = \dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}$ é a terceira derivada parcial de f em relação a x;

- $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ é a segunda derivada parcial de f primeiro em em

  relação a x e depois em relação a y;

- $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ é a segunda derivada parcial de f primeiro

  em relação a y e depois em relação a x;

- $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)\right) = \dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3}$ é a terceira derivada parcial de f em relação a y;

No caso da função f ter mais de duas variáveis a notação segue a mesma lógica. Por exemplo, se temos $f(x, y, z, t)$ tem-se

- $\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)\right)\right) = \dfrac{\partial^4 f}{\partial t \partial z \partial y \partial x}$ representa a quarta derivada de f,

  primeiro em relação a x depois em relação a y e assim sucessivamente.

Exemplo 2.40. *Seja* $f(x, y, z, t) = x^3 y^4 z^5 t^2$ *encontrar* $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial z \partial t}$.

Solução: Encontramos $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$ e $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial z \partial t}$, nessa ordem:

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, z, t) = 3x^2 y^4 z^5 t^2$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z, t) = 12x^2 y^3 z^5 t^2$
- $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}(x, y, z, t) = 60x^2 y^3 z^4 t^2$
- $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial z \partial t}(x, y, z, t) = 120x^2 y^3 z^4 t$.

Exemplo 2.41. *A equação* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ *é conhecida como a equação de Laplace em* R_2*.Mostre que a função*

$$u(x, y) = e^x seny + e^y \cos x$$

satisfaz a equação.

solução:

Seja $u = e^x \sin y + e^y \cos x$ temos as seguintes derivadas parciais:

$\frac{\partial u}{\partial y} = (\cos x)\, e^y + (\cos y)\, e^x$

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (\cos x)\, e^y - (\sin y)\, e^x$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= (\sin y)\, e^x - (\sin x)\, e^y \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= (\sin y)\, e^x - (\cos x)\, e^y \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= (\cos x)\, e^y + (\cos y)\, e^x \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= (\cos x)\, e^y - (\sin y)\, e^x
\end{aligned}$$

Vamos verificar se satisfaz a equação $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (\sin y)\, e^x - (\cos x)\, e^y + (\cos x)\, e^y - (\sin y)\, e^x = 0$ (cqd)

Exercícios

1. Seja $f(x, y, z) = x^3 y^4 z^5 + xsenyz$ encontre todas as derivadas parciais de f até a terceira ordem.

2. Seja $f(x, y) = e^x \ln y$ encontre todas as derivadas parciais de f até a segunda ordem.

3. Use a lei do gás comprimido $PV = kT$ com $k = 10$ para encontrar a taxa de variação instantânea da temperatura no instante em que o volume do gás é 120cm^3 e está sob uma pressão de $8din/cm^2$, a taxa de crescimento é 2cm$^3/s$, a pressão decresce a taxa de 0,1din/cm^2. Sugestão: escreva P, V e T em função do tempo t.

2.11. Extremos de uma Função de duas Variáveis

Seja f uma função de duas variáveis. Dizemos que f tem um máximo relativo no ponto (a, b) se existir um bola aberta de centro (a, b) e raio $r > 0$ tal que para todo (x, y) pertencente à bola tem-se $f(x, y) \leq f(a, b)$. Por outro lado se $f(x, y) \geq f(a, b)$ tal que para todo (x, y) pertencente dizemos que f tem um ponto de mínimo relativo no ponto (a, b).

Definição 2.42. *Os valores máximos e mínimos de f são denominados pontos extremos de f.*

Teorema 2.43. *A condição necessária para que um ponto (a, b) seja um ponto extremo de f é que $\dfrac{\partial f(a,b)}{\partial x}$.e $\dfrac{\partial f(a,b)}{\partial y}$ sejam nulas, ou não existam ou (a, b) pertença a fronteira do domínio de f.*

Ponto Crítico

Definição 2.44. *Seja* (a, b) *um ponto pertencente ao domínio de* f. *Se* $\dfrac{\partial f\,(a,b)}{\partial x}$.*e* $\dfrac{\partial f\,(a,b)}{\partial y}$ *são nulas ou não existirem então* (a, b) *é denominado ponto crítico de* f.

Ponto de Máximo e de Mínimo

Teorema 2.45. *Seja* (a, b) *um ponto pertencente ao domínio de* f. *Suponhamos que* $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *existem e são contínuas na bola aberta de centro* (a, b). *Suponhamos que* (a, b) *seja um ponto crítico e sejam ainda:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{vmatrix}$$

e

$$\Theta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$$

então se:

i) $\Delta > 0$ e $\Theta < 0$ *a função* f *tem um máximo relativo em* (a, b)*;*

ii) $\Delta > 0$ e $\Theta > 0$ *a função* f *tem um mínimo relativo relativo em* (a, b)*;*

iii) $\Delta = 0$ *nada podemos afirmar;*

iv) $\Delta < 0$ *a função* f *tem um ponto de sela em* (a, b).

Exemplo 2.46. *Encontre os pontos críticos da função* $f(x, y) = 4xy - x^4 - 2y^2$ *classificando-os.*

1. Vamos encontrar os pontos críticos:

   $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 4y - 4x^3 = 0$

   $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 4x - 4y = 0$

   $\begin{cases} 4x - 4y = 0 \\ 4y - 4x^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x - x^3 = 0 \Rightarrow x(1 - x^2) = 0$

   $x = 0$; $x = \pm 1$

   Logo os pontos críticos são:

   $P(0, 0)$ $Q(1, 1)$ e $R(-1, -1)$

2. Vamos analisar o delta

$$\triangle = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -12x^2 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix}$$

$\triangle(x, y) = 48x^2 - 16$

$\triangle(0, 0) = -16$

$\triangle(1, 1) = 32$

$\triangle(-1, -1) = 32$

3. Vamos analisar o valor de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = h(x, y) = -12x^2$

$h(0, 0) = 0$

$h(1, 1) = -12$

$h(-1, -1) = -12$

4. Conclusões

$\triangle(0, 0) < 0$ portanto o ponto (0,0) é de sela

$\triangle(1, 1) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$ portanto o ponto $(1, 1)$ é ponto de máximo

$\triangle(-1, -1) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$ portanto o ponto $(-1, -1)$ é ponto de máximo

Logo os pontos $(1, 1)$ e $(-1, 1)$ são pontos de máximos e o ponto $(0, 0)$ é um ponto de sela.

Exemplo 2.47. *Determine as dimensões de uma caixa retangular sem tampa destinada ao acondicionamento de $108cm^3$ de volume se queremos usar a mínima quantidade em material para sua confecção.*

Solução: Sejam x o comprimento da base, y a largura da base, z a altura, S a superfície e V o volume da caixa. Então podemos escrever o sistema

$$\begin{cases} S(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz \\ V(x, y, z) = xyz \text{ donde } z = \dfrac{V}{xy} \end{cases}$$

A função $S(x, y, z)$ pode ser escrita como uma função de duas variáveis, se z for substituido por $\dfrac{V}{xy}$. Desse modo temos

$$S(x, y) = xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}$$

Aplicando o teorema 2.43, vamos determinar os pontos críticos.

Inicialmente, pelo teorema 2.43 devemos resolver o sistema de equações $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$ para determinar os pontos críticos.

Temos então,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y - \dfrac{2V}{x^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x - \dfrac{2V}{y^2} \end{cases}$$

donde

$$\begin{cases} y - \dfrac{2V}{x^2} = 0 \\ x - \dfrac{2V}{y^2} = 0 \end{cases}$$

implica em

$$\begin{cases} yx^2 - 2V = 0 \\ xy^2 - 2V = 0 \end{cases}$$

donde vem $yx^2 = xy^2$, ou seja $x = y$. Portanto, $2V = x^3$.

Sendo $V = 108$, segue que $x = \sqrt[3]{2\,(108)} = 6$, $y = 6$. Logo, o ponto $(a,b) = (6,6)$ é ponto crítico da função $S(x,y) = xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}$.

Na sequência determinaremos os valores de $\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{vmatrix}$ e $\Theta = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$.

Temos,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{4V}{x^3} \quad \text{donde vem} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(6,6) = \frac{4\,(108)}{6^3} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1 \quad \text{donde vem} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(6,6) = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 1 \quad \text{donde vem} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(6,6) = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{4V}{y^3} \quad \text{donde vem} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(6,6) = \frac{4\,(108)}{6^3} = 2$$

Portanto,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \ \text{ e } \Theta = 2.$$

Como $\Delta = 3 > 0$ e $\Theta = 2 > 0$, pelo teorema 2.45, item ii) f tem um mínimo relativo no ponto $(6,6)$. Logo, as dimensões da base da caixa são $x = 6cm$ e $y = 6cm$. Sendo que $z = \dfrac{V}{xy}$ segue que $z = \dfrac{108}{6\,(6)} = 3$.

Portanto, as dimensões da caixa, para que o custo de fabricação seja mínimo, são $x = 6cm$ e $y = 6cm$ e $z = 3cm$

Exemplo 2.48. *Um fabricante faz 2 modelos de um item, padrão e de luxo. Custa R\$ $40,00$ para fabricar um modelo padrão e R\$ $60,00$ o de luxo. Uma firma de pesquisa de mercado estima que se o modelo padrão for vendido por x reais e o de luxo por y reais, então o fabricante venderá $500(y-x)$ do item padrão e $45000+500(x-2y)$ do de luxo a cada ano. Com que preços os itens devem ser vendidos para maximizar o lucro?*

Solução:

A Função lucro é dado por :

$$L(x,y) = 500(y-x)(x-40) + (45000 + 500(x-2y))(y-60)$$

Para encontrar os pontos críticos devemos fazer

$$\frac{\partial L(x,y)}{\partial x} = 0 \text{ e } \frac{\partial L(x,y)}{\partial y} = 0$$

e portanto temos:

$$\frac{\partial L(x,y)}{\partial x} = 1000y - 1000x - 10\,000 = 0$$

$$\frac{\partial L(x,y)}{\partial y} = 1000x - 2000y + 85\,000 = 0$$

Resolvendo este sistema temos:

$$\begin{cases} 1000y - 1000x - 10\,000 = 0 \\ 1000x - 2000y + 85000 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -1000x + 1000y = 10000 \\ 1000x - 2000y = -85000 \end{cases} : \begin{cases} x = 65 \\ y = 75 \end{cases}$$

Ponto Crítico $(65, 75)$

Vamos analisar se este ponto crítico é um ponto de máximo

$$\frac{\partial^2 L(x,y)}{\partial x^2} = -1000$$

$$\frac{\partial^2 L(x,y)}{\partial y^2} = -2000$$

1.

$$\frac{\partial^2 L(x,y)}{\partial x \partial y} = 1000$$

$$\frac{\partial^2 L(x,y)}{\partial y \partial x} = 1000$$

$$\triangle = \begin{vmatrix} -1000 & 1000 \\ 1000 & -2000 \end{vmatrix} = 10^6 > 0$$

e

$$\frac{\partial^2 L(x,y)}{\partial x^2} = -1000 < 0$$

Portanto o ponto $P(65, 75)$ é um ponto de máximo.

Logo o item padrão será vendido por R\$ $65,00$ e o de luxo por $R\$75,00$.

2.12. Exercícios Gerais

1. Usando a definição mostre que:
$\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} (3x+2y) = 8 \quad b) \quad \lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} (2x-4y) = -10$

2. verifique se o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ existe.

3. Em cada função verifique se f é contínua
$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \text{ se } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad b)\,(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x+y} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$f\,(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad d) f\,(x,y) = \begin{cases} \frac{3xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

4. Mostre que $z = sen\frac{x}{y} + \ln(\frac{y}{x})$ é solução da equação diferencial $y\frac{\partial z}{\partial y} + x\frac{\partial z}{\partial x} = 0$

5. Usando a regra da cadeia (funções compostas) encontre $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$
$a)\ f\,(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2+1} \qquad b)\ f\,(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2+1}$
$c) f\,(x,y) = \ln \sqrt[3]{(x^2+y^2) + (2x + y^2x^2)}$

6. Se $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ mostre que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$

7. Sendo $z = f(u)$ com $u = x + ay^2$ prove que $\frac{\partial z}{\partial y} - 2ay\frac{\partial z}{\partial x} = 0$

8. Se $z = \ln(x^2 + y^2)$ mostre que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$

9. Um pintor cobra $R\$12,00$ por m^2 para pintar as 4 paredes e o teto de uma sala. Se as medidas do teto são $12m$ e $15m$ e altura $30m$, com um erro de até $0,05m$ em todas as dimensões. Aproxime o erro, usando a diferencial, na estimativa do custo do trabalho, a partir dessas medidas.

10. A energia consumida num resistor elétrico é dada por $P = \frac{V^2}{R}$watts. Se $V = 120$ volts e $R = 12$ ohms, calcular através da diferencial um valor aproximado para a variação de energia quando V decresce de $0,001V$ e R aumenta de $0,02$ohms.

11. Um material está sendo escoado de um recipiente, formando uma pilha cônica, Num dado instante, o raio da base é de 12 cm e a altura é 8 cm . Obter uma aproximação da variação do volume, se o raio varia para $12,5$ cm e a altura para

$7,8$ cm. Comparar o resultado com a variação obtido com a variação exata do volume.

12. A areia é derramada num monte cônico na velocidade de $4m^3$ por minuto. Num dado instante, o monte tem $6m$ de diâmetro e 5 m de altura. Qual a taxa de aumento da altura nesse instante, se o diâmetro aumenta na velocidade de $2cm$ por minuto?$R \simeq 0,39$

13. A capidade vital V dos pulmões é o maior volume de ar que pode ser exalado após uma inalação de ar. Para um indivíduo do sexo masculino com x anos de idade e y cm de altura, V pode ser aproximada pela fórmula $V = 27,63y - 0.112xy$.Calcule e interprete (a)$\frac{\partial V}{\partial x}$ (b)$\frac{\partial V}{\partial y}$

14. A resistência R, em ohms, de um circuíto é dada por $R = \frac{E}{I}$, onde I é a corrente em amperes e E é a força eletromoriz em volts. Num instante, quando $E = 120V$ e $I = 15A$, E aumenta numa de velocidade $0,1V/s$ e I diminui à velocidade de $0,05A/s$. Encontre a taxa de variação instantânea de R. Re $s = \frac{1}{30}$

15. Um funil cônico de dimensões $h = 4$ m e $r = 3$ m será construído para auxiliar o armazenamento de grãos. Sabendo que o material utilizado na construção desse funil custa R\$ $150,00$ por m^2. Usando diferencial, responda qual será o acréscimo de custo na construção desse funil se aumentarmos seu raio em 5% e sual altura 3%.

16. Uma caixa em forma de paralelepípedo tem dimensões internas iguais a 7cm, 8cm e 13cm. Sendo a espessura das paredes 0,2cm, do fundo 0,3cm e da tampa 0,1cm, fazer uma estimativa aproximada em cm^3 da quantidade de material necessário a ser usado na confecção da caixa.

17. Precisa-se construir um tanque com a forma de um paralelepípedo para estocar $270m^3$ de combustível, gastando a menor quantidade de material em sua construção. Supondo que todas as paredes serão feitas com o mesmo material e terão a mesma espessura, determinar as dimensões do tanque.

18. Uma caixa retangular tem volume 20cm^3. O material usado nas laterais custa R\$ 1,00 por metro quadrado, o material usado o fundo custa R\$ 2,00 por metro quadrado e o material usado na tampa custa R\$ 3,00 por metro quadrado. Quais as dimensões da caixa para que o custo de confeção seja mínimo?$R = (2, 2, 5)$

19. Sejam $A(0,0), B(4,0)$ e $C(3,3)$ os vértices de um triângulo. Encontre o ponto $P\ (x,y)$ tal que a soma dos quadrados das distâncias do ponto P aos vértices seja a menor possível.

20. Determine as dimensões relativas de uma caixa retangular sem tampa destinada ao acondicionamento de o máximo possível de volume.

21. Uma firma de embalagem necessita fabricar caixas retangulares de $128cm^3$ de volume. Se o material da parte lateral custa a metade do material a ser usado para a tampa e para o fundo da caixa, determinar as dimensões da caixa que minimizam o custo.

22. Determinada empresa produz 2 produtos cujas quantidades são indicadas por x e y. Tais produtos são oferecidos ao mercado consumidor a preços unitários p_1 e p_2, respectivamente, que dependem de x e y, conforme equações $p_1 = 120 - 2x$ e $p_2 = 200 - y$ O custo total da empresa para produzir e vender quantidades x e y dos produtos é dado por $C = x^2 + 2y^2 + 2xy$.Admitindo que toda a produção seja absorvida pelo mercado, determine a produção que maximiza o lucro.$R = (10, 30)$

23. Uma loja vende dois tipos de casacos A e B. O casaco A custa \$ 40,00 e O casaco B custa \$ 50,00. Seja sendo x o preço de venda do casaco A e y o preço de venda do casaco B. O total de vendas feito pela loja foi $(3200 - 50x + 25y)$ para o casaco A e $(25x - 25y)$ para o casaco B. Encontre os valores de x e y para que o lucro seja máximo.$R = (84, 89)$

24. Uma loja vende dois tipos de produtos A e B. O produto tipo A custa \$ 50,00 e o produto tipo B custa \$ 60,00. Seja sendo x o preço de venda do produto tipo A e y o preço de venda do produto tipo B. O total de vendas feito pela loja foi $(-250x + 250y)$ para o produto tipo A e $32000 + 250\,(x - 2y)$ para o produto B. Encontre os valores de x e y para que o lucro seja máximo.$R = (89, 94)$

25. Alguns correios exigem que o perímetro da face superior de um pacote mais o comprimento da altura não exceda 84 cm, para que possa ser enviado. Determinar as dimensões do pacote retangular de maior volume que pode ser enviado. $R = (14, 14, 28)$

3. INTEGRAIS MÚLTIPLAS

Integrais duplas: Objetivos:

Ao final do capítulo espera-se que o aluno seja capaz de:

1. Encontrar o valor de uma integral dupla;
2. Interpretar geometricamente uma integral dupla;
3. Dada uma região delimitada por funções, encontrar os limitantes que permitem calcular o valor da integral dupla;
4. Calcular integrais duplas em coordenadas polares;
5. Resolver exercícios usando o Maple

Integrais triplas: Objetivos:

Ao final do capítulo espera-se que o aluno seja capaz de:

1. Encontrar o valor de uma integral tripla;
2. Interpretar geométrica e fisicamente uma integral tripla;
3. Calcular integrais triplas em coordenadas retangulares;
4. Calcular integrais triplas em coordenadas cilíndricas;
5. Calcular integrais triplas em coordenadas esféricas;
6. Mudar os limitantes de uma integral em coordenadas retangulares para cilindricas e de cilindricas para retangulares;
7. Mudar os limitantes de uma integral em coordenadas retangulares para esféricas e de esféricas para retangulares;
8. Calcular a área de uma superfície;
9. Fazer a maquete de uma figura delimitada por superfícies e encontrar seu volume.
10. Resolver exercícios usando o Maple.

A prova será composta por questões que possibilitam verificar se os objetivos foram atingidos. Portanto, esse é o roteiro para orientações de seus estudos. O modelo de formulação das questões é o modelo adotado na formulação dos exercícios e desenvolvimento teórico desse capítulo, nessa apostila.

3.1. Introdução

No estudo das funções de várias variáveis, ao calcularmos derivadas parciais escolhiamos uma das variáves independentes para derivar f em relação a ela e admitiamos que as demais eram constantes. O mesmo procedimento será adotado para integração múltipla.

Antes de estudarmos a integração múltipla propriamente dita vamos ver alguns exemplos.

Exemplo 3.1. *Encontrar a primitiva da função* $f(x,y) = 12x^2y^3$ *em relação à* x.

Solução: Como foi dito, vamos admitir y como constante e integrar em relação a x. Portanto,

$$\int 12x^2y^3dx = 4x^3y^3 + C$$

Porém, nesse caso, a constante C é uma função de y. Pode ser por exemplo, $C(y) = ay^3 + by^2 + cy + 3$ e uma das primitivas de $f(x,y) = 12x^2y^3$ será

$$F(x,y) = 4x^3y^3 + ay^3 + by^2 + cy + 3$$

Note que

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 12x^2y^3.$$

Exemplo 3.2. *Encontrar a primitiva da função* $f(x,y) = 12x^2y^3$ *em relação à* y.

Solução: Agora vamos admitir x como constante e integrar em relação a y. Portanto,

$$\int 12x^2y^3dy = 3x^2y^4 + K$$

Nesse caso, a constante K é uma função de x. Pode ser por exemplo, $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 3$ e uma outra primitiva de $f(x,y) = 12x^2y^3$ será $F(x,y) = 3x^2y^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 3$. Note que

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 12x^2y^3.$$

Exemplo 3.3. *Encontrar o valor da expressão* $\int_x^{x+1} 24xydy$.

Solução: Aplicando o teorema fundamental do cálculo vem:

$$\begin{aligned} \textstyle\int_x^{x+1} 24xydy &= 12xy^2|_x^{x+1} \\ &= 12x\left(x+1\right)^2 - 12x\left(x\right)^2 \\ &= 12x^3 + 24x^2 + 12x - 12x^3 \\ &= 24x^2 + 12x \end{aligned}$$

Como podemos observar $\int_x^{x+1} 24xydy$ é uma função de x. Isto é, $F(x) = \int_x^{x+1} 24xydy$ donde $F(x) = 24x^2 + 12x$.

Exemplo 3.4. *Encontrar o valor numérico de* $\int_1^2 F(x)\,dx$ *sendo* $F(x) = \int_x^{x+1} 24xydy$.

Solução: No exemplo anterior vimos que

$$F(x) = \int_x^{x+1} 24xydy = 24x^2 + 12x$$

Portanto, aplicando do teorema fundamental do cálculo vem

$$\begin{aligned} \textstyle\int_1^2 F(x)\,dx &= \textstyle\int_{x=1}^{x=2} \left(24x^2 + 12x\right)dx \\ &= \left(8x^3 + 6x^2\right)|_1^2 \\ &= 8(2)^3 + 6\left(2\right)^2 - \left(8\left(1\right)^3 + 6\left(1\right)^2\right) \\ &= 74 \end{aligned}$$

Os exemplo 3.3 e 3.4 podem ser escritos como segue:

$$\int_1^2 F(x)\,dx = \int_1^2 \left(\int_x^{x+1} 24xydy\right)dx$$

ou

$$\int_1^2 F(x)\,dx = \int_1^2 \int_x^{x+1} 24xydydx$$

Dessa forma, obtemos um exemplo de integral dupla. Note que a variável dependente é a primeira a ser integrada e a variável independente a última. O processo de solução é dado abaixo:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \int_x^{x+1} 24xydydx &= \int_1^2 \left(\int_{y=x}^{y=x+1} 24xydy\right) dx \\
&= \int_1^2 \left(12xy^2|_{y=x}^{y=x+1}\right) dx \\
&= \int_1^2 \left(24x^2 + 12x\right) dx \\
&= \left(8x^3 + 6x^2\right)|_1^2 \\
&= 74
\end{aligned}$$

Vejamos outro exemplo.

Exemplo 3.5. *Encontrar o valor da integral* $\int_0^4 \int_x^{3x} 3\sqrt{16-x^2}dydx$.

Solução: Aplicando o teorema fundamental do cálculo primeiro integrando em relação a y e depois em relação a x.

$$\int_0^4 \int_x^{3x} 3\sqrt{16-x^2}dydx$$

$$= \int_0^4 \left(3\sqrt{16-x^2}y\right)|_x^{3x} dx$$

$$= \int_0^4 \left(3\sqrt{16-x^2}\right)(3x-x)\,dx$$

$$= \int_0^4 6x\sqrt{16-x^2}dx$$

$$= -2\sqrt{(16-x^2)^3}|_0^4$$

$$= -2\sqrt{(16-4^2)^3} - \left(-2\sqrt{(16-0^2)^3}\right) = 128$$

Portanto, o valor da integral $\int_0^4 \int_x^{3x} 3\sqrt{16-x^2}dydx = 128$

Exercícios

Nos problemas abaixo calcule a integral dupla

$a)\ \int_0^1 \int_x^{3x+1} xydydx \qquad b)\ \int_0^1 \int_y^{3y+1} xy^2dxdy$

$c)\ \int_0^4 \int_0^1 xe^{xy}dydx \qquad d)\ \int_0^2 \int_{\ln y}^{y^2} ye^{xy}dxdy$

$e)\ \int_0^{\pi} \int_0^{y^2} sen\frac{x}{y}dxdy \qquad f)\ \int_0^{\ln 2} \int_0^{y} xy^5e^{x^2y^2}dxdy$

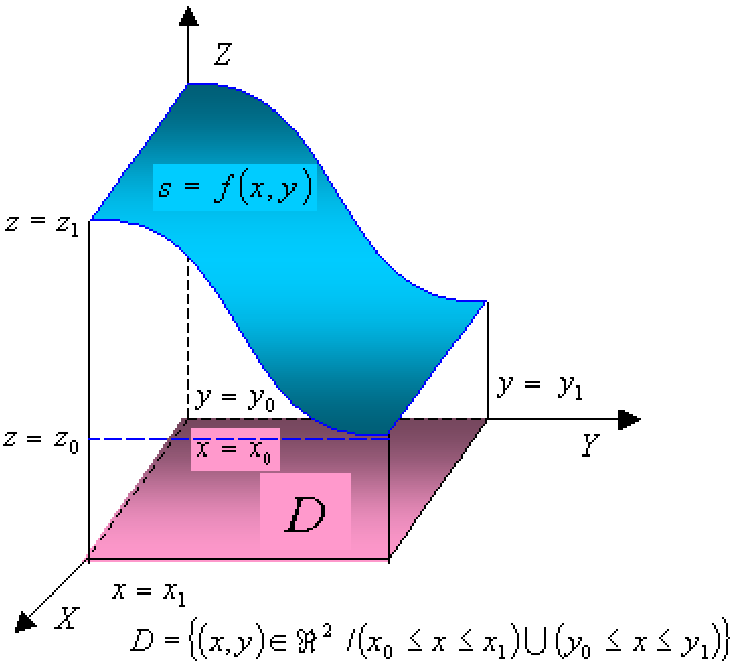


Figura 3.1:

3.2. Interpretação Geométrica da Integral Dupla

A definição de integral dupla comporta uma interpretação geométrica análoga à definição de integral definida simples, associando-a ao problema de cálculo de volume (ver figura 3.1) da mesma forma que a integral definida é associada ao cálculo de área. Assim, definição formal da integral dupla envolve a soma de muitas áreas elementares, isto é, diferenciais de área , ou seja, , com a finalidade de obter-se uma quantidade total após esta operação. Assim, pode usar-se a integral para resolver problemas concernentes a volumes e a áreas.

Ao tentar resolver-se “o problema do volume” , sabe-se que se trata área da base vezes a altura é tal que para cada área elementar o valor de fica univocamente definido.

Consideremos uma função $z = f(x, y) \geq 0$, definida numa região R do plano xy. Nossa intensão é estimar o volume aproximado do sólido delimitado por $z = f(x, y)$ acima do plano $z = 0$ e pelo cilindro definido pela curva fechada que delimita a região R. Para tanto, subdividimos R em $n-$subregiões traçando linhas paralelas aos planos coordenados, conforme na figura 3.2 e 3.3.Assim, a integral será o volume obtido pela soma de uma infinidade de volumes das colunas infinitesimais inscritas em forma de paralelepípedos, como mostra a Figura 3.3.

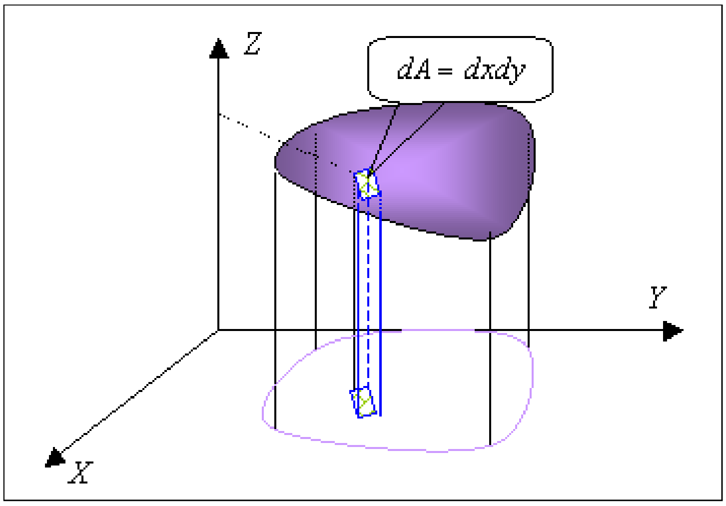


Figura 3.2:

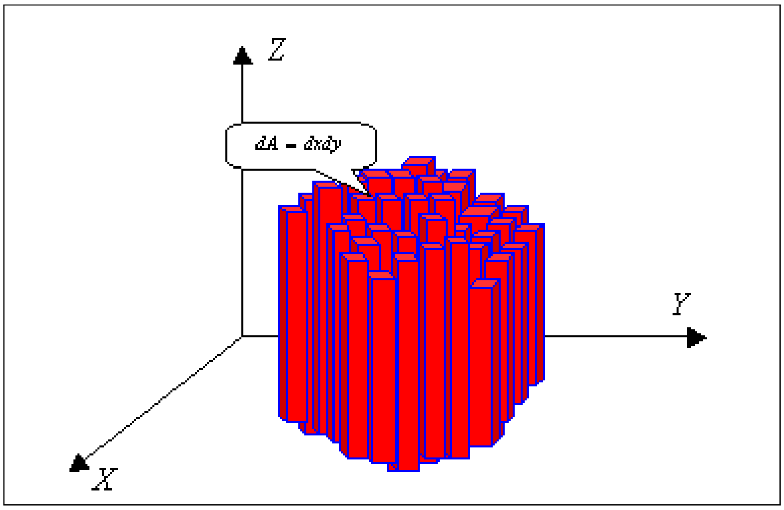


Figura 3.3:

Então $\{R_1, R_2, ..R_i...R_n\}$é uma partição de R. Seja $|P|$ o comprimento da maior de todas as diagonais dos R_n subretângulos.

Seja A_i a área da subregião R_i Para cada i escolhenos um ponto $(x_i, y_i) \in R_i$. O produto $V_i = f(x_i, y_i) A_i$ é o volume do $i-$ ésimo paralelepípedo de área A_i e altura

$f(x_i, y_i)$. Como há $n-$ subdivisões, há $n-$paralelepípedos. Assim, o volume aproximado do sólido delimitado superiormente por $f(x, y)$ e inferiormente pela região R é dado por

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, A_i$$

A integral dupla de uma função f definida numa região R é dada por

$$\iint_R f(x, y)\, dxdy = \lim_{|P| \to 0} V_n = \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, A_i$$

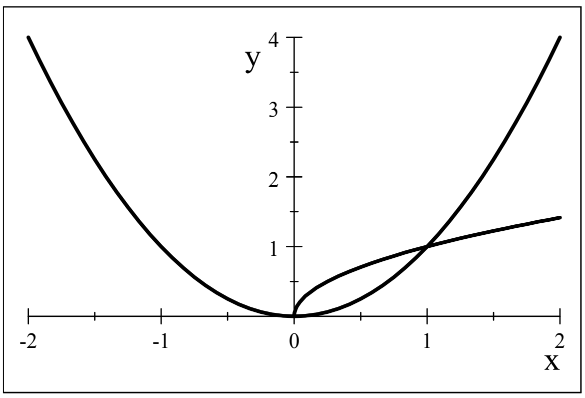
Observação 5. *Se $f(x, y) = 1$ então $\iint_R f(x, y)\, dxdy = \iint_R dxdy$ é, geometricamente, a área da região R.*

3.3. Cálculo da Integral Dupla

Saber reconhecer o domínio de integração ou região de integração é fundamental para o cálculo das integrais duplas. Outro ponto importante é o reconhecimento das curvas que delimitam a região de integração. Muitas vezes é conveniente ter essas curvas escritas em função de x, isto é, $y = f(x)$ e outras vezes é conveniente ter x como função de y, isto é $x = f(y)$. Essa conveniência é devido ao maior ou menor trabalho exigido no processo do cálculo do valor numérico. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.6. *Calcular o valor da integral $\iint_R 24xy\, dxdy$ sendo R a região delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.*

Solução: Primeiro vamos fazer o gráfico da região e a tabela de limites dessa região.



Curvas	funções
curva à esquerda	$x = 0$
curva à direita	$x = 1$
curva inferior	$y = x^2$
curva superior	$y = \sqrt{x}$

Agora podemos efetuar os cáculos. A curvas à esquerda e à direita são os limites que integram o primeiro símbolo de integração e as curvas inferior e superior o segundo. Assim,

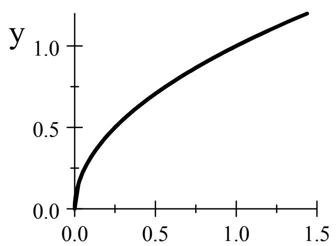
$$\begin{aligned}
\int\int_R 24xydxdy &= \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} 24xydydx \\
&= \int_{x=0}^{x=1} 12xy^2|_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx \\
&= \int_{x=0}^{x=1} 12x\left[\left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(x^2\right)^2\right] dx \\
&= \int_{x=0}^{x=1} \left(12x^2 - 12x^5\right) dx \\
&= \left(4x^3 - 2x^6\right)|_{x=0}^{x=1} \\
&= 2
\end{aligned}$$

O cálculo da integral no exemplo 3.6 foi feito tomando x como variável independente.

Vamos calcular a mesma integral tomando y como variável independente.

Exemplo 3.7. *Calcular o valor da integral* $\iint\limits_R 24xydxdy$ *sendo* R *a região delimitada pelas curvas* $x = y^2$ *e* $x = \sqrt{y}$.

Solução: Primeiro vamos fazer o gráfico da região e a tabela de limites dessa região.



Curvas	funções
curva à esquerda	$y = 0$
curva à direita	$y = 1$
curva inferior	$x = y^2$
curva superior	$x = \sqrt{y}$

Agora podemos efetuar os cáculos. A curvas à esquerda e à direita são os limites do primeiro símbolo de integração e as curvas inferior e superior do segundo. Assim,

$$\iint_R 24xydxdy = \int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} 24xydxdy$$

$$= \int_0^1 12yx^2|_{y^2}^{\sqrt{y}} dy$$

$$= \int_0^1 12y \left[(\sqrt{y})^2 - \left(y^2\right)^2\right] dy$$

$$= \int_0^1 \left(12y^2 - 12y^5\right) dy$$

$$= \left(4y^3 - 2y^6\right)|_{y=0}^{y=1} = 2$$

Como podemos observar, o valor numérico é o mesmo nos dois casos.

Muitas vezes a região de integração não é delimitada apenas por quatro curvas. Nesse caso, a escolha da variável independente adequada pode diminuir o trabalho duante o processo de integração. Vejamos um exemplo.

Exemplo 3.8. *Encontrar o valor da integral* $\iint_R dxdy$ *sendo* R *a região delimitada pelas curvas* $y = x^2$*(internamente),* $y = 6 - x$ *e* $y = 1$*.*

a) *Tomando x como variável independente.*

b) *Tomando y como variável independente.*

Solução: Primeiro vamos fazer o gráfico da região (ver figura 3.4) e a tabela de limites dessa região.

Os pontos de interseção das curvas são: $(-3, 9)$ e $(2, 4)$ para as curvas $y = x^2$, $y = 6 - x$ e $(-1, 1)$ e $(1, 1)$ para as curvas $y = x^2$ e $y = 1$.

$a)$ Tomamdo x como variável independente. Vemos que a região de integração deve ser subdividida em três sub-regiões para que o cálculo possa ser efetivado. Portanto, a tabela de limites é dada por

Tabela de limites referente à região R

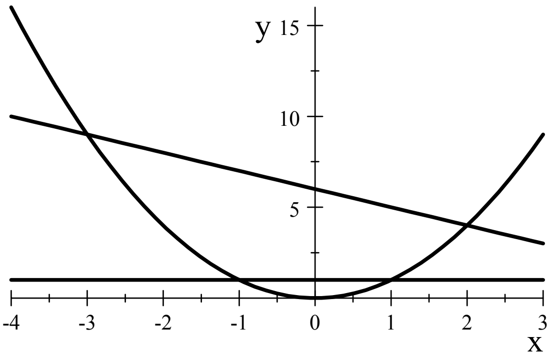


Figura 3.4: área delimitada

Limites	R_1	R_2	R_3
curva à esquerda	$x=-3$	$x=-1$	$x=1$
curva à direita	$x=-1$	$x=1$	$x=2$
curva inferior	$y=x^2$	$y=1$	$y=x^2$
curva superior	$y=6-x$	$y=6-x$	$y=6-x$

Assim, a integral dupla $\int\int_R dxdy$ será dada por :

$$\int\int_R xdxdy = \int\int_{R_1} dxdy + \int\int_{R_2} dxdy + \int\int_{R_3} dxdy$$

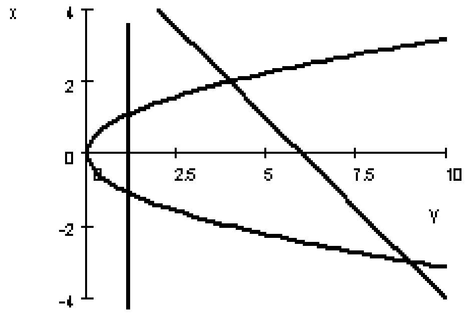
$$= \int_{-3}^{-1}\int_{x^2}^{6-x} dydx + \int_{-1}^{1}\int_{1}^{6-x} dydx + \int_{1}^{2}\int_{x^2}^{6-x} dydx$$

$$= \int_{-3}^{-1} y|_{x^2}^{6-x} dx + \int_{-1}^{1} y|_{1}^{6-x} dx + \int_{1}^{2} y|_{x^2}^{6-x} dx$$

$$= \int_{-3}^{-1} \left(6-x-x^2\right) dx + \int_{-1}^{1} (6-x-1)\, dx + \int_{1}^{2} \left(6-x-x^2\right) dx$$

$$= \frac{22}{3} + 10 + \frac{13}{6} = \frac{39}{2}$$

b) Tomamdo y como variável independente, os pontos de interseção das curvas são: $(9,-3)$ e $(4,2)$ para as curvas $x=\pm\sqrt{y}$, $x=6-y$ e $(1,-1)$ e $(1,1)$ para as curvas $x=\pm\sqrt{y}$ e $y=1$. A representação gráfica da região R é dada abaixo.



Vemos que a região de integração deve ser subdividida em duas sub-regiões para que o cálculo possa ser efetivado. Portanto, a tabela de limites é dada por

Tabela de limites referente à região R

Limites	R_1	R_2
curva à esquerda	$y = 1$	$y = 4$
curva à direita	$y = 4$	$y = 9$
curva inferior	$x = -\sqrt{y}$	$x = -\sqrt{y}$
curva superior	$x = \sqrt{y}$	$x = 6 - y$

Assim, a integral dupla $\int\int_R dxdy$ será dada por

$$\int\int_R dxdy = \int\int_{R_1} dxdy + \int\int_{R_2} dxdy$$

$$= \int_1^4 \int_{x=-\sqrt{y}}^{x=\sqrt{y}} dxdy + \int_4^9 \int_{-\sqrt{y}}^{6-y} dxdy$$

$$= \int_1^4 x|_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dy + \int_4^9 x|_{-\sqrt{y}}^{6-y} dy$$

$$= \int_1^4 (\sqrt{y} - (-\sqrt{y}))\, dy + \int_4^9 (6 - y - (-\sqrt{y}))\, dy$$

$$= \frac{61}{6} + \frac{28}{3} = \frac{39}{2}$$

Observação 6. *Note que a mudança da variável independente diminuiu o trabalho dispensado ao cálculo da integral.*

Exemplo 3.9. *Escreva a integral que representa a área da região delimitada pelas curvas* $x = y^2$, $y - x = 1$, $y = 1$ *e* $y = -1$

a. Tomando x como variável independente

b. Tomando y como variável independente

Solução: A área delimitada pelas curvas pode ser vista na figura 3.5

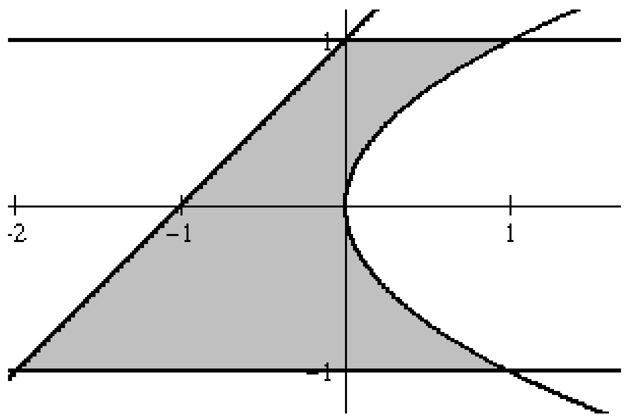


Figura 3.5: área delimitada

Inicialmente, vamos encontrar os pontos de interseção

$$\begin{cases} x = y^2 \\ y = 1 \end{cases} P(1,1) \begin{cases} x = y^2 \\ y = -1 \end{cases} Q(1,-1) \begin{cases} y = 1 + x \\ y = -1 \end{cases} R(-2,-1)$$

a. tomando x como variável independente

Tabela de limites referente à região R

Limites	R_1	R_2
curva à esquerda	$x = -2$	$x = 0$
curva à direita	$x = 0$	$x = 1$
curva inferior	$y = -1$	$y = \sqrt{x}$
curva superior	$y = 1 + x$	$y = 1$

Ps: Na R_2 vamos usar a semetria

$$A = \int_{-2}^{0} \int_{-1}^{1+x} dydx + 2 \int_{0}^{1} \int_{\sqrt{x}}^{1} dydx = \frac{8}{3}$$

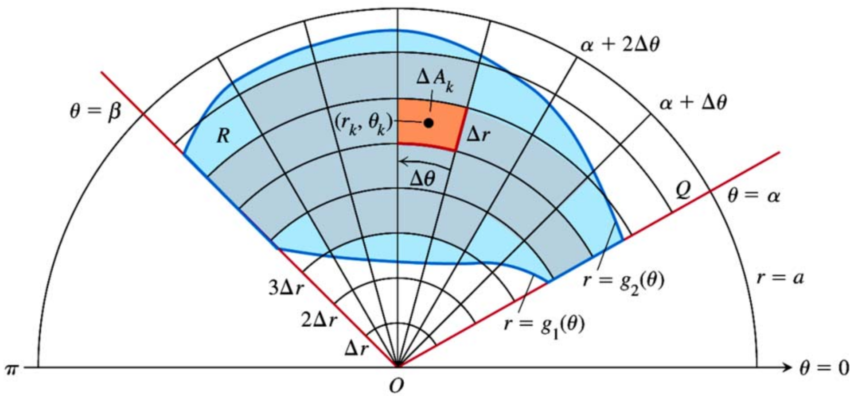
b. Tomando y como variável independente.

Limites	R_1
curva à esquerda	$y=-1$
curva à direita	$y=1$
curva inferior	$x=y-1$
curva superior	$x=y^2$

$$A=\int_{-1}^{1}\int_{y-1}^{y^2}dxdy=\frac{8}{3}$$

3.4. Integrais Duplas em Coordenada Polares

Frequentemente, a região R sobre a qual está sendo calculada a integral dupla é mais facilmente descrita por coordenadas polares do que por coordenadas retangulares. Vamos descrever o processo para o cáculo de integrais duplas em coordenadas polares. Veja a figura **??**



Partição em coordenadas polares

Seja $X=\{\alpha=\theta_0,\alpha+\Delta\theta,\alpha+2\theta,\alpha+3\Delta\theta,...,\theta_n=\beta\}$ uma partição do arco $\widehat{\alpha\beta}$. Consideremos as curvas de raio ρ_{i-1}e ρ_i e a sub-região R_i de R delimitada pelas curvas de raio ρ_{i-1}, ρ_i, θ_{i-1} e θ_i. A forma de R_i é aproximadamente um retângulo de lados $\Delta\rho_i$, $l_{i-1}=\rho_{i-1}\Delta\theta_i$ e $l_i=\rho_i\Delta\theta_i$. Podemos admitir que uma aproximação da área de R_i é dada por $A_i=\Delta\rho_i\rho_i\Delta\theta_i$. Tomando um ponto $(\rho_{k_i},\theta_{k_i})$ no interior de R_i podemos formar um sólido cuja área da base é A_i e altura $f(\rho_{k_i},\theta_{k_i})$, de modo que o volume desse sólido será dada por

$$V_i=f(\rho_{k_i},\theta_{k_i})\,\Delta\rho_i\rho_i\Delta\theta_i$$

Assim, o volume sob a superfície $f(\rho, \theta)$ será aproximada pela soma

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} f(\rho_{k_i}, \theta_{k_i}) \Delta\rho_i \rho_i \Delta\theta_i$$

Seja $|P|$ a diagonal da maior região R_i da partição de R. Então, se $|P| \to 0$ segue que $\Delta\rho_i \to 0$, $\Delta\theta_i \to 0$, $\rho_{k_i} \to \rho$, $\theta_{k_i} \to \theta$ e $\rho_i \to \rho$. Portanto, podemos escrever

$$V = \lim_{|P|\to 0} V_n = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\rho_{k_i}, \theta_{k_i}) \Delta\rho_i \rho_i \Delta\theta_i \text{ ou}$$

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta$$

Observação 7. *Vimos anteriormente que a partição de uma região R por retas paralelas aos eixos x e y geram sub-regiões retangulares cujos lados são Δx_i e Δy_i e área $A_i = \Delta x_i \Delta y_i$. Pergunta-se: as áreas $A_i = \Delta x_i \Delta y_i$ e $A_i = \Delta\rho_i \rho_i \Delta\theta_i$ são iguais? É claro que não. Porém, $\dfrac{\lim\limits_{\Delta x \Delta y \to 0} \Delta x_i \Delta y_i}{\lim\limits_{\Delta\rho\Delta\theta \to 0} \Delta\rho_i \rho_i \Delta\theta_i} = 1$ e isso implica em $dxdy = \rho d\rho d\theta$. Assim, a equivalência entre a integral dupla em coordenadas retangulares e a integral dupla em coordenadas polares é dada por*

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dxdy = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta$$

Exemplo 3.10. *Escreva a integral, em coordenadas polares, que calcula a área sombreada 3.6*

Solução:
círculo 1: $x^2 + y^2 = 4$ (em cartesianas) $\rho = 2$ (em polar)
círculo2: $(x-2)^2 + y^2 = 4$ (em cartesianas) $\rho = 4\cos\theta$ (em polar)
a intersecção dos dois: $\cos\theta = \frac{1}{2} \to \theta = \frac{\pi}{3}$
A área é

$$A = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \int_{2}^{4\cos\theta} \rho d\rho d\theta$$

em coordenadas polares

Exemplo 3.11. *Encontre a área delimitada pelas curvas $\rho = 2$ e $\rho = 4sen\theta$ exterior à curva $\rho = 2$.*

Solução: O gráfico dessas curvas é dada pela figura 3.7

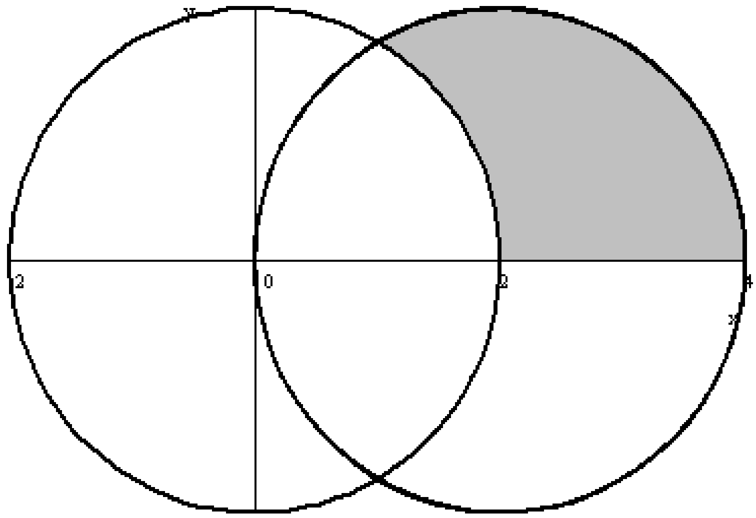


Figura 3.6: área sombreada

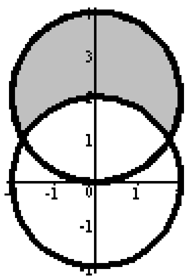


Figura 3.7: área delimitada

Agora, o primeiro passo é encontrar os pontos de interseção das curvas. Portanto, igualando as equações temos

$$4sen\theta = 2$$
$$sen\theta = \frac{1}{2}$$
assim obtemos
$$\theta = \frac{\pi}{6} \text{ ou } \theta = \frac{5\pi}{6}$$
A tabela de limites é dada por

Limites	R_1
arco inferior	$\alpha = \frac{\pi}{6}$
arco superior	$\beta = \frac{5\pi}{6}$
raio menor	$\rho = 2$
raio maior	$\rho = 4sen\theta$

A área da região é dada por

$$\begin{aligned} A &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \int_{2}^{4sen\theta} \rho d\rho d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{\rho^2}{2}|_{2}^{4sen\theta} d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{(4sen\theta)^2}{2} - \frac{2^2}{2} d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left(8sen^2\theta - 2\right) d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left(\frac{8(1-\cos 2\theta)}{2} - 2\right) d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left(4 - 4\cos 2\theta - 2\right) d\theta \\ &= \left(2\theta - 2\frac{sen2\theta}{}\right) |_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \\ &= \left(2\left(\frac{5\pi}{6}\right) - 2sen2\frac{5\pi}{6} - \left(2\left(\frac{\pi}{6}\right) - 2sen2\frac{\pi}{6}\right)\right) \\ &= \frac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

3.5. Exercícios Gerais

1. Nos items a e b, faça o gráfico, a tabela de limites e escrva a integral que permite calcular a área da região R delimitada pelas curvas primeiro tomando x como variavel independente e após tomando y como variável independente.

    1. Sendo R a região delimitada pelas curvas $y = x^2 - 1$, $y = 1 - x$, $y = \frac{4x}{3} + 12$ e $y = 12 - \frac{9x}{2}$.
    2. Sendo R a região delimitada pelas curvas $y = \frac{4x}{3} + \frac{8}{3}$, $y = -2 - x$, $y = \frac{x}{2} - 2$ e $y = \frac{16}{3} - \frac{4x}{3}$.

2. Nos problemas a seguir faça o gráfico e use coordenadas polares para carcular as integrais

    1. $\iint\limits_R \sqrt{14 - x^2 - y^2} dxdy$ sendo R a região dada por $4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$.
    2. $\iint\limits_R \sqrt{14 - x^2 - y^2} dxdy$ sendo R a região dada por $x^2 + y^2 \leq 4$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$.
    3. $\int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} e^{-x^2-y^2} dydx$

4. $\int_0^2 \int_{y=0}^{y=-\sqrt{4-x^2}} \frac{dydx}{4+\sqrt{x^2+y^2}}$

5. $\int\int_R \frac{1}{(x^2+y^2)^3} dxdy$ sendo R dada por $4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$.

4. INTEGRAIS TRIPLAS

4.1. Introdução

As integrais triplas, aplicadas sobre sólidos no espaço xyz, são definidas segundo uma analogia com a definição das integrais duplas aplicadas sobre uma região do plano xy. Não é nosso objetivo discutir os pormenores da definição pois estes fazem parte do conteúdo de um texto de cálculo avançado. Vamos esboçar apenas as idéias principais.

Definição 4.1. *Seja um sólido S no espaço tridimensional, por exemplo, um paralelepípedo, um elipsóide, uma esfera etc, e $f : S \to \mathbb{R}$ uma função de três variáveis definida sobre cada ponto de $(x, y, z) \in S$ definimos integral tripla (se existir) como sendo*

$$\iiint\limits_S f(x, y, z)\, dxdydz$$

4.2. Interpretação geométrica da integral tripla

Para fixar as idéias vamos supor que o sólido S é um paralelepípedo. Uma partição desse paralelepípedo é obtida seccionando-o com $n-$planos paralelos aos eixos coordenados, conforme ilustra a figura 4.1

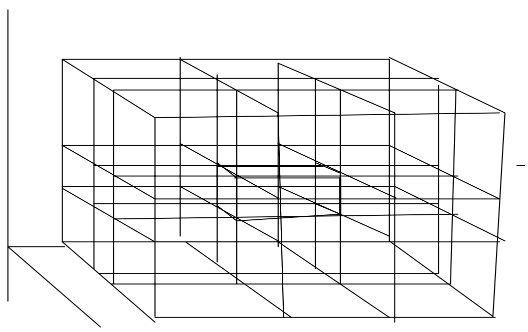


Figura 4.1:

O fracionamento de S obtido pela partição é um conjunto de sub-parelelepípedos chamados células da partição. Suponhamos que uma $i-$célula tenha dimensões $\Delta x_i, \Delta y_i$ e Δz_i, Então, o volume dessa $i-$célula é $V_i = \Delta x_i \Delta y_i \Delta x_i$. Seja (x_i^*, y_i^*, z_i^*) um ponto qualquer da $i-$célula e seja $f : S \to \mathbb{R}$ a função densidade em cada ponto de S, então uma estimativa da massa da $i-$célula é $m_i = f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\, \Delta x_i \Delta y_i \Delta x_i$ e, desse modo uma estimativa da massa do sólido S será

$$m_n = \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*, y_i^*, z_i^*\right) \Delta x_i \Delta y_i \Delta x_i$$

Seja $|N|$ a célula de maior diâmetro da partição de S então a massa m do sólido S será dada por

$$m = \lim_{|N| \to 0} m_n = \lim_{|N| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*, y_i^*, z_i^*\right) \Delta x_i \Delta y_i \Delta x_i$$

ou

$$m = \iiint\limits_{S} f\left(x, y, z\right) dxdydz$$

Observação 8. *Se $f\left(x, y, z\right) = 1$ então a massa m e o volume V do sólido tem o mesmo valor numérico. Portanto, o volume do sólido em termos de integrais triplas é dado por*

$$V = \iiint\limits_{S} dxdydz$$

4.3. Cálculo da integral tripla em coordenadas retangulares

Seja S um sólido no espaço delimitado pelas curvas $x = a$, $x = b$, $y = y_1(x)$ e $y = y_2(x)$ e pelas superfícies $z = f(x, y)$ e $z = g(x, y)$ em que $f(x, y) \leq g(x, y)$ para todo par (x, y)conforme tabela de limites abaixo sobre a qual desejamos encontrar a integral tripla com respeito a função $f\left(x, y, z\right)$ definida em todos os pontos de S. Então podemos enunciar as seguintes tabelas de limites

Tabela de limites

Curvas	equações
Curva à esquerda	$x = a$
Curva à direita	$x = b$
Curva inferior	$y = y_1(x)$
Curva superior	$y = y_2(x)$
Superfície inferior	$z = f(x, y)$
Superfície superior	$z = g(x, y)$

Assim, a integral tripa tem forma

$$\iiint\limits_{S} f\left(x, y, z\right) dxdydz = \int_{a}^{b} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{f(x,y)}^{g(x,y)} f\left(x, y, z\right) dzdydx$$

Exemplo 4.2. *Determine o volume do sólido delimitado pelos planos* $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$ *e* $y + \frac{x}{2} + \frac{z}{4} = 2$

Solução: vamos fazer um esboço do sólido, conforme figura 4.2

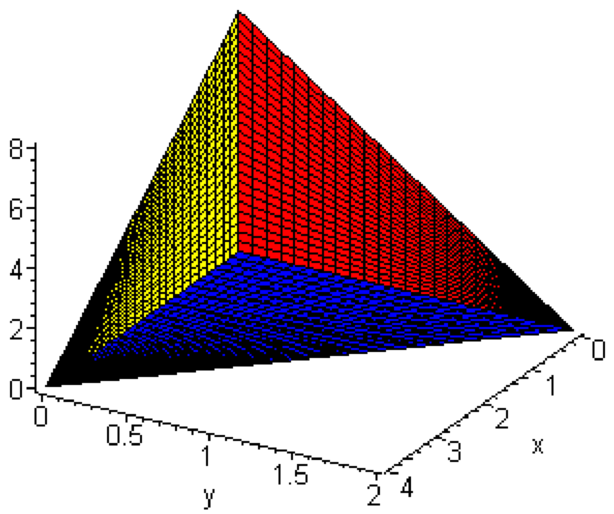


Figura 4.2: volume delimitado

Agora, vamos escolher o plano xy (ver figura 4.3) para fazer a projeção (poderia ser outro)

Limites	R_1
à esquerda	$x = 0$
à direita	$x = 4$
curva inf	$y = 0$
curva sup	$y = 2 - \frac{x}{2}$
sup inf	$z = 0$
sup sup	$z = 4(2 - \frac{x}{2} - y)$

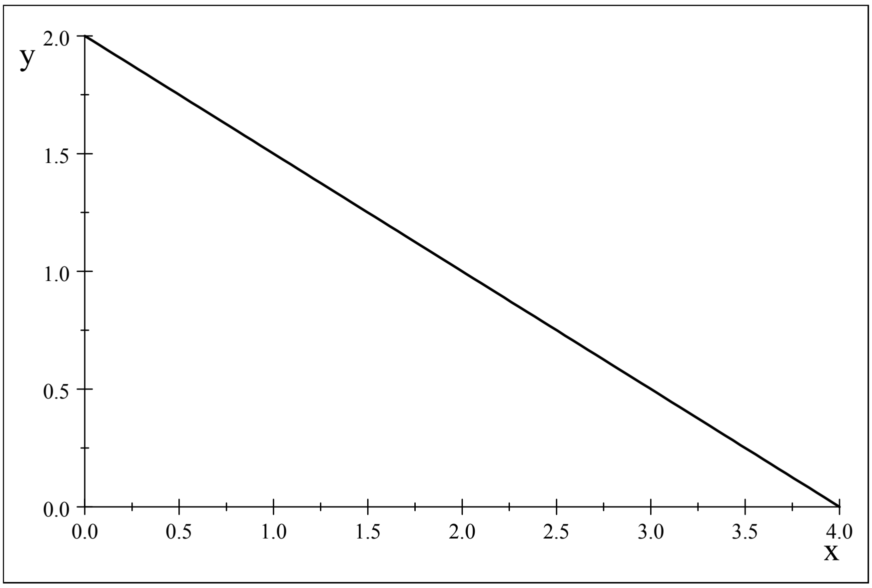


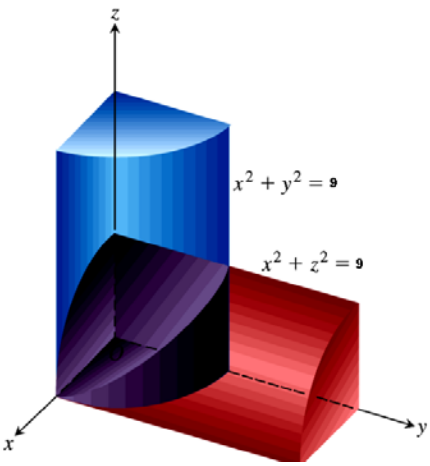
Figura 4.3: projeção no plano xy

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^4 \int_0^{2-\frac{x}{2}} \int_0^{4(2-\frac{x}{2}-y)} dzdydx \\
&= \int_0^4 \int_0^{2-\frac{x}{2}} z \mid_0^{4(2-\frac{x}{2}-y)} dydx \\
&= \int_0^4 \int_0^{2-\frac{x}{2}} 8 - 2x - 4y)dydx \\
&= \int_0^4 (8y - 2xy - 2y^2) \mid_0^{2-\frac{x}{2}} dx \\
&= \int_0^4 \left[2x\left(\frac{1}{2}x - 2\right) - 4x - 2\left(\frac{1}{2}x - 2\right)^2 + 16\right] = \\
&= \int_0^4 \left[\frac{1}{2}x^2 - 4x + 8\right] dx = \frac{32}{3}
\end{aligned}$$

logo, o volume $V = \frac{32}{3}$ u.v

Exemplo 4.3. *Calcular o volume do sólido delimitado pela interseção dos cilindros* $z^2 + x^2 = 9$ *e* $y^2 + x^2 = 9$ *no I octante.*

Solução: Vamos fazer o desenho do sólido e escolher um dos planos coordenados para a projeção.



volume delimitado

Como o sólido faz parte do I octante, temos os planos $z = 0$, $y = 0$ e $z = 0$ delimitando o sólido.

Limites	R1
à esquerda	$x = 0$
à direita	$x = 3$
curva inf	$y = 0$
curva sup	$y = \sqrt{9 - x^2}$
sup inf	$z = 0$
sup sup	$z = \sqrt{9 - x^2}$

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2}} dzdydx \\
&= \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \sqrt{9 - x^2}dydx \\
&= \int_0^3 y\sqrt{9 - x^2} \mid_0^{\sqrt{9-x^2}} dx \\
&= \int_0^3 (9 - x^2)dx \\
&= 9x - \frac{x^3}{3} \mid_0^3 = 27 - 9 = 18
\end{aligned}$$

Logo o volume do sólido é $V = 18uv$

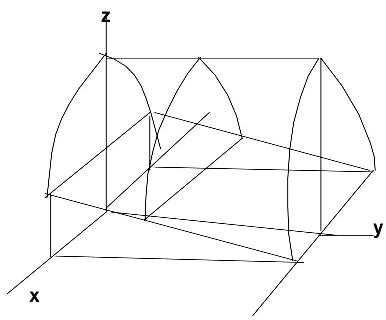
Exemplo 4.4. *Encontrar o volume do sólido delimitado pelas superfícies* $z = 9 - x^2$, $z = 5 - y$, $y = 0$ e $y = 5$.

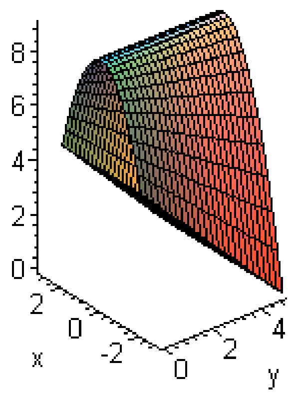
Solução: O primeiro passo é determinar as curvas que limitam a região de integração sobre o plano xy. Para isso resolvemos o sistema de equações $\begin{cases} z = 9 - x^2 \\ z = 5 - y \end{cases}$.

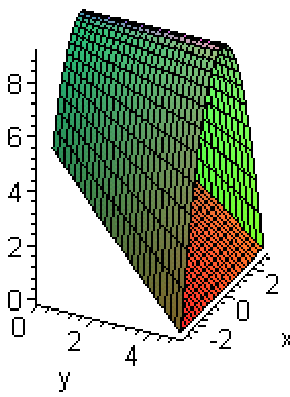
Igualando as duas equações obtemos a parábola $y = x^2 - 4$. Desse modo, no plano xy, a região de integração é delimitada pelas curvas $y = x^2 - 4$, $y = 0$ e $y = 5$. Para diminuir o trabalho no processo de integração é conveniente tomar y como variável independente. Desse modo a tabela de limites é dada por (Veja o gráfico **??**)

Tabela de limites

Curvas	equações
Curva à esquerda	$y = 0$
Curva à direita	$y = 5$
Curva inferior	$x = -\sqrt{y+4}$
Curva superior	$x = \sqrt{y+4}$
Superfície inferior	$z = 5 - y$
Superfície superior	$z = 9 - x^2$







O volume é dado por:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^5 \int_{-\sqrt{y+4}}^{\sqrt{y+4}} \int_{5-y}^{9-x^2} dzdxdy \\
&= \int_0^5 \int_{-\sqrt{y+4}}^{\sqrt{y+4}} z|_{5-y}^{9-x^2} dxdy \\
&= \int_0^5 \int_{-\sqrt{y+4}}^{\sqrt{y+4}} (9-x^2-(5-y))\, dxdy \\
&= \int_0^5 \int_{-\sqrt{y+4}}^{\sqrt{y+4}} (4-x^2+y)\, dxdy
\end{aligned}
$$

Como a superfície é simétrica em relação ao eixo y podemos escrever

$$
\begin{aligned}
&= 2\int_0^5 \int_0^{\sqrt{y+4}} (4-x^2+y)\, dxdy \\
&= 2\int_0^5 \left(4x - \frac{x^3}{3} + yx\right)|_0^{\sqrt{y+4}} dy \\
&= 2\int_0^5 \left(4\sqrt{y+4} - \frac{\left(\sqrt{y+4}\right)^3}{3} + y\sqrt{y+4}\right) dy \\
&= 2\int_0^5 \left(\frac{8}{3}\sqrt{(y+4)} + \frac{2}{3}y\sqrt{(y+4)}\right) dy \\
&= 2[\frac{16}{9}\left(\sqrt{(y+4)}\right)^3 + \frac{4}{15}\left(\sqrt{y+4}\right)^5 - \frac{16}{9}\left(\sqrt{y+4}\right)^3]|_0^5 \\
&= 2\left[\frac{4}{15}\left(\sqrt{(y+4)}\right)^5\right]|_0^5 \\
&= 2\left[\frac{4}{15}\left(\sqrt{(5+4)}\right)^5 - \left(\frac{4}{15}\left(\sqrt{4}\right)^5\right)\right] \\
&= 2\left[-\frac{8}{9}\left(\sqrt{9}\right)^3 + \frac{4}{15}\left(\sqrt{9}\right)^5 - \left(-\frac{8}{9}\left(\sqrt{4}\right)^3 + \frac{4}{15}\left(\sqrt{4}\right)^5\right)\right] \\
&= 2\left[-\frac{8}{9}(27) + \frac{4}{15}(243) - \left(-\frac{8}{9}(8) + \frac{4}{15}(32)\right)\right] \\
&= \frac{1688}{15} = 112.53uv
\end{aligned}
$$

Exemplo 4.5. *Faça a tabela de limites e escreva a integral que permite calcular a massa do sólido delimitado pelas superfícies* $x^2+y-16=0$, $x+y-4=0$, $y=2x+13$, $z=0$ *e* $z=10$ *sendo a densidade* $d(x,y,z)=xyz$

Vamos inicialmente identificar as superfícies:

$$
\begin{cases}
x^2+y-16=0 \text{ cilindro parabólico} \\
x+y-4=0 \text{ plano} \\
y=2x+13 \text{ plano} \\
z=0 \text{ plano} \\
z=10 \text{ plano}
\end{cases}
$$

Agora, vamos fazer uma projeção no plano xy, conforme figura 4.4

LImites	R1	R2
à esquerda	$x=-3$	$x=1$
à direita	$x=1$	$x=4$
curva inf	$y=4-x$	$y=4-x$
curva sup	$y=2x+13$	$y=16-x^2$
sup inf	$z=0$	$z=0$
sup sup	$z=10$	$z=10$

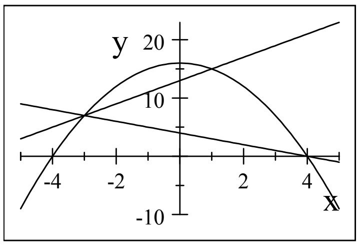


Figura 4.4: projeção no plano xy

logo a massa é dada por

$$M = m_1 + m_2$$

$$M = \int_{-3}^{1} \int_{y=4-x}^{2x+13} \int_{z=0}^{z=10} xyzdzdydx + \int_{1}^{4} \int_{y=4-x}^{y=16-x^2} \int_{z=0}^{z=10} xyzdzdydx$$

4.4. Integrais triplas em coordenadas cilíndricas

Uma integral tripla pode ser convertida em coordenadas cilíndricas seguindo o processo descrito a seguir.

Sejam θ_0 e θ_1 tais que $0 < \theta_1 - \theta_0 \leq 2\pi$ e suponhamos que ρ_1 e ρ_2 são funções contínuas de θ tais que $0 \leq \rho_1(\theta) \leq \rho_2(\theta)$ seja verdadeiro para todos os valores θ tais que $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$. Sejam $f(\rho, \theta)$ e $g(\rho, \theta)$ funções contínuas tais que $f(\rho, \theta) \leq g(\rho, \theta)$ seja verdadeiro para todo valor de ρ com $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ e todo $\rho_1(\theta) \leq \rho_2(\theta)$. Seja S o sólido contituido por todos os pontos cujas coordenadas cilíndricas satisfaçam as condições $\theta_0 \leq \theta_1$, $\rho_1(\theta) \leq \rho_2(\theta)$ e $f(\rho, \theta) \leq g(\rho, \theta)$. Então temos a tabela de limites

Tabela de limites

Curvas	equações
Arco inferior	θ_1
Arco superior	θ_2
Curva inferior	$\rho_1(\theta)$
Curva superior	$\rho_2(\theta)$
Superfície inferior	$z = f(\rho, \theta)$
Superfície superior	$z = g(\rho, \theta)$

E a integral tripla

$$\int_{a}^{b} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{f(x,y)}^{g(x,y)} f(x, y, z)\, dzdydx$$

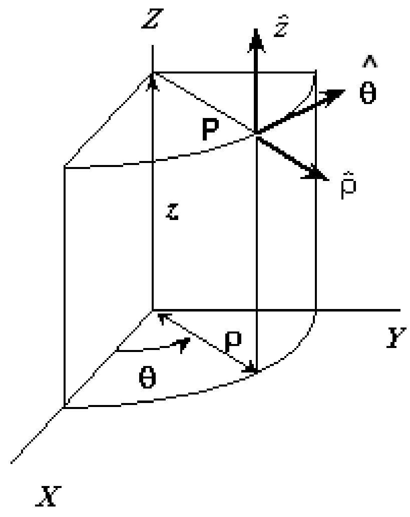


Figura 4.5:

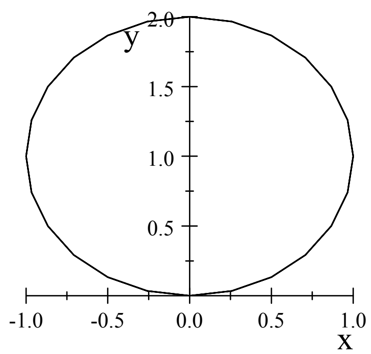
é escrita em coordenadas cilíndricas como segue

$$\int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{f(x,y)}^{g(x,y)} f\left(x, y, z\right) dzdydx = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} \int_{f(\rho,\theta)}^{g(\rho,\theta)} f\left(\rho, \theta, z\right) \rho dzd\rho d\theta$$

Exemplo 4.6. *Determinar o volume do sólido delimitado superiormente pelo parabolóide* $y^2 + x^2 + 1 - z = 0$ *inferiormente pelo plano* $z = 0$, *e lateralmente pelo cilindro* $x^2 + y^2 - 2y = 0$.

Solução: Graficamente temos o seguinte sólido (ver figura 4.6)

A projeção no plano xy é a circunferência $x^2 + y^2 - 2y = 0$ que é a circunferência $x^2 + (y-1)^2 = 1$(ver figura **??**)



projeção no plano xy

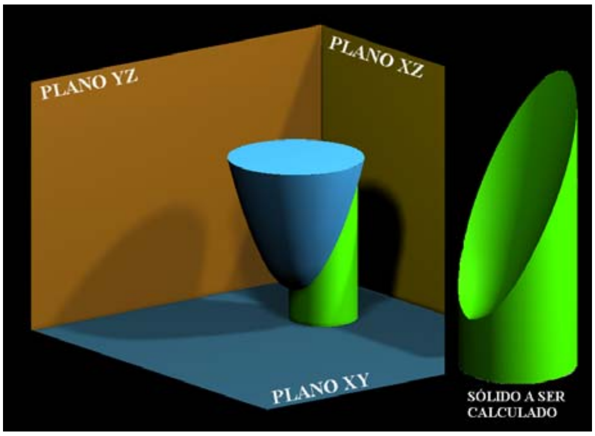


Figura 4.6:

O sólido está limitado inferiormente pelo plano $z = 0$ e superiormente pelo parabolóide $z = y^2 + x^2 + 1$

Fazendo a tabela, podemos observar que em coordenadas cilindricas é muito mais fácil resolver esse problema

Tabela de limites em coordenadas retangulares Tabela de limites em coord. cilíndricas

Curvas	equações
Curva à esquerda	$x = -1$
Curva à direita	$x = 1$
Curva inferior	$y = -\sqrt{1-x^2}+1$
Curva superior	$y = -\sqrt{1-x^2}+1$
Superfície inferior	$z = 0$
Superfície superior	$z = y^2 + x^2 + 1$

Curvas	equações
Arco inferior	$\theta_1 = 0$
Arco superior	$\theta_2 = \pi$
Curva inferior	$\rho_1(\theta) = 0$
Curva superior	$\rho_2(\theta) = 2sen$
Superfície inferior	$z = 0$
Superfície superior	$z = \rho^2 + 1$

logo o Volume em coordenadas cilíndricas é dado por:

$$V = \int_0^{\pi} \int_0^{2sent} \int_0^{1+\rho^2} \rho dz d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{2sent} \rho z \,|_0^{1+\rho^2} \, d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{2sent} \rho(1+\rho^2) d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2sent}(\rho+\rho^3)d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}(\frac{\rho^2}{2}+\frac{\rho^4}{4}\mid_0^{2sen\theta})d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}(2sen^2\theta d\theta + 4sen^4\theta)d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}(1-\cos 2\theta)+4(\frac{1-\cos 2\theta}{2})^2)d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}(1-\cos 2\theta + 1 - 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta)d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}(1-\cos 2\theta + 1 - 2\cos 2\theta)d\theta + \int_0^{\pi}\cos^2 2\theta)d\theta$$

$$= 2\theta - \frac{3sen2\theta}{2}\mid_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{1+\cos 4\theta}{2}d\theta$$

$$= 2\pi + (\frac{\theta}{2}+\frac{sen4\theta}{8}\mid_0^{\pi})$$

$$= 2\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$$

Logo o volume desse sólido é $V = \frac{5\pi}{2}u.v$

Exemplo 4.7. *Represente graficamente o sólido cujo volume é dado pela integral:*

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{4-\rho^2\cos^2\theta}\rho dz d\rho d\theta$$

Tabela de limites em coord. cilíndricas

Curvas	equações
Arco inferior	$\theta_1 = 0$
Arco superior	$\theta_2 = 2\pi$
Curva inferior	$\rho_1 = 0$
Curva superior	$\rho_2 = 2$
Superfície inferior	$z = 0$
Superfície superior	$z = 4 - \rho^2\cos^2\theta$

Considerando os arcos inferior e superior concluímos que a base do sólido está projetada sobre todos os quadrantes, pois temos $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Como o $0 \leq \rho \leq 2$ o raio varia fixamente, portanto, lateralmente temos um cilindro centrado na origem $x^2 + y^2 = 4$. Inferiormente temos $z = 0$ e superiormente o cilindro parabólico $z = 4 - x^2$ (observe que $\rho^2 \cos^2 \theta = x^2$)

Portanto, temos o sólido, conforme ilustra a figura 4.7

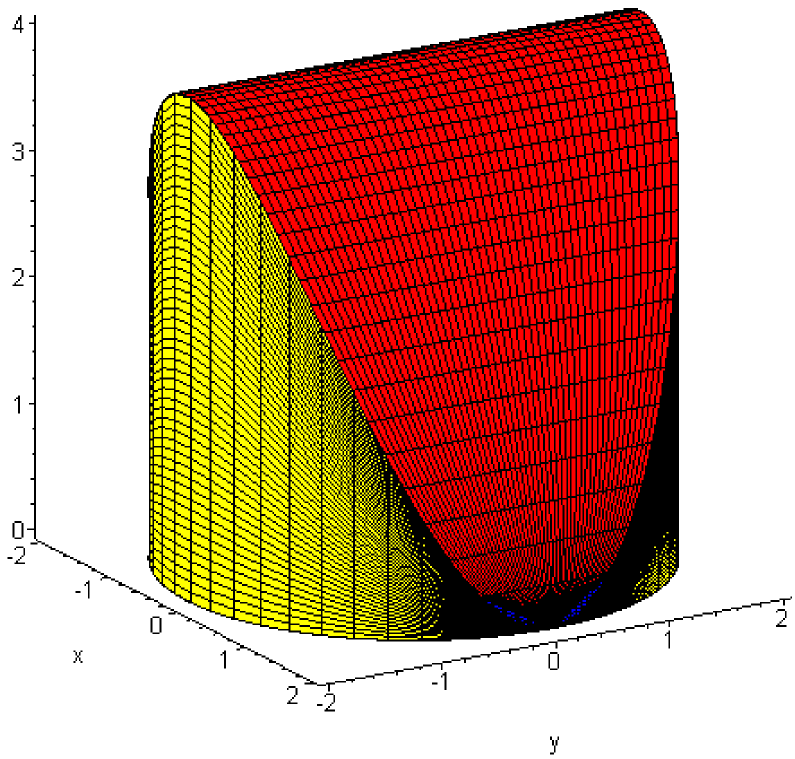


Figura 4.7: volume delimitado

Exemplo 4.8. *Escreva em coordenadas retangulares a integral*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} \int_0^{9-\rho^2} \rho^2 dz d\rho d\theta.$$

Solução: Para melhor compreensão, primeiro devemos identificar a representação geométrica do sólido. Vamos estudar a tabela de limites

Tabela de limites em coord. cilindricas

Curvas	equações
Arco inferior	$\theta_1 = 0$
Arco superior	$\theta_2 = \frac{\pi}{2}$
Curva inferior	$\rho_1 = 0$
Curva superior	$\rho_2 = 2\cos\theta$
Superfície inferior	$z = 0$
Superfície superior	$z = 9 - \rho^2$

Considerando os arcos inferior e superior concluímos que a base do sólido está projetada sobre o primeiro quadrante, pois temos $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Agora vamos escrever a curva $\rho = 2\cos\theta$ em coordenadas retangulares. Sabemos que $x = \rho\cos\theta$, de modo que $\cos\theta = \frac{x}{\rho}$, e que $\rho^2 = x^2 + y^2$. Assim,

$$\rho = 2\cos\theta \qquad \text{donde vem}$$

$$\begin{aligned} \rho &= 2\left(\frac{x}{\rho}\right) && \text{ou} \\ \rho^2 &= 2x \\ x^2 + y^2 &= 2x && \text{ou} \\ x^2 + y^2 - 2x &= 0 && \mathit{ou} \\ (x-1)^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

Vemos que em coordenadas retangulares a projeção do sólido sobre o plano xy é delimitada pela circunferência de equação $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Desse modo, a tabela de limites, em coordenadas retangulares é dada por:

Tabela de limites em coordenadas retangulares

Curvas	equações
Curva à esquerda	$x = 0$
Curva à direita	$x = 2$
Curva inferior	$y = 0$
Curva superior	$y = \sqrt{2x - x^2}$
Superfície inferior	$z = 0$
Superfície superior	$z = 9 - (x^2 + y^2)$

Também devemos escrever de forma adequada a expressão $\rho^2 dz d\rho d\theta$. Como $dxdydz = \rho dz d\rho d\theta$ temos

$$\rho^2 dz d\rho d\theta = \rho\left(\rho dz d\rho d\theta\right) = \sqrt{x^2 + y^2} dxdydz.$$

Assim, a integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} \int_0^{9-\rho^2} \rho^2 dz d\rho d\theta$$

será dada por:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} \int_0^{9-\rho^2} \rho^2 dz d\rho d\theta = \int_0^{2} \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^{9-x^2-y^2} \sqrt{x^2+y^2} dz dy dx.$$

4.5. Integrais Triplas em Coordenadas Esféricas

As integrais triplas podem ser convertidas para coordenadas esféricas de acordo com o processo descrito a seguir (veja a figura 4.8)

Sejam $\theta_0, \theta_1, \phi_0, \phi_1, \rho_0$ e ρ_1 tais que $0 < \theta_1 - \theta_0 \leq 2\pi$ e $0 \leq \rho_0 < \rho_1$.

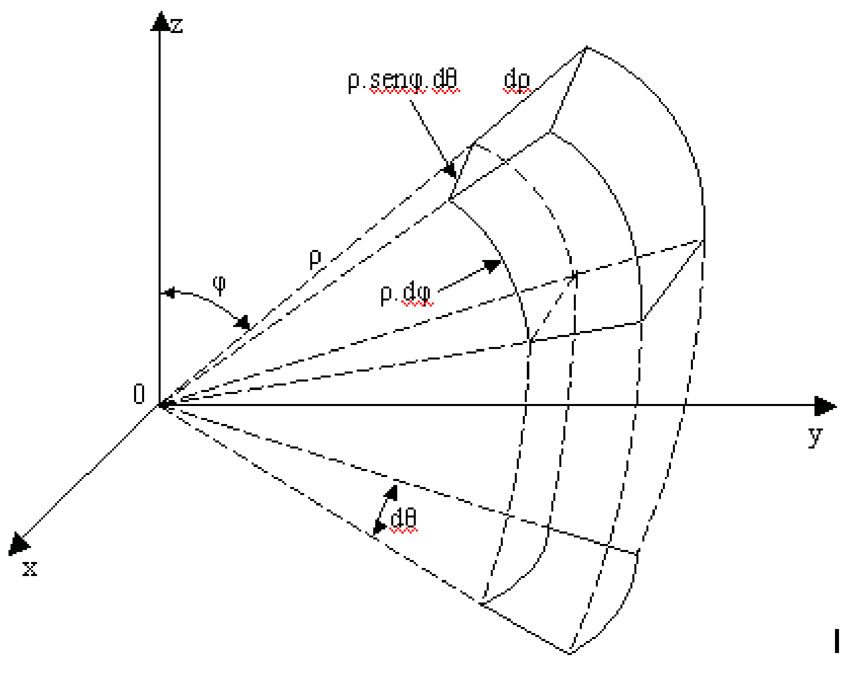


Figura 4.8: coordenadas esféricas

Suponhamos que o sólido S seja constituido por todos os pontos cujas coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ) tais que

$$\rho_0 \leq \rho \leq \rho_1 \qquad \theta_0 \leq \theta_1 \leq \theta \qquad \phi_0 \leq \phi \leq \phi_1$$

Lembrando que o ponto $P(x, y, z)$, em coordenadas esféricas é dado por $P(\rho, \theta, \phi)$ em que $x = \rho \cos\theta sen\phi$, $y = \rho sen\theta sen\phi$, $z = \rho\cos\phi$ e $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Considerando os acréscimos atribuidos a cada variável obtemos os pontos:

$$\begin{gathered} P(\rho, \theta, \phi) \\ Q(\rho, \theta, \phi + d\phi) \\ R(\rho, \theta + d\theta, \phi) \\ T(\rho + \rho d, \theta + d\theta, \phi) \end{gathered}$$

Também, podemos observar um paralelepípedo infinitesimal curvilíneo com dimensões $|\overline{PT}|$, $|\overline{QR}|$ e $|\overline{PQ}|$ cujo volume aproximado é

$$dV = |\overline{PT}|\,|\overline{QR}|\,|\overline{PQ}|\,.$$

É fácil ver que $|\overline{PT}|$ é a variação do raio ρ entre os pontos P e T e, portanto $|\overline{PT}| = d\rho$.

Como P e Q pertencem ao círculo de raio $|\overline{OP}| = |\overline{OQ}| = \rho$ e o arco $\widehat{PQ}$ subentende um ângulo correspondente a variação de ϕ segue que

$$|\overline{PQ}| \cong \rho d\phi.$$

Como Q e R pertencem ao círculo de raio $|\overline{OU}|$ em que $|\overline{OU}|$ é lado oposto do trângulo $O\widehat{Q}U$ e $\widehat{Q} = \phi$ obtemos

$$|\overline{OU}| = |\overline{OQ}|\, sen\phi = \rho sen\phi$$

e, desse modo obtemos

$$|\overline{QR}| \cong \rho sen\phi d\theta$$

Portanto,

$$\begin{aligned} dV \quad &= |\overline{PT}|\,|\overline{QR}|\,|\overline{PQ}| \\ &= d\rho\,(\rho d\phi)\,(\rho sen\phi d\theta) \\ &\rho^2 sen\phi d\rho d\phi d\theta \end{aligned}$$

Lembrando que em coordenadas retangulares tem-se $dV = dxdydz$ e, portanto, a equivalência

$$dxdydz = \rho^2 sen\phi d\rho d\phi d\theta$$

.

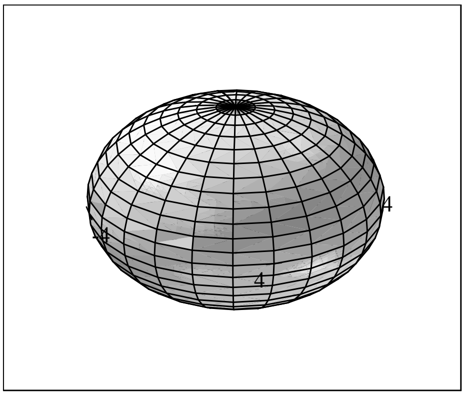
Seja $f(x, y, z)$ uma função definida em todos os pontos do sólido S e cada ponto $P(x, y, z)$ pode ser escrito em coordenadas esféricas $f(\rho, \theta, \phi)$. Então podemos escrever

$$\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1} f(x, y, z)\, dzdydx = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\phi_1}^{\phi_2}\int_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho, \theta, \phi)\, \rho^2 sen\phi d\rho d\phi d\theta$$

Exemplo 4.9. *Mostre, usando coordenadas esféricas, que o volume de uma esfera de raio r é $V = \frac{4\pi r^3}{3}$*

Vamos utilizar uma esfera centrada na origem de raio $r : x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

Portanto, a projeção no plano xy é uma circunferência $x^2+y^2 = r^2$ e portanto o $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e o $0 \leq \phi \leq \pi$.



$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R} \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta = \frac{4}{3}\pi R^3$

Exercise ção.1. *Escreva em coordenadas retangulares e após use coordenadas esféricas para determinar o volume do sólido delimitado pelas superfícies $z^2 = x^2 + y^2$, $z^2 = 3x^2 + 3y^2$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ nos pontos em que z é positivo.*

Solução: Primeiro vamos interpretar cada superfície. A equação $z^2 = x^2+y^2$ representa o cone inferior na figura abaixo, a equação $z^2 = 3x^2 + 3y^2$ representa o cone superior e a equação $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ representa a esfera. O problema pede para

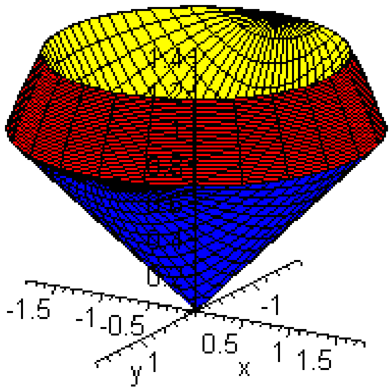


Figura 4.9: volume delimitado

determinar o volume do sólido dentro da esfera entre os dois cones. Veja a figura 4.9 no primeiro octante.

Vamos determinar as curvas de interseção e projetadas sobre o plano xy. Resolvemos os sistemas de equações $\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$ e $\begin{cases} z^2 = 3x^2 + 3y^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$ temos, em ambos os casos, substituindo z^2 da primeira equação na segunda equação

$$\begin{array}{ccc} x^2 + y^2 + x^2 + y^2 = 4 & e & x^2 + y^2 + 3x^2 + 3y^2 = 4 \\ 2x^2 + 2y^2 = 4 & & 4x^2 + 4y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 2 & & x^2 + y^2 = 1 \end{array}$$

O volume do sólido será dado pela diferença entre o volume do sólido delimitado pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e o cone $z^2 = x^2 + y^2$ e o volume do sólido delimitado pela esfera $z^2 = x^2 + y^2$ e o cone $z^2 = 3x^2 + 3y^2$. As tabelas de limtes são:

Tabela de limites para os sólidos

Curvas	um - equações	dois - equações
Curva à esquerda	$x = -\sqrt{2}$	$x = -1$
Curva à direita	$x = \sqrt{2}$	$x = 1$
Curva inferior	$y = -\sqrt{2 - x^2}$	$y = -\sqrt{1 - x^2}$
Curva superior	$y = \sqrt{2 - x^2}$	$y = \sqrt{1 - x^2}$
Superfície inferior	$z = \sqrt{x^2 + y^2}$	$z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$
Superfície superior	$z = \sqrt{4 - (x^2 + y^2)}$	$z = \sqrt{4 - (x^2 + y^2)}$

Portanto, o volume será dado por

$$V = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-(x^2+y^2)}} dzdydx - \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{3x^2+3y^2}}^{\sqrt{4-(x^2+y^2)}} dzdydx$$

Como podemos perceber a resolução da integral é trabalhosa. Vamos escrevê-la em coordenadas esféricas.

É facil ver que o arco θ varia de zero a 2π. Vamos determinar a variação do arco ϕ. O cone de equação $z^2 = x^2 + y^2$ intercepta o plano zx na da reta $z = x$. Sendo o coefiente angular dessa reta $tg\alpha = 1$ segue que $\alpha = \frac{\pi}{4}$ e assim, também tem-se $\phi = \frac{\pi}{4}$. Já o cone de equação $z^2 = 3x^2 + 3y^2$ intercepta o plano zx na da reta $z = \sqrt{3}x$. Sendo o coeficiente angular dessa reta $tg\alpha = \sqrt{3}$, isto é $\alpha = \frac{\pi}{3}$, então, segue que $\phi = \frac{\pi}{6}$. Portanto, a tabela de limites do sólido em coordenadas esféricas é dada por:

Tabela de limites em coordenadas esféricas

Curvas	equações
Arco θ inferior	$\theta_1 = 0$
Arco θ superior	$\theta_2 = 2\pi$
Arco ϕ inferior	$\phi_1 = \frac{\pi}{6}$
Arco ϕ superior	$\phi_2 = \frac{\pi}{4}$
Superfície inferior	$\rho_1 = 0$
Superfície superior	$\rho_2 = 2$

Assim, o volume será dado por

$$V = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^2 \rho^2 sen\phi d\rho d\phi d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\phi=\frac{\pi}{6}}^{\phi=\frac{\pi}{4}} \frac{\rho^3}{3}|_0^2 sen\phi d\phi d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\phi=\frac{\pi}{6}}^{\phi=\frac{\pi}{4}} \frac{8}{3} sen\phi d\phi d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} -\frac{8}{3} \cos\phi|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta$$

$$= \int_{\theta=2\pi}^{\theta=0} \frac{8}{3} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) d\theta$$

$$= \frac{8}{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\theta|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{4\pi}{3}\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$$

Exemplo 4.10. *Escreva em coordenadas retangulares a integral*

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\int_0^4 \rho sen\phi d\rho d\phi d\theta.$$

Solução: O símbolo $\int_0^{\frac{\pi}{2}}$ significa que a região de integração está situada no primeiro quadrante.

O símbolo $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$ indica que o sólido de integração é delimitado pelos raios cujas retas tem coeficientes angulares $tg\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e $tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

E o símbolo $\int_0^4$ indica que o sólido é também delimitado pela esfera de raio $\rho = 4$, ou seja $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

Do coeficiente angular $tg\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ obtemos as retas $z = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ e $z = \frac{\sqrt{3}}{3}y$ as quais pertencem a interseção do cone $z^2 = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3}$ com os planos xz e yz, respectivamente.

Do coeficiente angular $tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ obtemos as retas $z = \sqrt{3}x$ e $z = \sqrt{3}y$ as quais pertencem a interseção do cone $z^2 = 3x^2 + 3y^2$ com os planos xz e yz, respectivamente.

Resolvendo os sistemas de equações $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16 \\ z^2 = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} \end{cases}$ e $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16 \\ z^2 = 3x^2 + 3y^2 \end{cases}$ obtemos as curvas que delimitam a região de integração para o cálculo da integral relativa a parte da esfera que está localizada dentro de cada um dos cones.

Em ambos os casos, substituindo a segunda equação na primeira temos

$x^2 + y^2 + z^2 = 16$	$x^2 + y^2 + z^2 = 16$
$x^2 + y^2 + \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} = 16$	$3x^2 + 3y^2 + x^2 + y^2 = 16$
$\frac{4x^2}{3} + \frac{4y^2}{3} = 16$	$x^2 + y^2 = 4$
$x^2 + y^2 = 12$	donde
donde	$y = \sqrt{4 - x^2}$
$y = \sqrt{12 - x^2}$	

A integral

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\int_0^4 \rho sen\phi d\rho d\phi d\theta$$

é dada pela diferença entre a integral calculada sobre o sólido delimitado pelas superfícies $x^2+y^2+z^2=16$ e $z^2=\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{3}$ e o sólido delimitado pelas superfícies $x^2+y^2+z^2=16$ e $z^2=3x^2+3y^2$. Como a integral está multiplicada por quatro significa que devemos considerar os quatro quadrantes. Assim, a tabela de limites para os sólidos de integração é dada por

limites	sólido I	sólido II
Curva a esquerda	$x=-\sqrt{12}$	$x=-2$
Curva a direita	$x=\sqrt{12}$	$x=2$
Curva a inferior	$y=-\sqrt{12-x^2}$	$y=-\sqrt{4-x^2}$
Curva a superior	$y=\sqrt{12-x^2}$	$y=\sqrt{4-x^2}$
Superfície inferior	$z=\sqrt{\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{3}}$	$z=\sqrt{3x^2+3y^2}$
Superfície superior	$z=\sqrt{16-(x^2+y^2)}$	$z=\sqrt{16-(x^2+y^2)}$

Também, sabemos que $\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ e $dxdydz=\rho^2 sen\phi d\rho d\phi d\theta$. Como temos $\rho sen\phi d\rho d\phi d\theta$ devemos fazer a equivalência como segue:

$$\begin{aligned}
\rho sen\phi d\rho d\phi d\theta &= \left(\frac{\rho}{\rho}\right)\rho sen\phi d\rho d\phi d\theta \\
&= \frac{\rho^2 sen\phi d\rho d\phi d\theta}{\rho} \\
&= \frac{\rho^2 sen\phi d\rho d\phi d\theta}{\rho} \\
&= \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}
\end{aligned}$$

Agora podemos escrever a integral

$$I=4\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\int_{\phi=\frac{\pi}{6}}^{\phi=\frac{\pi}{3}}\int_{\rho=0}^{\rho=4}\rho sen\phi d\rho d\phi d\theta$$

é escrita em coordenadas retangulares como segue:

$$I=\int_{-\sqrt{12}}^{\sqrt{12}}\int_{-\sqrt{12-x^2}}^{\sqrt{12-x^2}}\int_{\sqrt{\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{3}}}^{\sqrt{16-(x^2+y^2)}}\frac{dzdydx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{3x^2+3y^2}}^{\sqrt{16-(x^2+y^2)}}\frac{dzdydx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

4.6. Exercícios Referente ao Trabalho

Trabalho valendo até 2 pontos na nota da terceira prova . Para fazer jus aos dois pontos devem ser cumpridas as seguintes condições:

- Em cada problema construir um artefato que represente geometricamente o sólido sobre o qual será determinada a integral;
- Encontrar os limites do sólido de integração, fazer a tabela, representá-los na Integral;
- Apresentar à turma o artefato que representa o sólido descrito pelas superfícies;
- Apresentar à turma a tabela de limites e a representação da integral usando cartazes e/ou transparências (não será permitido o uso do quadro para esse fim);

Observação 9. *O não cumprimento de um dos itens acima acarreta a perda de um ponto e o não cumprimento de dois dos itens acarretará a perda dos dois pontos.*

1. Determinar o volume do sólido delimitado pelas superfícies $z = y^2$, $x = 0$ $x = 1$, $y = -1$, $y = 1$ e $z = -2$ Resp=$\frac{14}{3}$
2. Calcular o volume do sólido delimitado superiomente por $z = 4 - x - y$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ e $z = 0$ Resp=$\frac{15}{4}$
3. Calcular o volume do tetraedro delimitado pelos planos coordenados e pelo plano $x + \frac{y}{2} + z = 4$ Resp=$\frac{64}{3}$
4. Determinar o volume do sólido delimitado pelas superfícies $y = 0$, $y = 1 - x^2$ e $x^2 + z = 1$ e $z = 0$. Resp. $\frac{16}{15}$
5. Calcular o volume do sólido, no primeiro octante, delimitado por $x = 4 - y^2$, $y = z$, $x = 0$, $z = 0$ Resp=4
6. Calcular o volume do sólido , no primeiro octante, delimitado por $y + x = 2$ e $z = x^2 + y^2$ Resp=$\frac{8}{3}$
7. Determinar o volume do sólido delimitado pelas superfícies $z = 16 - x^2 - y^2$, $z = 0$, $y^2 + x^2 = 2\sqrt{y^2 + x^2} + x$. Resp. $\frac{1123\pi}{16}$
8. Determinar o volume do sólido limitado acima pelo cilindro $z = 4 - x^2$, lateralmente pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e inferiormente por $z = 0$ Resp=12π

9. Determinar o volume do sólido, no primeiro octante, delimitado por $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + z^2 = 1$.Resp.$\frac{2}{3}$

10. Determinar o volume do sólido delimitado pelas superfícies $y^2 + x^2 + z = 12$ e $3x^2 + 5y^2 - z = 0$. Resp.$6\sqrt{6}\pi$.

11. Determine o volume do sólido do primeiro octante, limitado inferiormente pelo plano xy, superiormente pelo plano $z = y$ e lateralmente pleo cilindro $y^2 = x$ e pelo plano $x = 1$ Resp=$\frac{1}{4}$

12. Determinar o volume do sólido delimitado pelas superfícies $z = 4 - x^2$ e $z = 3x^2 + y^2$. Resp. 4π

13. Determine o volume da porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4^2$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 4y$ Resp=$\frac{128\pi}{3}$

14. Calcular o volume do sólido, no primeiro octante, delimitado por $y = x^2$, $x = y^2$ e $z + y = 2$ Resp=$\frac{31}{60}$

15. Determine o volume delimitado pelas superfícies $x^2+y^2 = 4$ e $4x^2+4y^2+z^2 = 64$ resp= $\frac{8\pi}{3}(64 - 24\sqrt{3})$

16. Determinar o volume do sólido delimitado pelas superfícies $\rho = 4\cos\theta$, $z = 0$ e $\rho^2 = 16 - z^2$ resp=$\frac{3\pi}{2}$

17. Calcular o volume do sólido delimitado por $z = 4x^2 + y^2$ e $z = 8 - 4x^2 - y^2$

18. Calcular o volume interno a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e externo ao parabolóide $x^2 + y^2 = 3z$

19. Encontre o volume acima do plano xy, limitado pelo parabolóide $z = x^2 + 4y^2$ e pelo cilindro $x^2 + 4y^2 = 4$ Resp=4π

20. Determine o volume de $x = y^2$, $z = x$, $z = 0$ e $x = 1$ resp= $\frac{4}{5}$

21. Determine o volume que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ acima do plano $z = 0$ e abaixo do cone $z^2 = 4x^2 + 4y^2$

22. Encontre o volume delimitado por $z^2+x^2+y^2 = 4$, $z^2-x^2-y^2 = 0$ e $z^2-\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{3} = 0$ nos pontos em que $z > 0$.

23. Determine o volume do sólido delimitado pelas superfícies $z = x^2$, $z = 8 - x^2$, $y = 0$ e $z + y = 9$. Resp=$\frac{320}{3}$

4.7. Exercícios Gerais

1. Calcule a $\int\int_D .(x+3y)dA$, sendo D a região triangular de vértices $(0,0),(1,1)$ e $(2,0)$ resp 2

2. Calcule $\int\int_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dA$, sendo D a região do semiplano $x \geqslant 0$ interna à cardióide $\rho = 1 = \cos\theta$ e externa à circunferência $\rho = 1$

3. Determinar a área delimitada pelas curvas

   $$(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})^2 = \frac{2xy}{c^2}.\ resposta = \frac{a^2b^2}{c^2}$$

4. O centro de uma esfera de raio r está sobre a superfície de um cilíndro reto cuja base tem raio igual a $\frac{r}{2}$. Encontre a área da superfície cilíndrica que fica no interior da esfera. Resposta $4r^2$.

5. Encontrar a área da porção da esfera $x^2+y^2+z^2 = 2ay$ que fica no interior do parabolóide $by = x^2+z^2$. Resposta $2\pi ab$.

6. Determinar o volume do sólido delimitado pelas superfícies
   $b^2(x^2+y^2)+a^2z^2 = a^2b^2$ e $x^2+y^2 = ax$. Resp $\frac{2a^2b(3\pi-4)}{9}$.

7. Determinar o volume do sólido delimitado pelas superfícies
   $x^2+y^2+z^2 = 8$ e $x^2+y^2 = 2z$. Resp $\frac{4\pi(8\sqrt{2}-7)}{3}$.

8. Calcular $I = \int\int_T\int(x-1)dv$, sendo T a região do espaço delimitada pelos planos $y=0,\ z=0,\ y+z=5$ e pelo cilindro parabólico $z = 4-x^2$. Resp $\frac{-144}{15}$

9. Determinar o volume do sólido delimitado pelas superfícies
   $z=0,\ z^2 = x^2+y^2$ e $x^2+y^2 = 2ax$. Resp: $\frac{32a^3}{9}$

10. Determinar o volume do sólido delimitado pelas superfícies
    $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c} = 1,\ x=0,\ y=0$ e $z=0$. Resp $\frac{abc}{6}$.

11. Determinar o volume do sólido delimitado pelas superfícies

    $x^2+y^2+2y = 0,\ z=0,\ z = 4+y$

12. Determinar o volume do sólido delimitado pelas superfícies
$x^2 + y^2 = a^2$ e $x^2 + z^2 = a^2$. Resp $\frac{16a^3}{3}$.

13. Determinar o volume do sólido delimitado pelas superfícies
$\rho = 4\cos\theta$, $z = 0$ e $\rho^2 = 16 - z^2$. Resp $\frac{3\pi}{2}$.

14. Encontrar a área da superfície do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ acima do plano $z = 0$. Resp $\frac{\pi[(\sqrt{17})^3-1]}{6}$.

15. Nos itens abaixo escreva em coordenadas retangulares as integrais.

    1. $\int_0^{\pi} 2\int_0^3 \int_2^{\rho^2} \sqrt{9-\rho^2}\rho dz d\rho d\theta$.
    2. $\int_0^{\pi} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 \sqrt{9-\rho^2} sen\phi d\rho d\phi d\theta$.
    3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^4 \sqrt{4-\rho^2}\rho sen\phi d\rho d\phi d\theta$.

5. SEQÜÊNCIAS e SÉRIES

Seqüências e séries: Objetivos:

Ao final do capítulo espera-se que o aluno seja capaz de:

1. Reconhecer uma seqüência e verificar se:

a. é convergente ou divergente;

b. crescente ou decrescente;

c. Propriedades de uma seqüência;

2. Definir séries numéricas de termos positivos;

3. Encontrar a soma de séries;

4. Identificar as séries especiais: geométrica, harmônica e p;

5. Verificar se é convergente ou divergente aplicando os critérios de convergência;

6. Analisar a convergência de séries alternadas e de sinal quaisquer;

7. Reconhecer séries absolutamente e condicionalmente convergentes;

8. Reconhecer séries de funções;

9. Encontrar o raio e o intervalo de convergência das séries de potências;

10 Desenvolver funções em séries de Taylor e Maclaurin;

11. Desenvolver funções em séries binomiais;

12. Resolver exercícios usando o Maple.

A prova será composta por questões que possibilitam verificar se os objetivos foram atingidos. Portanto, esse é o roteiro para orientações de seus estudos. O modelo de formulação das questões é o modelo adotado na formulação dos exercícios e desenvolvimento teórico desse capítulo, nessa apostila.

5.1. Sequências

Introdução

Neste capítulo estudaremos séries infinitas, as quais são somas que envolvem um número infinito de termos. As séries infinitas desempenham um papel fundamental tanto na matemática quanto na ciência. elas são usadas, por exemplo, para aproximar funções trigonométricas e logarítmica, para resolver equações diferenciais, para efetuar integrais complicadas, para criar novas funções e para construir modelos matemáticos de leis físicas (Anton, 1999).

Na linguagem cotidiana, o termo sequência significa uma sucessão de coisas em uma ordem determinada - ordem cronológica, de tamanho, ou lógica, por exemplo. Em matemática o termo sequência é usado comumente para denotar uma sucessão de números cuja ordem é determinada por uma lei ou função.

Estudaremos um tipo especial de função definida nos números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4...\}$, com imagem em $\mathbb{R}$. Isto é, estudaremos a função $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ quanto ao limite e suas propriedades quando $n \longrightarrow \infty$. A função $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(n) = \frac{n}{2n+1}$ é um exemplo de seqüência. O conjunto composto pelos pares ordenados $(n, f(n))$ é dado por

$$I = \{(1, f(1)), (2, f(2)), (3, f(3)), ..., (n, f(n)), ...\}$$

ou

$$I = \{(1, \frac{1}{3}), (2, \frac{2}{5}), (3, \frac{3}{7}), ..., (n, \frac{n}{2n+1}), ...\}$$

é denominado conjunto dos termos da sequência $f(n)$. Geralmente, o conjunto I é escrito de forma simplificada. Isto é, I é representado pelas imagens de $n \in \mathbb{N}$ de forma que a posição que determinada imagem de f ocupa no conjunto dos termos da seqüência $f(n)$ é determinada pelo elemento $n \in \mathbb{N}$, ou seja,

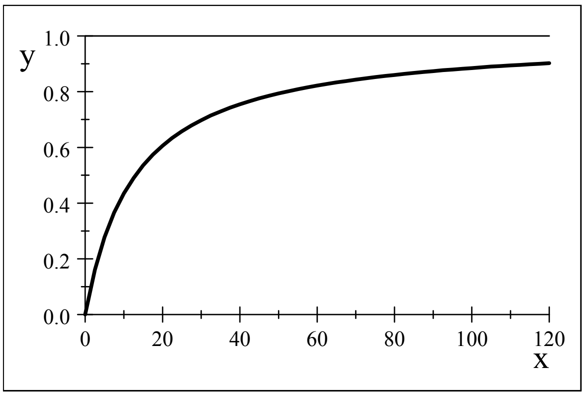
$$I = \{f(1), f(2), f(3), ..., f(n), ...\} = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}, ..., \frac{n}{2n+1}, ...\}.$$

Podemos observar que o termo $\frac{5}{11}$ é imagem de $n = 5$, pois ocupa a quinta posição no conjunto dos termos. O termo $f(n) = \frac{n}{2n+1}$ é denominado termo geral da seqüência. A forma usual de representar o termo geral de uma seqüência é $a_n = \frac{n}{2n+1}$, ou $x_n = \frac{n}{2n+1}$, ou $y_n = \frac{n}{2n+1}$ etc. Passaremos agora à definição formal de seqüência. Nesse caso, temos o conjunto $I = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n........\}$.

Definição 5.1. *Sejam $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4...\}$ o conjunto dos naturais, $\mathbb{R}$ a reta real. Denominamos seqüência, a aplicação $x_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.*

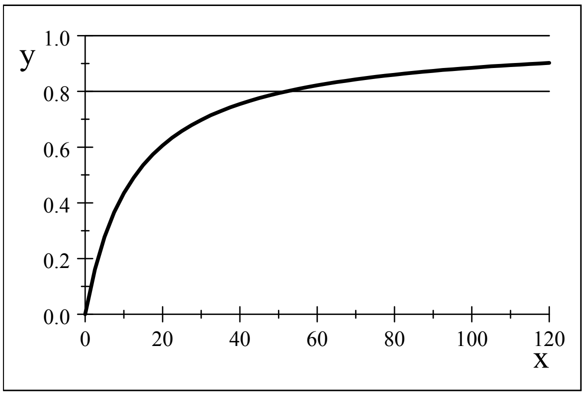
Problema 5.2. *Para melhor compreensão vamos supor que o crescimento diário de uma linhagem de suínos é dada em função do crescimento total pela seqüência $u_n = \frac{n}{n+13}$ onde n corresponde ao número de dias de vida do suíno e $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$ o tamanho de um suíno adulto. Assim, o conjunto $\left\{\frac{1}{14}, \frac{2}{15}, \frac{3}{16}, \frac{4}{17}, \frac{5}{18}, ...\frac{n}{n+13}, ...\right\}$ representa o tamanho diário do suíno em relação ao tamanho final.*

Graficamente podemos observar a curva de crescimento, cujo limite é representado pela assíntota $y = 1$



Como podemos observar a assíntota $y = 1$ representa o limite de crescimento do suíno. Isso significa que podemos levantar questões como por exemplo, qual o número mínimo de dias que o suíno deve ficar em tratamento para atingir, pelo menos, 80% de seu tamanho final?

No gráfico abaixo podemos observar uma estimativa em torno de 50 dias



A questão agora é como fazer uma estimativa em termos matemáticos? A resposta será dada pela definição de limite de uma seqüência.

Limite de uma Sequência

Definição 5.3. *Seja u_n uma seqüência, dizemos que o número a é limite de u_n quando n tende para o infinito se dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $K > 0$ tal que para todo $n > K$ vale a desigualdade $|u_n - a| < \varepsilon$.*

Exemplo 5.4. *Dada a seqüência* $u_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ *é definida por* $u_n = \frac{n}{n+13}$ *vamos mostrar que* $\lim u_n = 1$.

Demonstração: Devemos mostrar que dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $K > 0$ tal que para todo $n > K$ vale a desigualdade $|u_n - a| < \varepsilon$. Agora,

$$|u_n - 1| = \left|\frac{n}{n+13} - 1\right| = \left|\frac{n-n-13}{n+13}\right| = \left|\frac{13}{n+13}\right| < \varepsilon$$

De modo que podemos escrever $\frac{13}{n+13} < \varepsilon$ donde vem $13 < n\varepsilon + 13\varepsilon$ ou $\frac{13-13\varepsilon}{\varepsilon} < n$. Consequentemente, podemos tomar $K = \frac{13-13\varepsilon}{\varepsilon}$ e a definição 5.1 estará satisfeita.

Comparando os dados do problema 5.2 com a definição 5.3 concluímos que $\varepsilon = 0,2$ representa a diferença entre o crescimento almejado e o crescimento total dos suínos. Por outro lado, K é o número mínimo de dias que os suínos devem permanecer em tratamento para atingir, pelo menos, 80% de seu crescimento total.

Exemplo 5.5. *Determine o número mínimo de dias que um lote de suínos, cujo crescimento é dado pela seqüência* $u_n = \frac{n}{n+13}$ *dever permanecer em tratamento para atingir, respectivamente,* 80%, 90%, 95% *do seu tamanho final.*

Solução: No exemplo 5.4 concluímos que dado $\varepsilon > 0$ podemos tomar $K = \frac{13-13\varepsilon}{\varepsilon}$.

Como para 80%, 90%, 95% do tamanho final os valores de ε são respectivamente $0,2$, $0,1$, e $0,05$ temos, respectivamente, o número mínimo de dias dado por:

$$\begin{array}{ll} a) & K = \frac{13-13\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{13-13*0.2}{0.2} = 52 \text{ dias} \\ b) & K = \frac{13-13\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{13-13*0.1}{.1} = 117 \text{ dias} \\ c) & K = \frac{13-13\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{13-13*0.05}{0.05} = 247 \text{ dias} \end{array}$$

Outra conclusão que podemos tirar é que a partir de um determinado tempo, a variação do crescimento é muito pequena em relação à quantidade de ração que o suíno consome. Portanto, o produtor deve estimar o tempo mínimo de tratamento em dias para obter o máximo de lucro.

Voltemos ao estudo das seqüências.

Teorema 5.6. *(unicidade)*

Seja $u_{n:}N \to R$ uma sequência em R tal que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ existe, então o limite é único.

Sequências Convergentes

Definição 5.7. *Seja u_n uma seqüência. Dizemos que u_n é convergente se, e somente se,* $\lim u_n = a$ *para algum* $a \in \mathbb{R}$..

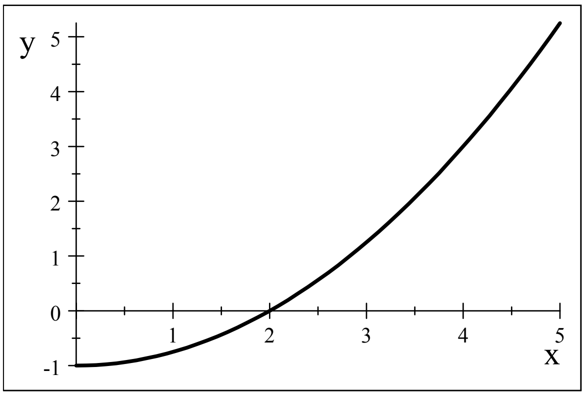
Se u_n não for convergente diremos que u_n **é divergente.**

Exemplo 5.8. *A seqüência* $u_n = \frac{2n+3}{3n+5}$ *é convergente, pois* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+3}{3n+5} = \frac{2}{3}$.

Exemplo 5.9. *Determine se a sequência* $u_n = \frac{1}{4}n^2 - 1$ *converge ou diverge*

a sequência $u_n = \frac{1}{4}n^2 - 1$ diverge, pois $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{4}n^2 - 1) = \infty$

Como o limite de u_n não existe , a sequência diverge. O gráfico **??** ilustra a maneira como esta sequência diverge



Subsequência

Definição 5.10. *Seja* $u_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *uma seqüência em* $\mathbb{R}$. *Seja* $N = \{n_1, n_2, n_3, ...\}$ *um subconjuto de* $\mathbb{N}$, *então* $x_{n/N} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *é uma subseqüência em* $\mathbb{R}$.

Exemplo 5.11. *Seja* $u_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *uma seqüência dada por* $u_n = \frac{1}{n^2}$. *Seja* $N = \{1, 3, 5, 7, 9, ...\} \subset \mathbb{N}$. *Então a seqüência* $u_n/_N : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *é subseqüência de* u_n. *Os termos da seqüência são* $\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \frac{1}{36}, \frac{1}{49}, ...\}$ *e os termos da subseqüência são* $\{1, \frac{1}{9}, \frac{1}{25}, \frac{1}{49}, ...\}$.

Teorema 5.12. *Seja* $u_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *uma seqüência em* $\mathbb{R}$ *tal que* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ *existe, então o limite é único.*

Demonstração: Suponhamos que $u_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é uma seqüência em $\mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ existe e suponhamos que a e b, com $a \neq b$, são limites dessa seqüência. Então dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $K_1 > 0$ e $K_2 > 0$ tal que para todo $n > K_1$ tenhamos $|u_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ e para todo $n > K_2$ tenhamos $|u_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Agora seja $K = \max\{K_1, K_2\}$. Então podemos escrever, para todo $n > K$:

$$|a - b| = |a - u_n + u_n - b|$$

$$|a - b| = |-(u_n - a) + (u_n - b)| \leq |u_n - a| + |u_n - b| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Como a e b são constantes, teremos $|a - b| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$ se, e somente se $|a - b| = 0$, isto é se $a = b$. Logo, o limite de u_n, se existe, é único.

Sequência Limitada

Definição 5.13. *Seja $u_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ uma seqüência em $\mathbb{R}$. Dizemos que u_n é limitada quando o conjunto $\{u_1, u_2, u_3, ..., u_n........\}$ for limitado.*

Teorema 5.14. *Seja $u_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ uma seqüência convergente $\mathbb{R}$, então u_n é limitada.*

Demonstração: Suponhamos que $u_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é uma seqüência convergente em $\mathbb{R}$ e suponhamos que a é limite dessa seqüência. Então dado $\varepsilon = 1$ podemos encontrar $K > 0$ tal que para todo $n > K$ tenhamos $|a - b| < 1$. Assim, para todo $n > K$ temos $u_n \in B(a, 1)$. Como o conjunto $\{u_1, u_2, u_3, ..., u_{n_{-1}}\}$ é finito segue que $\{u_1, u_2, u_3, ..., u_{n-1}, u_n, ...\} \subset B(a, 1)$. Logo, u_n é limitada.

Observação 10. *A recíproca desse teorema não é verdadeira. Por exemplo, $u_n = (-1)^n$ é limitada, mas não é convergente.*

Teorema 5.15. *Seja $u_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ uma seqüência em $\mathbb{R}$. Se $\lim u_n = a$ então toda subseqüência de u_n converge e tem limite igual a a.*

Demonstração: Suponhamos que existe uma subseqüência x_{n_k} de u_n e que $\lim x_n = a$, então para todo $\varepsilon > 0$, existe $K > 0$ tal que $|a - b| < \varepsilon$ para todo $n_i > K$. Sendo $N = \{n_1 < n_2 < n_3........\}$ um conjunto infinito, existe $K > 0$ tal que $n_i > K$. Logo, para $\gamma > i$ temos $n_\gamma > n_i > K$ donde vem $|a - b| < \varepsilon$ e, assim, $\lim x_{n_k} = a$.

Neste parágrafo analisaremos algumas propriedades das seqüências em $\mathbb{R}$.

Definição 5.16. *Seja u_n uma seqüência de valores reais. Então:*

- Dizemos que u_n é não decrescente se $u_{n+1} \geq u_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Dizemos que u_n é crescente se $u_{n+1} > u_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Dizemos que u_n é não crescente se $u_n \geq u_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Dizemos que u_n é decrescente se $u_n > u_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definição 5.17. *Seja u_n uma seqüência de valores reais. Então u_n é denominada monótona se pertencer a um dos tipos descritos na definição 5.16.*

Exemplo 5.18. *Mostrar que a seqüência $u_n = \frac{n+1}{n^2+2}$ é monótona.*

Solução: Devemos mostrar que u_n pertence a um dos tipos descritos na definição 5.16.

Temos $u_n = \frac{n+1}{n^2+2}$ e $u_{n+1} = \frac{(n+1)+1}{(n+1)^2+2} = \frac{n+2}{n^2+2n+3}$

Verificaremos se que $u_{n+1} \leq u_n$.Então,

$$u_{n+1} \leq u_n$$

$$\frac{n+2}{n^2+2n+3} \leq \frac{n+1}{n^2+2}$$

$$(n^2+2)(n+2) \leq (n+1)(n^2+2n+3)$$

$$n^3+2n^2+2n+4 \leq n^3+3n^2+5n+3$$

$$1 \leq n^2+3n$$

A última desigualdade é verdadeira para todo n. Logo, $u_n = \frac{n+1}{n^2+2}$ é decrescente e, assim, monótona.

Definição 5.19. *Seja u_n uma seqüência numérica C e K dois números reais. Dizemos que C é limitante inferior de u_n se $C \leq u_n$ para todo n e que K é limitante superior de u_n se $K \geq u_n$ para todo n.*

Exemplo 5.20. *Consideremos a seqüência* $u_n = \frac{n+1}{n^2+2}$ *cujos termos são* $\frac{2}{3}, \frac{3}{6}, \frac{4}{11}, \frac{5}{18}, ...$ *e cujo limite é* $L = 0$. *Então todo número real* $C \leq 0$ *é limitante inferior de* u_n *e todo* $K \geq \frac{2}{3}$ *é limitante superior de* u_n.

Definição 5.21. *Seja* u_n *uma seqüência numérica que possui limitantes inferiores e superiores então* u_n *é dita seqüência limitada.*

Observação 11. *Note que uma seqüência para ser limitada não precisa ter o limite. Por exemplo,* $u_n = (-1)^n$ *não tem limite mas é limitada.*

Teorema 5.22. *Toda seqüência monótona limitada em* $\mathbb{R}$ *é convergente.*

Teorema 5.23. *Sejam* u_n *e* y_n *seqüências numéricas em* $\mathbb{R}$ *tais que* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$ *e* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. *Então são válidas as afirmações:*

i) $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$

ii $\lim\limits_{n\to\infty} cu_n = ca$

ii $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n \pm y_n) = a \pm b$;

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n y_n = ab$;

iii) Se $b \neq 0$ e $y_n \neq 0$ então $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{y_n} = \frac{a}{b}$.

vi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c}{n^k} = 0$, se k é uma constante positiva

Demonstração:

i) Sejam u_n e y_n seqüências numéricas em $\mathbb{R}$ tais que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$ e $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, então dado $\varepsilon > 0$ existem K_1 e K_2 maiores que zero tais que $|u_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n > K_1$ e $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n > K_2$. Seja $K = máx\{K_1, K_2\}$ então para todo $n > K$ temos $|u_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Assim,

$$|u_n + y_n| = |u_n + y_n - (a + b)|$$

$$|u_n + y_n| = |(u_n - a) + (y_n - b)| \leq |u_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} (u_n + y_n) = a + b.$$

Analogamente, mostra-se que $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n - y_n) = a - b$.

ii) Sejam u_n e y_n seqüências numéricas em $\mathbb{R}$ tais que $\lim_{n\to\infty} u_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, então dado $\varepsilon > 0$ existe $K > 0$ tal que $|u_n - a| < \frac{\varepsilon}{2N}$ e $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2N}$ para todo $n > K$. Além disso, u_n e y_n são seqüências limitadas, de modo que existe $N > 0$ tal que $|u_n| < N$ e $|y_n| < N$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$|u_n y_n - ab| = |u_n y_n - u_n b + u_n b - ab|$$

$$|u_n y_n - ab| = |u_n(y_n - b) + b(u_n - a)| \leq |u_n(y_n - b)| + |b(u_n - a)|$$

$$|u_n y_n - ab| \leq |u_n|\,|y_n - b| + |b|\,|(u_n - a| < N\,|y_n - b| + N\,|(u_n - a|$$

$$|u_n y_n - ab| \leq \frac{N\varepsilon}{N} + \frac{N\varepsilon}{N} = \varepsilon.$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} u_n y_n = ab.$$

5.2. SÉRIES

Definição 5.24. *Seja u_n uma seqüência numérica. Denominanos série numérica à somas dos primeiros $k -$ termos dessa seqüência numérica u_n. Já u_n será denominado termo geral da série.*

A série gerada pela seqüência será denotada por:

$$\sum_{n=1}^{n=k} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_k$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_k + ...$$

Para melhor entendimento vamos considerar e analisar um problema.

Problema 5.25. *Um estudante deverá receber mesada de seu pai em unidades monetárias* UM, *durante o tempo que permanecer na universidade, segundo a sequência* $u_n = \dfrac{20000}{n(n+1)}$, *em que* n *corresponde ao número da parcela a ser recebida. Pergunta-se:*
i - Qual o montante que o estudante deverá receber até o final da faculdade supondo que conclua o curso em 60 meses?
ii) No caso do estudante permanecer na universidade indefinidamente, como ficará o montante?

Solução: As parcelas mensais serão dada pela seqüência que descreve o valor da mesada são:

$$10000,\ \tfrac{10000}{3},\ \tfrac{5000}{3},\ 1000,\ \tfrac{2000}{3},\ \tfrac{10000}{21},\ \tfrac{2500}{7},\ \tfrac{2000}{9},\ \tfrac{2000}{11},\ \ldots\ldots$$

Para responder a pergunta vamos escrever o problema no formato de uma série infinita. Isto é,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2000}{n(n+1)} = 10000 + \frac{10000}{3} + \frac{5000}{3} + 1000 + \frac{2000}{3} + \frac{10000}{21} + \frac{2500}{7} \ldots\ldots\ldots$$

As somas parciais são:

$$S_1 = x_1 = 10000 \qquad S_2 = S_1 + x_2 = \frac{40000}{3} \qquad S_3 = S_2 + x_3 = 15000$$
$$S_4 = S_3 + x_4 = 16000 \qquad S_5 = S_4 + x_5 = \tfrac{50\,000}{3}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad S_n = S_{n-1} + u_n$$

Agora vamos determinar uma fórmula para o termo geral da soma. Escreveremos o termo geral da série em frações parciais. Temos então,

$$\frac{20000}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$$
$$20000 = A\,(n+1) + Bn$$
$$20000 = (A+B)\,n + A$$
$$\begin{cases} A = 20000 \\ A + B = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos $A = 20000$ e $B = -20000$

Desse modo a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{20000}{n(n+1)}$ pode ser reescrita como segue

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{20000}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{20000}{n} - \frac{20000}{n+1} \right)$$

Já a soma dos $n-primeiros$ termos será dada por:

$$S_n = \left(20000 - \tfrac{20000}{2}\right) + \left(\tfrac{20000}{2} - \tfrac{20000}{3}\right) + ... + \left(\tfrac{20000}{n} - \tfrac{20000}{n+1}\right)$$

Cuja simplificação resulta em

$$S_n = 20000 - \frac{20000}{n+1}$$

que simplificada resulta em

$$S_n = \frac{20000n}{n+1}$$

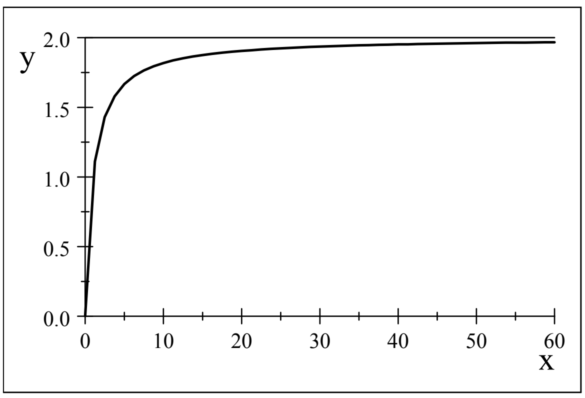
O leitor poderá verificar que as somas parciais determinadas acima corresponde as resultadas pela fórmula.

A resposta da questão $i)$ do problema corresponde à sexagésima soma, ou seja

$$S_{60} = \frac{20000 * 60}{61} = 19672.$$

Desse modo, após 60 meses o estudante terá recebido um montante de $19672UM$

Passaremos a resposta da segunda questão. No gráfico abaixo podemos ver o crescimento da soma da série. Observe que a escala do eixo y é 1 para 10000.



Portanto, se o estudante ficar a indefinidamente na universidade, observando o gráfico, podemos afirmar que não receberia mais do que $20000UM$.

Isso significa que a soma da série tem limite $20000UM$ quando o tempo tende para infinito. Ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{20000n}{n+1} = 20000$$

Em outras palavras a série converge para 20000.

O conjunto de somas parciais da série forma uma seqüência de somas. Definimos o limite de uma seqüência de somas parciais do mesmo modo que foi definido limite de uma seqüência numérica.

Limite de uma Série

Definição 5.26. *Seja S_n uma seqüência de somas parciais, dizemos que o número S é limite de S_n quando n tende para o infinito se dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $K > 0$ tal que para todo $n > K$ vale a desigualdade $|S_n - S| < \varepsilon$*

Exemplo 5.27. *Consideremos uma seqüência de somas parciais, obtida no problema 5.25 dada por $S_n = \dfrac{20000n}{n+1}$. Mostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{20000n}{n+1} = 20000$.*

Solução: Devemos mostrar que dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $K > 0$ tal que para todo $n > K$ vale a desigualdade $|S_n - S| < \varepsilon$. De $|S_n - S| < \varepsilon$ temos

$$|S_n - S| = \left|\frac{20000n}{n+1} - 20000\right| = \left|\frac{20000n - 20000n - 20000}{n+1}\right| = \left|\frac{-20000}{n+1}\right| < \varepsilon$$

De modo que podemos escrever $\frac{20000}{n+1} < \varepsilon$ donde vem $20000 < n\varepsilon + \varepsilon$ ou $\frac{20000-\varepsilon}{\varepsilon} < n$. Consequentemente, podemos tomar $K = \frac{20000-\varepsilon}{\varepsilon}$ e a definição 5.24 estará satisfeita.

Suponhamos que se deseja saber a partir de que parcela a diferença entre o montante e o limite é menor do que $300UM$. Para obter a resposta tomamos $\varepsilon = 300$ e obteremos $K = \frac{20000-\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{20000-300}{300} = 65.667$. Isso significa que em todas as parcelas, a partir da sexagésima sexta, a diferença entre o montante e o limite é menor do que $300UM$.

Suponhamos que se deseja saber a partir de que parcela a diferença entre o montante e o limite é menor do que $200UM$. Para obter a resposta tomamos $\varepsilon = 200$

e obteremos $K = \frac{20000-\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{20000-200}{200} = 99$. Isso significa que em todas as parcelas, a partir da parcela de número 99, a diferença entre o montante e o limite é menor do que $100UM$.

Observação 12. *Como no estudo de limite das funções, no estudo das séries apenas temos interesse em ε com valores próximos de zero, pois interessa apenas saber o comportamento da função próximo ao ponto de limite.*

Séries Convergentes

Definição 5.28. *Sejam u_n uma sequência numérica, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ a série cujo termo geral é u_n, S_n a somas parciais dos termos dessa série. Dizemos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ é* **convergente** *se $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ existe. Caso contrário a série será denominada* **divergente**..

Exemplo 5.29. *A série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{20000}{n(n+1)}$, obtida no problema 5.25 é convergente pois $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{20000n}{n+1} = 20000$.*

Exemplo 5.30. *Verifique se a série dada por $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{5^{n-1}}$ é convergente.*

Solução: Devemos verificar se a soma da série tem limite. Todas as séries que apresentam esse modelo podem ser resolvidas conforme o modelo que segue.

$i)$ Escrevemos a soma dos $n - primeiros$ termos.

$$S_n = 2 + \frac{2^2}{5} + \frac{2^3}{5^2} + \frac{2^4}{5^3} + \dots\dots\dots + \frac{2^n}{5^{n-1}}$$

$ii)$ Multiplicamos S_n por $\frac{2}{5}$ e obtemos

$$\tfrac{2}{5}S_n = \frac{2^2}{5} + \frac{2^3}{5^2} + \frac{2^4}{5^3} + \dots\dots\dots + \frac{2^n}{5^{n-1}} + \frac{2^{n+1}}{5^n}$$

$ii)$ Fazemos a diferença entre os resultados de $i)$ e $ii)$

$$S_n - \tfrac{2}{5}S_n = (2 + \frac{2^2}{5} + \frac{2^3}{5^2} + \dots + \frac{2^n}{5^{n-1}}) - \left(\frac{2^2}{5} + \frac{2^3}{5^2} + \dots\dots + \frac{2^n}{5^{n-1}} + \frac{2^{n+1}}{5^n}\right) \text{ ou}$$

$$\tfrac{3}{5}S_n = 2 - \frac{2^{n+1}}{5^n}$$
$$S_n = \tfrac{10}{3} - \tfrac{5}{3}\frac{2^{n+1}}{5^n} = \frac{10}{3} - \frac{10}{3}(\frac{2}{5})^n$$
e
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{10}{3} - \tfrac{10}{3}(\frac{2}{5})^n\right)$$
donde
$$S = \tfrac{10}{3}$$

Consequentemente a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{5^{n-1}}$ é convergente.

Propriedades

1. Uma das propriedades das séries infinitas é que a convergência ou divergência não é afetada se subtrairmos ou adicionarmos um número finito de termos a elas. Por exemplo, se no problema 5.25 o estudante só começasse a receber a primeira parcela após 5 meses a série seria escrita com $n = 6$ no primeiro termo, ou seja, $\sum\limits_{n=6}^{\infty} \frac{20000}{n(n+1)}$, e a soma seria $S = 20000 - S_5$. Se por outro lado o seu pai decidisse nos primeiros 10 meses dar uma mesada fixa de $2000UM$ por mês e iniciar o pagamento con $n = 1$ no décimo primeiro mês a soma seria $S = 2000(10) + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{20000n}{n+1}$. Em ambos os casos a série continuará convergente. Nestes termos, podemos enunciar o seguinte teorema.

2. Se a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ é convergente e a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ é divergente, então a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+y_n)$ é divergente.

Observação 13. *Se as séries $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ são divergentes, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n + y_n)$ pode ou não ser convergente.*

3. Se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ é uma série convergente de termos positivos, seus termos podem ser reagrupados de qualquer modo, e a série resultante também será convergente e terá a mesma soma que a série dada.

Teorema 5.31. *Seja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_k + ...$ uma série. Se a série*

$$\sum_{n=\alpha}^{\infty} u_n = u_{n-\alpha} + u_{n-(\alpha+1)} + u_{n-(\alpha+2)} + ...$$

for convergente, então a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_k + ...$$

também será convergente.

Demonstração: Suponhamos que a série $\sum\limits_{n=\alpha}^{\infty} u_n$ é convergente, então possui soma. Seja $S_{\alpha-n}$ o termo geral da sua soma, $S_1 = \lim\limits_{n\to\infty} S_{\alpha-n}$ e seja $S_\alpha = x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_k$. Desse modo, o termo geral da soma da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ será $S_n = S_\alpha + S_{\alpha-n}$ e, portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_{\alpha-n} + \lim\limits_{n\to\infty} S_\alpha$ donde vem $S = S_1 + S_\alpha$. Consequentemente, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ é convergente.

5.3. Propriedades

Sejam

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_k + ...$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = y_1 + y_2 + y_3 + ... + y_k + ...$$

duas séries que convergem para S e S', respectivamente, então são válidas as seguintes propriedades:

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ku_n = k\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ para todo $k \in \mathbb{R}$ e a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ku_n$converge para kS.

ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm y_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ e a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm y_n)$ converge para $S + S'$.

Exercícios

Em cada uma das séries abaixo encontre o termo geral da soma e verifique se a série é convergente.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ Resposta $S_n = \frac{n}{2n+1}$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{(4n-3)(4n+1)}$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ Resposta $S_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ Resposta $S_n = \ln\left(\frac{1}{n+1}\right)$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{n-1}}{3^n}$

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$ Resposta $S_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1.2.3.4.5.6......n(n+2)}$ Resposta $S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+2)!}$

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n+4}{n^3+3n^2+2n}$, Resposta $S_n = \frac{5}{2} - \frac{2}{n+1} - \frac{1}{n+2}$.

Condição necessária para convergência.

Não existe uma regra geral para verificar se uma série é convergente. Como veremos nos próximos itens há critérios que dão respostas a tipos particulares de séries. Porém, verificando se uma série não possui a condição necessária para convergência saberemos que ela não é convergente. Essa condição é dada pelo teorema que segue.

Teorema 5.32. *Seja* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *uma série convergente, então* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Demonstração: Suponhamos que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ converge para S, então podemos afirmar que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, de modo que pela definição 5.28 dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $K > 0$ tal que para todo $n > K$ vale a desigualdade $|S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $|S_{n-1} - S| < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $|u_n| = |S_n - S_{n-1}|$ podemos escrever

$$\begin{aligned}
|u_n - 0| &= |S_n - S_{n-1} - 0| \\
|u_n| &= |S_n - S + S - S_{n-1}| \\
|u_n| &= |(S_n - S) + (-(S_{n-1} - S))| \\
|u_n| &= |(S_n - S) + (-(S_{n-1} - S))| \\
|u_n| &\leq |(S_n - S)| + |(S_{n-1} - S| \\
|u_n| &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Assim, pela definição 5.3 segue que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Uma consequência muito importante desse teorema é o corolário a seguir:

Corolário 5.33. *Seja* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *uma série tal que* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$*, então* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *é divergente.*

Exemplo 5.34. *A série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+2}{3n+5}$ *é divergente já que* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+2}{3n+5} = \frac{2}{3} \neq 0.$

Porém, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é tal que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, isto é, possui a condição necessária para convergência, mas não podemos, sem fazer um teste de convergência, afimar se ela é convergente ou divergente.

Observação 14. *Portanto fiquem atentos, se o* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ *prova-se que a série é divergente. Mas se o* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ *a série pode convergir ou divergir, para issso necessitamos estudar critérios para fazer tal verificação.*

Veremos na sequência alguns resultados que permitem verificar se uma série é convergente ou não,

Teorema 5.35. *Seja* S_n *uma sequência de somas parciais convergente. Então, dado* $\varepsilon > 0$ *podemos encontrar* $K > 0$ *tal que para todo* $m, n > K$ *vale a desigualdade* $|S_m - S_n| < \varepsilon$.

Demonstração: Suponhamos S_n seja uma sequência de somas parciais convergente. Então, dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $K > 0$ tal que para todo $m, n > K$ valem as desigualdades $|S_m - S| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $|S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}$. Agora

$$\begin{aligned}
|S_m - S_n| &= |S_m - S + S - S_n| \\
|S_m - S_n| &= |(S_m - S) + (S - S_n)| \\
|S_m - S_n| &\leq |(S_m - S)| + |(S_n - S)| \\
|S_m - S_n| &< \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Logo, o teorema é válido.

Observação 15. *O teorema 5.35 pode ser ilustrado considerando o problema 5.25. Lá nossa suposição era saber a partir de que parcela a diferença entre o montante e o limite era menor do que* $300UM$. *Para obter a resposta tomamos* $\varepsilon = 300$ *e obteremos* $K = 65, 667$. *Isso significa que em todas as parcelas, a partir da sexagésima sexta, a diferença entre o montante e o limite é menor do que* $300UM$. *Agora tomando* $n = 70$ *e* $m = 80$ *obteremos* $S_{70} = \dfrac{20000 * 70}{70+1} = 19718$ *e* $S_{80} = \dfrac{20000 * 80}{80+1} = 19753.$. *Consequentemente,* $|S_{70} - S_{80}| = |1971\,8 - 19753| = 35.0 < 300$. *Caso tomássemos* $m, n < 66$ *não necessariamente a diferença entre as somas será menor do que* 300.

5.4. SÉRIES ESPECIAIS

Série harmônica

Definição 5.36. *Denominamos série harmônica à série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$.

A série harmônica, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, embora possua a condição necessária para convergência não converge. Para provar vamos mostrar que ela contraria o teorema 5.35. Vamos inicialmente escrever a soma dos $n-primeiros$ termos e a soma dos $2n-primeiros$ termos,

$S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+.....\frac{1}{n}$
$S_{2^n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+.....\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+.....\frac{1}{2^n}$
Na sequência fazemos a diferença entre as duas somas parciais
$S_{2^n}-S_n = 1+\frac{1}{2}.....\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+.....\frac{1}{2^n}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+.....\frac{1}{n}\right)$
$S_{2^n}-S_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+.....\frac{1}{2n}$
Como $\frac{1}{n+1}>\frac{1}{2n}, \frac{1}{n+2}>\frac{1}{2n}, \frac{1}{n+3}>\frac{1}{2n}$........ podemos escrever
$S_{2^n}-S_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+.....\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+.......+\frac{1}{2n}$
$S_{2^n}-S_n > \frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$

Tomando $m=2^n$ obtemos $|S_m-S_n|>\frac{1}{2}$ e isso contraria o teorema 5.35. Logo, a série harmônica é divergente. Veja algumas somas de série harmônica obtidas com auxílio do MAPLE 6

$S_{10}=2,9289$ $S_{100}=5,1873$ $S_{1000}=7,485$ $S_{um\ milhão}=14,392$
$S_{um\ bilhão}=21,300$ $S_{um\ trlhão}=28,208$

Como pode ser visto, lentamente a soma tende a infinito.

Série geométrica

Definição 5.37. *Denominamos série geométrica à série escrita na forma* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_1q^{n-1}$, *onde q é denominada razão.*

Exemplo 5.38. *Encontrar a soma da série geométrica e estudar sua convergência.*

Solução: Consideremos a série geométrica $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_1q^{n-1}=a_1+a_1q+aq^2+.....+a_1q^{n-1}$ e a soma dos $n-primeiros$ termos dada por $S_n=a_1+a_1q+aq^2+.....+a_1q^{n-1}$.

Multipicamos essa soma pela razão q e obtemos $qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + ... + a_1q^n$. Encontramos a diferença entre as duas somas

$$qS_n - S_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + ... + a_1q^n - (a_1 + a_1q + aq^2 + ... + a_1q^{n-1})$$
$$qS_n - S_n = a_1q^n - a_1$$
$$S_n(q-1) = a_1(q^n - 1)$$
$$\text{donde vem } S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{(q-1)}$$

Para estudar a convergência dessa série devemos considerar três casos a saber:

I Se $q = 1$ então $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1(q^n-1)}{(q-1)} \to \infty$ e a série é divergente. Se $q = -1$ então S_n tem dois valores para o limite e, portanto, a série é divergente.

II Se $|q| > 1$ então $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1(q^n-1)}{(q-1)} \to \infty$ e a série é divergente.

III Se $|q| < 1$ então $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1(q^n-1)}{(q-1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1q^n}{q-1} + \lim \dfrac{-a_1}{(q-1)} = \dfrac{-a_1}{(q-1)}$ e a série é convergente.

Desse modo, podemos escrever $S = \dfrac{a_1}{1-q}$. Conclusão:
a série geométrica é divergente se $|q| \geq 1$ e convergente se $|q| < 1$.

Observação 16. *A soma de uma série geométrica convergente ($|q| < 1$) converge para* $S = \dfrac{a_1}{1-q}$

Exemplo 5.39. *A série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ *é convergente pois tem razão* $q = \frac{2}{3} < 1$. *Já a série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$ *é divergente pois tem razão* $q = \frac{3}{2} > 1$.

5.5. Critérios para verificar a convergência de uma série

Quando conhecemos o termo geral da soma de uma série é fácil fazer a verificação da convergência. Podemos verificar se uma série converge usando critérios para convergência que passaremos ao estudo de alguns.

Critério da comparação.

Teorema 5.40. *Seja* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *uma série e seja* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ *uma série cuja convergência queremos estudar, então:*

i) Se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *for uma série convergente e* $0 \leq y_n \leq u_n$ *para todo* n *a série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ *é convergente.*

ii) Se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *for uma série divergente e* $y_n \geq u_n \geq 0$ *para todo* n *a série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ *é divergente.*

Demonstração: i) Sejam $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ uma série convergente e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ uma série tal que $0 \leq y_n \leq u_n$ para todo n. Como $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ uma série convergente a sequência de somas parciais S_n tem limite L, de modo que $u_1+u_2+u_3+..........+u_k+... < L$. Como $0 \leq y_n \leq u_n$ para todo n segue que a sequência de somas parciais $0 \leq y_1+y_2+y_3+.........+y_k+.... \leq u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_k + ... < L$. Consequentemente, a sequência de somas parciais $y_1 + y_2 + y_3 + ... + y_k + ...$ é limitada e, além disso, monótona. Logo, pelo teorema 5.22 é convergente e, assim, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ é convergente.

ii) Sejam $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ uma série divergente e $y_n \geq u_n \geq 0$ para todo n a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ é divergente. Como $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ uma série divergente a sequência de somas parciais S_n não tem limite, de modo que dado um número $L > 0$ existe $K > 0$ tal que $u_1 + u_2 + u_3 + ...+u_k+... > L$ para todo $n > K$. Como $y_n \geq u_n$ para todo n segue que a sequência de somas parciais $y_1 + y_2 + y_3 + ... + y_k + ... \geq u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_k + ... > L$. Consequentemente, a sequência de somas parciais $y_1 + y_2 + y_3 + ... + y_k + ...$ não é limitada e, assim, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ é divergente.

Exemplo 5.41. *Usando o teorema 5.40 estudar a convergência da série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n^3+n^2+n+1}$.

Solução: Conforme o teorma 5.40 devemos encontrar uma série que sabemos ser convergente ou divergente e fazer a comparação do termo geral dessa série com a série em estudo. Um procedimento usado para encontrar um termo geral adequado é majorar o termo geral da série proposta. Vamos descrever o processo.

i) Temos duas formas de majorar um quociente a saber: aumentando o denominador ou diminuindo o denominador. No termo geral da série em estudo vamos diminuir o denominador passo a passo

$$\frac{n}{n^3+n^2+n+1} < \frac{n}{n^3+n^2+n} < \frac{n}{n^3+n^2} = \frac{1}{n(n+1)}$$

No exemplo 5.25 vimos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{20000}{n(n+1)}$ é convergente. Como podemos escrever $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{20000}{n(n+1)} = 20000 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ segue (pela propriedade i) que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ é convergente.

ii) Vamos verificar se $\frac{n}{n^3+n^2+n+1} \leq \frac{1}{n(n+1)}$ para todo n.

$$\frac{n}{n^3+n^2+n+1} \leq \frac{1}{n(n+1)}$$

$$nn(n+1) \leq n^3+n^2+n+1$$

$$n^3+n^2 \leq n^3+n^2+n+1$$

$$0 \leq n+1$$

Verdadeiro para todo n

Logo, pelo teorema 5.40 a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+n^2+n+1}$ é convergente.

Critério de D 'Alambert

Teorema 5.42. *Seja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ uma série tal que $u_n > 0$ para todo n e $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L$. Então*

i) A série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge se $L < 1$;

ii) A série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ diverge se $L > 1$;

iii) Nada podemos afirmar se $L = 1$.

Demonstração: Seja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ uma série tal que $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L$. Então, dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $K > 0$ tal que para todo $n > K$ vale a desigualdade $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - L\right| < \varepsilon$. Suponhamos que $L < 1$. Então existe q tal que $L < q < 1$, e isso implica em $q - L < 1$. Tomando $\varepsilon = q - L$ podemos escrever $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - L\right| < q - L$ donde vem $-(q-L) < \frac{u_{n+1}}{u_n} - L < q - L$ ou $-(q-L) + L < \frac{u_{n+1}}{u_n} < q$. Da última relação concluímos que $u_{n+1} < u_n q$. Dessa relação vem:

$$u_{n+1} < u_n q$$

$u_{n+2} < u_{n+1} q < u_n q q$ ou seja $u_{n+2} < u_n q^2$

$u_{n+2} < u_{n+2} q < u_n q^2 q$ ou seja $u_{n+3} < u_n q^3$

$u_{n+k} < u_{n+(k-1)} q < u_n q^{k-1} q$ ou seja $u_{n+k} < u_n q^k$

e assim sucessivamente, de forma que

$$u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + ... < u_n q + u_n q^2 + u_n q^3 + ...$$

Note que $u_n q + u_n q^2 + u_n q^3 + ...$ é uma série geométrica com razão $|q| < 1$ e, portanto, convergente. Assim, pelo teorema 5.40 a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ converge se $L < 1$.

Por outro lado, suponhamos que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = L > 1$, então obteremos $u_{n+1} > u_n$ para todo n e, desse modo, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$. Consequentemente, a série não possui a condição necessária para convergência. Logo, a série série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ diverge se $L > 1$.

Exemplo 5.43. *Usando o critério de D 'Alambert, estudar a convergência da série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n}$.

Solução: Temos $u_n = \dfrac{2^n}{n}$ e $u_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}}{n+1}$. Logo,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} = \frac{n2^{n+1}}{2^n(n+1)} = \frac{n2^n 2}{2^n(n+1)} = \frac{2n}{(n+1)}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{(n+1)} = 2 > 1$$

Consequentemente, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n}$ é divergente.

Exemplo 5.44. *Usando o critério de D 'Alambert, estudar a convergência da série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$

Solução:Temos $u_n = \dfrac{1}{n!}$ e $u_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!}$. Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

portanto a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$ converge.

.

Critério de Cauchy

Teorema 5.45. *Seja* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *uma série tal que* $u_n > 0$ *para todo* n *e* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = L$. *Então*

i) A série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *converge se* $L < 1$;

ii) A série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *diverge se* $L > 1$;

iii) Nada podemos afirmar se $L = 1$.

Demonstração: A demonstração deste teorema é análoga a do teorema 5.42.

Exemplo 5.46. *Usando o critério de Cauchy, estudar a convergência da série* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+5}\right)^n$.

Solução: Temos

$$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+5}\right)^n} = \frac{n}{2n+5}$$

Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+5} = \frac{1}{2} < 1.$$

Logo, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+5}\right)^n$ é convergente.

Exemplo 5.47. *Usando o critério de Cauchy, estudar a convergência da série* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-5}{2n+1}\right)^n$.

Solução: Temos

$$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{4n-5}{2n+1}\right)^n} = \left(\frac{4n-5}{2n+1}\right)$$

Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n-5}{2n+1}\right) = 2 > 1.$$

Logo, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-5}{2n+1}\right)^n$ é divergente.

Critério da integral

Seja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ uma série tal que $u_{n+1} \leq u_n$ para todo n. Seja $f(x)$ uma função maior do que zero, contínua e decrescente no intervalo $[0, \infty)$ tal que $f(1) = u_1, f(2) = u_2 ...., f(n) = u_n, ...$ Então, se $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ existe a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ é convergente. Caso contrário, divergente.

A demonstração deste teorema poderá ser estudada em qualquer um dos livros constantes na bibliografia.

Série p

Definição 5.48. *Denominamos série p a série escrita na forma* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ *onde p é uma constante positiva.*

A denominação p vem do fato dessa série também ser conhecida como série *hiper − harmônica*. Vamos usar o teorema 5.5 para o estudo da série p. A série p é bastante utilizada no critério da comparação.

Exemplo 5.49. *Estudar a convergência da série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$.

Solução: Temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + ... + \frac{1}{n^p} ....$$

Seja $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$, então $f(x)$ satisfaz as condições do teorema 5.5, de modo que podemos escrever

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{n \to \infty} \int_1^n \frac{1}{x^p} dx.$$

Temos três casos a considerar:

i. Se $p = 1$ teremos

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{n \to \infty} \int_1^n \frac{1}{x} dx = \lim_{n \to \infty} \ln x|_1^n = \lim_{n \to \infty} [\ln n - \ln 1] = \infty$$

Consequentemente, se $p = 1$ a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ é divergente. Note que se $p = 1$ temos a série harmônica.

ii. Se $p < 1$ teremos $1 - p > 0$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx = \lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{1}{x^p}dx = \lim_{n\to\infty}\frac{x^{1-p}}{1-p}|_1^n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right] = \infty$$

Consequentemente, se $p < 1$ a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ é divergente.

iii. Se $p > 1$ teremos $1 - p < 0$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx = \lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{1}{x^p}dx = \lim_{n\to\infty}\frac{x^{1-p}}{1-p}|_1^n = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{1-p}}{1-p} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-p} = -\frac{1}{1-p}$$

.

Consequentemente, se $p > 1$ a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ é convergente.

Exemplo 5.50. *As séries abaixo são exemplos de séries p.*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^9}$ convergente pois $p > 1$.

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ divergente pois $p < 1$.

5.6. Exercícios

1. Usando o teste de comparação verifique se as séries abaixo são convergente ou não.

$0a)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n3^n}$ $\quad b)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$ $\quad c)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$ $\quad d)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{4n^3+1}$

$0\ \ e)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+4n}}$ $\quad f)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|sen(n)|}{2^n}$ $\quad g)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2+n)!}$ $\quad h)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+5}}$

$i)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n^2+5}}$ $\quad j)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+\sqrt{n+5}}$ $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^3+n+1}$ $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(2n)!}$

2. Usando o teste de D 'Alambet verifique se as séries abaixo são convergente ou não.

$a)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2 2^n}$ $\quad b)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{e^n}$ $\quad c)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$

$d)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{\sqrt{n^3+1}}$ $\quad e)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n(n^2+2)}$ $\quad f)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n\,(2+n)!}$

$g)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+5}$ $\quad h)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n4^n}$ $\quad i)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n+n+1}$

3. Usando o teste de Cauchy, verifique se as séries abaixo são convergente ou não.
$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^n}{n^{\frac{n}{2}}}$ $\quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n^2}\right)^n 2^n$ $\quad a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n^2 2^n}\right)^n$

4. Usando o teste da integral verifique se as séries abaixo são convergente ou não.
$a) \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$ $\quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$ $\quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ $\quad e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{arctgn}{n^2+1}$ $\quad f) \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$

$g) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n}$ $\quad h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{arctgn}}{n^2+1}$ $\quad i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+4)}$

5.7. Séries de Termos Positivos e Negativos

Definição 5.51. *Seja $u_n > 0$ para todo n. Denominamos série alternada à série* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... + (-1)^{n-1} u_n.$

..

Exemplo 5.52. *A série* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p} = 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + ... + (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p}.......$ *é um exemplo de série alternada.*

Convergência de uma série alternada

Infelizmente todos os critérios de convegência de séries vistos até o momento não são válidos para séries alternadas. Por isso, passaremos a ver alguns resultados que são válidos para esse caso.

Teorema 5.53. Teorema de Leibnitz.

Seja a série alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... + (-1)^{n-1} u_n....$$

tal que:

i) $u_1 > u_2 > u_3 > u_4 > ....;$

Teorema 5.54. •

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

Então são válidas as seguintes conclusões:

a) A série é convergente e

b) $0 < S_n < u_1$.

Demonstração: $a)$Consideremos a soma dos $2n-primeiros$ termos da série alternada. Suponhamos que os termos de ordem ímpar da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... + (-1)^{n-1}u_n$....sejam positivos e os de ordem par negativos. Se por acaso o primeiro termo for negativo iniciaremos a contagem em u_2, pois a retirada um número finito de termos não afeta a convergência da série. Desse modo teremos u_{2n-1} positivo e u_{2n} negativo e, portanto, obteremos $0 < S_2 < S_4 < .... < S_{2n}$.
$S_{2n} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... - u_n + u_{n+1} - u_{n+2} + ... - u_{2n}$.

Aplicando a propriedade associativa obtemos

$S_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + ... + (u_n - u_{n+1}) + ... + (u_{2n-1} - u_{2n})$.

Como $u_1 > u_2 > u_3 > u_4 > ...$ segue que

$(u_1 - u_2) > 0, (u_3 - u_4) > 0, (u_n - u_{n+1}) > 0, ..., (u_{2n-1} - u_{2n}) > 0$

Consequentemente, S_{2n} é positiva

Podemos também associar os termos de outra forma como segue

$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - .... - (u_n - u_{n+1}) - ... - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n}$.

Em virtude da condição $ii)$ cada termo entre parênteses é positiva. Portanto, subtraindo uma quantidade positiva de u_1 obteremos um resultado inferior a u_1, de modo que $0 < S_{2n} < u_1$.

Demonstraremos o item $b)$. Como $0 < S_{2n} < u_1$ segue que S_{2n} é limitada com $0 < S_2 < S_4 < .... < S_{2n}$. Assim, a sequência de somas $S_2, S_4, ..., S_{2n}$ é monótona e, pelo teorema 5.22, é convergente. Seja $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$. Pelo item $a)$ segue que $s < u_1$. Sendo $S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1}$ podemos escrever:

$\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} + \lim\limits_{n\to\infty} u_{2n+1} = S + 0 = S$

Consequentemente as somas de ordem ímpar tem a mesma soma dos termos de ordem par. Finalmente, mostraremos que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

Como $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$, dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $K_1 > 0$ tal quem $|S_{2n} = S| < \varepsilon$ sempre $2n > K_1$.

Como $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = S$, dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $K_2 > 0$ tal quem $|S_{2n} = S| < \varepsilon$ sempre $2n + 1 > K_2$.

Tomando $K = \max\{K_1, K_2\}$, para todo $n > K$ vale a desigualdade $|S_n = S| < \varepsilon$. Logo, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ e a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ é convergente.

Exemplo 5.55. *Usando o teorema de Leibnitz, estudar a convergência da série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+2}{n(n+1)}$.

Solução: Vamos verificar se u_n satisfaz as condições do teorema 5.7.O termo geral da série é $u_n = \frac{n+2}{n(n+1)}$ e $\frac{n+2}{n(n+1)} > 0$ par todo n. Assim, Vamos verificar se $u_n > u_{n+1}$ para todo n. Temos

$$
\begin{gathered}
u_n > u_{n+1} \\
\frac{n+2}{n(n+1)} > \frac{(n+1)+2}{(n+1)(n+1)+1)} \\
\frac{n+2}{n(n+1)} > \frac{n+3}{(n+1)(n+2)} \\
(n+2)(n+1)(n+2) > n(n+1)(n+3) \\
n^3 + 5n^2 + 8n + 4 > n^3 + n^2 + 3 \\
4n^2 + 8n > -1 \text{ Verdadeiro para todo } n
\end{gathered}
$$

Consequentemente a primeira condição do teorem 5.7 Está satisfeita.

Agora vamos verificar se $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{n(n+1)} = 0.$

Verificamos, portanto, que todas as exigências do teorema 5.7 estão satisfeitas. Logo, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+2}{n(n+1)}$ é convergente.

5.8. Série de termos de sinais quaisquer

Definição 5.56. *Denominamos série de termos de sinais quaisquer à série formada por termos positivos e negativos.*

Exemplo 5.57. *A série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} sen(\frac{n\pi}{6}) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + 0...$ *é um exemplo de série de termos de sinais quaisquer. As séries alternadas são casos particulares das séries de termos de sinais quaisquer.*

Veremos na sequência um teorema que permite verificar se uma série de termos de sinais quaisquer é convergente.

Teorema 5.58. *Seja* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *uma série de termos de sinais quaisquer. Se a série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ *for uma série convergente então a série a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *será convergente.*

Se a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ for uma série divergente nada podemos afirmar sobre a convergência da série de sinais quaisquer $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Exemplo 5.59. *Vimos no exemplo 5.55 que a série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+2}{n(n+1)}$ *é convergente. Porém, a série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n-1} \frac{n+2}{n(n+1)}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+1)}$ *não é convergente. O leitor pode verificar essa afirmação usando o critério da comparação.*

Exemplo 5.60. *Usando o teorema 5.58 estudar a convergência da série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^3}$.

Solução: Podemos escrever $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n-1} \frac{1}{n^3}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. Como podemos observar, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ é uma série p com $p > 1$ e, portanto, convergente. Logo, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^3}$ é convergente. A convergência desta série também pode ser estudada pelo teorema de Leibnitz.

Exemplo 5.61. *Usando o teorema 5.58 estudar a convergência da série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{sen(nt)}{n^2}$.

Solução: Podemos escrever $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\dfrac{sen(nt)}{n^2}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{|sen(nt)|}{n^2}$. Usando o teste de comparação, sabendo que $|sen(nt)| \leq 1$ para todo n, podemos concluir que $\dfrac{|sen(nt)|}{n^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$ para todo n. Portanto, o termo geral da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\dfrac{sen(nt)}{n^2}\right|$ é menor que o termo geral da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ que é uma série p convergente pois $p > 1$. Logo, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{sen(nt)}{n^2}$ é convergente.

5.9. Séries absolutamente convergente e condicionalmente convergentes.

Antes de definir séries absolutamente convergente e condicionalmente convergentes vamos considerar os exemplos abaixo.

Exemplo 5.62. *Consideremos a série harmônica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ...\frac{1}{n}...$$

já mostramos que é divergente. Porém

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+.....(-1)^{n-1}\frac{1}{n}....$$

é convergente. Vamos mostrar que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ *converge sob condições, isto é, podemos interferir na sua forma de convergir.*

Solução: Para modificar o limite de convergência de $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ basta reagrupar os termos como segue:

a) Agrupamos a soma dos termos de ordem ímpar contra os de ordem par

$$S_n = \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+.....+\frac{1}{2n-1}...\right) - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}.....+\frac{1}{2n}...\right)$$

Como o leitor pode observar, poderemos escrever

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$$

e, cada uma das subsomas é divergente. Logo, ocorre $S_n = \infty - \infty$, isto é a soma é indeterminada, siginificando que se escrevermos

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

na forma

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+.....+\frac{1}{2n-1}...\right) - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}.....+\frac{1}{2n}...\right)$$

nada podemos afirmar sobre a sua convergência. Isso ocorre porque a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

não converge.

Com base no exemplo vamos definir séries absolutamente convergente e condicionalmente convergente.

Definição 5.63. *Seja* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ *uma série de termos de sinais quaisquer, então:*

i) Se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ *converge a série é denominada absolutamente convergente;*

ii) Se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *converge e* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ *diverge, então a série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *é condicionalmente convergente.*

Exemplo 5.64. *A série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{1}{n}$ *estudada no exemplo 5.62 é condicionalmente convergente e a série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{sen(nt)}{n^2}$ *estudada no exemplo 5.61 é absolutamente convergente.*

5.10. Exercícios

Verifique se as séries abaixo são absolutamente ou condicionalmente convergente.

$a) \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{2^n}{n!}$ $\quad b) \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{1}{(2n-1)!}$ $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{n^2}{n!}$

$c) \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ $\quad e) \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{n!}{2^{n+1}}$ $\quad f) \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{1}{n^2+2n}$

$g) \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{3^n}{n!}$ $\quad h) \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{n^2+1}{n^3}$ $\quad i) \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{n^n}{n!}$

5.11. SÉRIES DE FUNÇÕES

Consideremos as seguintes funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x^3$, $f_4(x) = x^4$, ..., $f_n(x) = x^n$... podemos escrever as soma

$$S_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x) + ... + f_n(x) = x^n...$$

ou

$$S_n(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ... + x^n....$$

A essa soma denominamos série de funções e $S_n(x)$ é a soma dos $n - primeiros$ termos da série. Mais geralmente definimos série de funções como segue.

Definição 5.65. *Denominamos série de funções a toda série na qual o termo geral é uma função da variável x e denotaremos por*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ...$$

Convergência de séries de funções

Como no estudo das séries numéricas, estamos interessados na convergência da séries de funções. Uma série de funções se for convergente converge para uma função. A imagem de cada valor de x numa série de funções é uma série numérica que pode ser convergente ou divergente. Por exemplo, a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ... + x^n....$$

para cada valor de x é uma série geométrica e, portanto, converge se $|x| < 1$ e diverge caso contrário. Já sua soma será a função $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$ se $|x| < 1$. Isso significa que uma série de funções convergente, converge para um conjunto de valores de x denominado domínio ou intervalo de convergência.

Definição 5.66. *Seja $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ uma série de funções que converge. Denominamos domínio ou intervalo de convergência da série ao conjunto de todos os valores de x para os quais a série é convergente e denominamos raio de convergência à distância entre o centro e a extremidade do intervalo convergência.*

Exemplo 5.67. *O raio e o intervalo de convergência da série* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ *é* $R = 1$ *e o intervalo de convergência é dado por* $(-1, 1)$.

Séries de funções majoráveis num intervalo

Definição 5.68. *Seja* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ *uma série de funções. Dizemos que* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ *é majorável no intervalo* $[a, b]$ *se existir uma série numérica convergente* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ *tal que* $|u_n(x)| \leq u_n$.

Exemplo 5.69. *Seja* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2+1}$ *uma série de funções. Então essa série é majorável para todo* x.

Prova: Pela definição 5.68, devemos mostrar que existe uma série numérica convergente $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ tal que $\left|\frac{\cos nx}{n^2+1}\right| < u_n$. Como $|\cos nx| \leq 1$ para todo n e todo x podemos escrever

$$\left|\frac{\cos nx}{n^2+1}\right| \leq \frac{|\cos nx|}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$$

Portanto, tomando $u_n = \frac{1}{n^2}$ segue que existe a série p, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$, convergente tal que $\left|\frac{\cos nx}{n^2+1}\right| < \frac{1}{n^2}$para todo $n > 1$. Logo, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2+1}$ é majorável.

Teorema 5.70. *Seja* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ *uma série de funções majorável no intervalo* $[a, b]$, *então* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ *é absolutamente convergente em* $[a, b]$.

Demonstração: Uma série que satisfaz a definição 5.68, também satisfaz as da definição 5.61 e, portanto, é absolutamente convergente.

Continuidade da soma de uma série de funções.

Sabemos do Cálculo que a soma de um número finito de funções contínuas é contínua. Porém, se a soma for infinita ela pode não ser contínua. Vejamos um exemplo.

Exemplo 5.71. *Considere a série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}\right)$. *Essa série não converge para uma função contínua.*

Prova: Escrevemos a soma dos $n - primeiros$ termos

$$S_n(x) = \left(x^{\frac{1}{3}} - x\right) + \left(x^{\frac{1}{5}} - x^{\frac{1}{3}}\right) + \left(x^{\frac{1}{7}} - x^{\frac{1}{5}}\right) + ... + \left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}\right)$$

Eliminando os parênteses vem

$S_n(x) = -x + x^{\frac{1}{2n+1}}$

Agora,

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(-x + x^{\frac{1}{2n+1}}\right) = \begin{cases} 1 - x \ se \ x > 0 \\ 0 \ se \ x \ = 0 \\ -1 - x \ se \ x < 0 \end{cases}$$

Portanto, $\lim_{n\to\infty} S_n(x)$ existe para todo $x \in \mathbb{R}$. Porém, a soma da série não é uma função contínua.

O teorema que segue permite identificar as séries de funções que convergem para funções contínuas.

Teorema 5.72. *Seja* $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ *uma série de funções majorável no intervalo* $[a, b]$, *então a soma* $S_n(x)$ *converge para uma função contínua* $S(x)$ *no intervalo* $[a, b]$.

Exemplo 5.73. *A série de funções* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ *converge para a função* $S(x) = \frac{1}{1-x}$ *no intervalo* $(-1, 1)$.

Integração de uma série de funções contínuas

A integração de uma série de funções também exige cuidados. No Cálculo vimos que a integral da soma finita de funções é igual a soma das integrais. Se a soma de funções for infinita, isso pode não ocorrer. As condições necessárias para integração da soma infinita de funções são dadas pelo teorema abaixo.

Teorema 5.74. *Seja* $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ *uma série de funções contínuas majorável no intervalo* $[a, b]$ *e seja* $S(x)$ *a soma. Então, para* $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ *vale a afirmação*

$\int_\alpha^\beta S(x)\,dx = \int_\alpha^\beta u_1(x)\,dx + \int_\alpha^\beta u_2(x)\,dx + \int_\alpha^\beta u_3(x)\,dx + ...$

Exemplo 5.75. *A série de funções contínuas* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ *é majorável no intervalo* $(-1, 1)$. *Assim, para qualquer* $[\alpha, \beta] \subset (-1, 1)$ *tem-se*

$\int_\alpha^\beta \frac{1}{1-x}dx = \int_\alpha^\beta dx + \int_\alpha^\beta xdx + \int_\alpha^\beta x^2dx + \int_\alpha^\beta x^3dx + ...$

Derivadas de uma série de funções contínuas

No Cálculo vimos que a derivada da soma finita de funções é igual a soma das derivadas. Se a soma de funções for infinita, isso pode não ocorrer. As condições necessárias para derivação da soma infinita de funções são dadas pelo teorema a seguir.

Teorema 5.76. *Seja* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ *uma série de funções contínuas majorável no intervalo* $[a,b]$ *que converge para a função* $S(x)$ *no intervalo* $[a,b]$. *Então* $S'(x) = u_0'(x)+u_1'(x)+u_2'(x)+.....+u_n'(x)...$ *se as seguintes condições estiverem satisfeitas:*
i) As funções $u_0(x)$, $u_1(x)$, $u_2(x)$, $.....$, $u_n(x)$ *tem derivadas contínuas;*
ii) A soma $u_0'(x)+u_1'(x)+u_2'(x)+.....+u_n'(x)...$, *é majorável.*

Exemplo 5.77. *A série de funções contínuas* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$ *é majorável no intervalo* $(-1,1)$. *Assim, para qualquer intervalo* $[\alpha,\beta] \subset (-1,1)$ *:*

i) As funções $u_1(x) = x$, $u_2(x) = \dfrac{x^2}{2}$, $u_3(x) = \dfrac{x^3}{3}.....$, $u_n(x) = \dfrac{x^n}{n}...$ *tem derivadas contínuas;*

ii) A soma $1+x+x^2+x^3+x^4+.......+x^n...$*é majorável no intervalo* $(-1,1)$.

Consequentemente, $S'(x) = 1+x+x^2+x^3+x^4+.......+x^n... = (\ln|1-x|)'$.

A condição de que soma $S'(x) = u_0'(x)+u_1'(x)+u_2'(x)+.....+u_n'(x)...$, seja majorável é extremamente importante. Caso não esteja satisfeita a derivação termo a termo pode se tornar impossível. Vejamos um exemplo.

Exemplo 5.78. *Consideremos a série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{sen(n^4x)}{n^2}$. *Nesse exemplo, a soma infinita das derivadas é diferente da derivada da soma da série.*

Prova: Como $|sen(n^4x)| \leq 1$ para todo n e todo x real, segue que $\left|\dfrac{sen(n^4x)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$. Portanto, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{sen(n^4x)}{n^2}$ é uma série de funções contínuas majorável para todo x real. Agora,

$$S(x) = \frac{senx}{1^2} + \frac{sen(2^4x)}{2^2} + \frac{sen(3^4x)}{3^2} + \frac{sen(4^4x)}{4^2} + ... + \frac{sen(n^4x)}{n^2}...$$

e

$$S'(x) = \frac{\cos x}{1^2} + \frac{2^4\cos(2^4x)}{2^2} + \frac{3^4\cos(3^4x)}{3^2} + \frac{4^4\cos(4^4x)}{4^2} + ... + \frac{n^4\cos(n^4x)}{n^2}...$$

ou

$$S'(x) = 1^2\cos x + 2^2\cos 2^4x + 3^2\cos 3^4x + 4^2\cos 4^4x + ... + n^2\cos(n^4x) + ..$$

Para $x = 0$ temos

$$S'(x) = 1^2\cos 0 + 2^2\cos 0 + 3^2\cos 0 + 4^2\cos 0 + ... + n^2\cos 0 + ...$$

ou

$$S'(x) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + n^2 + ...$$

que é uma seqüência de somas divergente.

5.12. SÉRIE DE POTÊNCIAS

As séries de potências são séries de funções que aparecem com mais freqûencia nos problemas de engenharia. Por isso deve-se dar atenção especial ao seu estudo.

Definição 5.79. *Denominamos série de potências a toda série escrita na forma* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, *com coeficientes constantes* c_n.

Observação 17. *Para que os resultados anteriores possam ser usados sem mudanças nas notações vamos admitir* $u_n = c_n x^n$ *para o caso das séries de potências.*

Teorema 5.80. *Se uma série de potências,* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, *converge para um valor* x_0 *não nulo, então converge para todo* $|x| < |x_0|$.

Definição 5.81. *Seja uma série de potências,* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, *que converge para um valor* x_0 *não nulo. Denominamos intervalo de convergência da série ao conjunto de todos os pontos para os quais a série converge e raio de convergência* R, *à distância entre o centro e a extremidade do intervalo de convergência.*

Processo para determinar o intervalo e o raio de convergência de uma série de potências

Usam-se os critérios de convergência de D 'Alambert ou de Cauchy tomando $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ ou $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\left(\sqrt{u_n}\right)^n\right|$ em que $u_n = c_n x^n$. Caso o limite exista valem as condições dos critérios usados.

Em qualquer caso teremos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |x|\,L$$

em que

$$L = \lim_{n\to\infty} c_n$$

e, desse modo, o raio e o intervalo de convergência serão dados resolvendo a inequação

$$|x|\,L < 1$$

i. $|x|\,L < 1$ donde vem $|x| < \frac{1}{L}$ ou seja $R = \frac{1}{L}$.

ii. Como pelo critério de D 'Alambert nada podemos afirmar se $|x|\,L = 1$, devemos verificar se a série converge para $x = \frac{1}{L}$ e $x = -\frac{1}{L}$.

iii. Feita a verificação pode-se estabelecer o intervalo de convergência.

Exemplo 5.82. *Determinar o intervalo e o raio de convergência para a série* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^n x^n}{5^n\left(1+n^2\right)}$.

Solução: Vamos aplicar o critério de D 'Alambert. Assim devemos primeiro encontrar $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{3^{n+1}x^{n+1}}{5^{n+1}\left(1+(n+1)^2\right)}}{\dfrac{3^n x^n}{5^n\left(1+n^2\right)}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{5^n 3^n 3 x^n x\left(1+n^2\right)}{5^n 5\left(n^2+2n+2\right)3x^n}\right|$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3x\left(1+n^2\right)}{5\left(n^2+2n+2\right)}\right| = \lim_{n\to\infty}|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3\left(1+n^2\right)}{5\left(n^2+2n+2\right)}\right| = |x|\,\frac{3}{5}.$$

A série converge se $|x|\,\frac{3}{5} < 1$ ou $|x| < \frac{5}{3}$. Portanto, o raio de convergência é $R = \frac{5}{3}$

Na sequência devemos verificar se a série converge para $x = -\frac{5}{3}$ e $x = \frac{5}{3}$.

- Se $x = -\frac{5}{3}$ teremos a série

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n\left(-\frac{5}{3}\right)^n}{5^n\left(1+n^2\right)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n 5^n}{5^n\left(1+n^2\right)3^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\left(1+n^2\right)}.$$

Pelo critério de Leibnitz a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(1+n^2)}$$

é convergente.

Logo, a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^n x^n}{5^n (1+n^2)}$ converge se $x = -\frac{5}{3}$.

- Se $x = \frac{5}{3}$ teremos a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n \left(\frac{5}{3}\right)^n}{5^n (1+n^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n 5^n}{5^n (1+n^2) 3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+n^2)}$$

.

Usando o critério de comparação concluímos que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+n^2)}$$

é convergente.

Logo, a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^n x^n}{5^n (1+n^2)}$ converge se $x = \frac{5}{3}$.

Conclusão: O raio de convergência da série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^n x^n}{5^n (1+n^2)}$ é $R = \frac{5}{3}$ e intervalo é $-\frac{5}{3} \leq x \leq \frac{5}{3}$.

Série de potências em termos de $(x-a)$

Definição 5.83. *Denominamos série de potências de* $(x-a)$ *a série* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n (x-a)^n$.

Para obter o raio e o intervalo de convergência das séries em $(x-a)$ basta fazer $z = (x-a)$ e encontrar o intervalo de convergência para a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n z^n$. Após substitui z por $(x-a)$ na inequação $-R < z < R$.

Exemplo 5.84. *Determinar o raio e o intervalo de convergência da série* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2(x-5)^n}{n^2+3}$.

Solução: Seja $z = (x-5)$. Então podemos escrever

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(x-5)^n}{n^2+3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2z^n}{n^2+3}$$

Usando o teorema de D'Alambert vem

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{2z^{n+1}}{(n+1)^2+3}}{\dfrac{2z^n}{n^2+3}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n^2+3)\,2z^{n+1}}{\left((n+1)^2+3\right)2z^n}\right|$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n^2+3)\,2z^n z}{2z^n\,(n^2+2n+4)}\right| = \lim_{n\to\infty}|z|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2+3}{n^2+2n+4}\right| = |z|\,.$$

A série converge se $|x|<1$. Portanto, o raio de convergência é $R=1$

Na sequência devemos verificar se a série converge para $x=-1$ e $x=1$.

- Se $z=-1$ teremos a série

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2z^n}{n^2+3} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\,(-1)^n}{n^2+3} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{2}{(n^2+3)}$$

.

Pelo critério de Leibnitz a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\dfrac{2}{(n^2+3)}$ é convergente. Logo, a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2z^n}{n^2+3}$ converge se $z=-1$.

- Se $x=1$ teremos a série

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2z^n}{n^2+3} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(1)^n}{n^2+3} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(n^2+3)}$$

.

Usando o critério de comparação concluímos que a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2}{(n^2+3)}$ é convergente. Logo, a série

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2z^n}{n^2+3}$$

converge se $z=1$.

Conclusão: O raio de convergência da série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2z^n}{n^2+3}$ é $R=1$ e intervalo é $-1\le z\le 1$.

Substituindo z por $(x-5)$ em $-1\le z\le 1$ obtemos

$$-1\le x-5\le 1$$

donde vem

$$4\le x\le 6$$

que é o intervalo de convergência da série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2\,(x-5)^n}{n^2+3}$.

5.13. Séries de Taylor

Considere a função $f(x)$. Pretende-se encontrar uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} u_n (x-a)^n$ tal que

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n (x-a)^n$. Em outras palavras queremos

$$f(x) = u_0 + u_1 (x-a) + u_2 (x-a)^2 + u_3 (x-a)^3 + u_4 (x-a)^4 + ... \tag{Taylor}$$

Assim, precisamos determinar os coeficientes u_0, u_1, u_2, ...

- Primeiro determinamos u_0 tomando $x = a$ na função Taylor. Obtemos

$$f(a) = u_0 + u_1 (a-a) + u_2 (a-a)^2 + u_3 (a-a)^3 + u_4 (a-a)^4 + .$$

donde vem

$$f(a) = u_0$$

.

- Determinamos a derivada da função Taylor e, na sequência $f'(a)$ para obter u_1. Temos

$$f'(x) = u_1 + 2u_2 (x-a) + 3u_3 (x-a)^2 + 4u_4 (x-a)^3 + ...$$

$$f'(a) = u_1 + 2u_2 (a-a) + 3u_3 (a-a)^2 + 4u_4 (a-a)^3 + ...$$

donde vem

$$f'(a) = u_1.$$

- Determinamos a terceira derivada da função Taylor e, na seqüência $f"(a)$ para obter u_2. Temos

$$f"(x) = 2u_2 + 3 \cdot 2u_3 (x-a) + 4 \cdot 3u_4 (x-a)^2 + 5 \cdot 4u_5 (x-a)^3 ....$$
$$f"(a) = 2u_2 + 3 \cdot 2u_3 (a-a) + 4 \cdot 3u_4 (a-a)^2 + 5 \cdot 4u_5 (a-a)^3 ....$$

donde vem

$$f"(a) = 2u_2 o \text{ ou } u_2 = \frac{f"(a)}{2!}$$

.

- Determinamos a segunda derivada da função Taylor e, na seqüência $f^3(a)$ para obter u_3. Temos

$$f^3(x) = 3 \cdot 2u_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2u_4 (x-a) + 5 \cdot 4 \cdot 3u_5 (x-a)^2 ......$$
$$f^3(a) = 3 \cdot 2u_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2u_4 (a-a) + 5 \cdot 4 \cdot 3u_5 (a-a)^2 ....$$

donde vem

$$f^3(a) = 3 \cdot 2u_3 \text{ ou } u_3 = \frac{f^3(a)}{3!}.$$

- Prosseguindo dessa forma encontraremos $u_n = \frac{f^n(a)}{n!}$ de modo que podemos escrever a série de Taylor como segue

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^3(a)}{3!}(x-a)^3 + ... + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + ...$$

ou

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Exemplo 5.85. *Desenvolver em série de Taylor a função $f(x) = senx$.*

Solução: Primeiro vamos determinar as derivadas de todas as ordens de $f(x) = senx$ no ponto a. Temos

$$f(a) = sena \qquad f'(a) = \cos a \qquad f''(a) = -sena$$

$$f^3(a) = -\cos a \qquad f^4(a) = sena \qquad f^5(a) = \cos a$$

Substituimos na fórmula

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^3(a)}{3!}(x-a)^3 + ... + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n ....$$

$$senx = sena + \cos a (x-a) - \frac{sena}{2!}(x-a)^2 - \frac{\cos a}{3!}(x-a)^3 + \frac{sena}{4!}(x-a)^4 ....$$

Esta série pode ser reescrita separando os termos em seno do termos em coseno

$$senx = \left(sena - \frac{sena}{2!}(x-a)^2 + \frac{sena}{4!}(x-a)^4 ....\right) + \left(\cos a (x-a) - \frac{\cos a}{3!}(x-a)^3 + ...\right)$$

escrevendo em forma de somatório vem

$$senx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{sena}{2n!}(x-a)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos a}{(2n+1)!}(x-a)^{2n+1}$$

5.14. Série de Maclaurin

Colin Maclaurin (1698 - 1746) foi um matematico escocês. Para obter o desenvolvimento de uma função em série de Maclaurin basta tomar $a = 0$ na série de Taylor. Desse modo temos

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \tfrac{f"(0)}{2!}x^2 + \tfrac{f^3(0)}{3!}x^3.... + \tfrac{f^n(0)}{n!}x^n....$$

Exemplo 5.86. *Desenvolver em série de Maclaurin a função $f(x) = senx$.*

Solução: No exemplo 5.85 desenvolvemos $f(x) = senx$ em série de Taylor. Fazendo $a = 0$ vem

$$senx = \left(sen0 - \frac{sen0}{2!}(x-0)^2 + \frac{sen0}{4!}(x-0)^4 .... \right) + \left(\cos 0\,(x-0) - \frac{\cos 0}{3!}(x-0)^3 + ... \right)$$

$$senx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}....$$

.

$$senx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Uma aplicação dessa série pode ser feita para determinar, por exemplo, o valor do $sen\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$$sen\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} - \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^5}{5!} - \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^7}{7!} + \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^9}{9!}..... = \frac{1}{2}.$$

Exemplo 5.87. *Desenvolver em série de funções $\int \frac{senx}{x}dx$.*

Solução: Usaremos os resultado do exemplo 5.86. Vimos no teorema 5.74 que uma série de funções contínuas majorável, a integral da soma é igual a soma das integrais. A série $senx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}.....$, é majorável para todo x.

- Primeiro dividimos cada termo do exemplo 5.86 por x $\dfrac{senx}{x} = 1 - \dfrac{x^2}{3!} + \dfrac{x^4}{5!} - \dfrac{x^6}{7!} + \dfrac{x^8}{9!}.....$

- Integramos a série termo a termo

$$\int \frac{senx}{x}dx = \int dx - \int \frac{x^2}{3!}dx + \int \frac{x^4}{5!}dx - \int \frac{x^6}{7!}dx + \int \frac{x^8}{9!}dx.....$$

donde vem

$$\int \frac{senx}{x}dx = x - \frac{x^3}{3!3} + \frac{x^5}{5!5} - 5\frac{x^7}{7!7} + \frac{x^9}{9!9}..... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!\,(2n+1)}.$$

que é o resultado final.

Exemplo 5.88. *Use séries para provar que o limite de* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \frac{-1}{6}$

Resolução
$g(a) = \sin(a)$
$g^1(a) = \cos(a)$
$g^2(a) = -\sin(a)$
$g^3(a) = -\cos(a)$
$g^4(a) = \sin(a)$
em Maclaurin temos:
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

$\frac{\sin x - x}{x^3} = \frac{\sin x}{x^3} - \frac{1}{x^3}$
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \frac{x^4}{7!} + \frac{x^6}{9!} + ... = -\frac{1}{6}$

Exemplo 5.89. *Desenvolver em série de Mclaurin a função* $f(x) = \frac{sen2x}{x}$

Anteriormente, vimos que por série de Maclaurin,

$$
\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\
\sin 2x &= 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \frac{(2x)^7}{7!} + \frac{(2x)^9}{9!} + ... + (-1)^n \frac{(2x)^{2n+1}}{2n+1} \\
\sin 2x &= 2x - \frac{2^3x^3}{3!} + \frac{2^5x^5}{5!} - \frac{2^7x^7}{7!} + \frac{2^9x^9}{9!} + ... + (-1)^n \frac{2^{2n+1}x^{2n+1}}{2n+1} \\
\sin 2x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}(x)^{2n+1}}{(2n+1)!}
\end{aligned}
$$

portanto para

$$f(x) = \frac{sen2x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}(x)^{2n+1}}{(2n+1)!x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}(x)^{2n}}{(2n+1)!}$$

5.15. Fórmula geral do binômio de Newton

Suponhamos que o interesse é o desenvolvimento do binômio $(a+b)^n$ para n inteiro positivo. Do desenvolvimento geral do binômino de Newton vem:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + ... + C_n^k a^{n-k} b^k + ... + C_n^n b^n.$$

Como $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2).....(n-(k-1))(n-k)!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2).....(n-(k-1))}{k!}$ podemos escrever

$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + ... + \frac{n(n-1)(n-2).....(n-(k-1))}{k!} a^{n-k} b^k +$ $..... + b^n.$

Tomando $a = 1$ e $b = x$ vem

$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + ... + \frac{n(n-1)(n-2).....(n-(k-1))}{k!} x^k + ... + x^n.$

Porém, se n não for um inteiro positivo ou zero, é conveniente desenvolver o binômio $(1+x)^n$ em série de Maclaurin. Desse modo teremos

$$
\begin{aligned}
(1+x)^n &= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + ... + && (5.1) \\
&+ \frac{n(n-1)(n-2).....(n-k+1)}{k!} x^k + ... && (5.2)
\end{aligned}
$$

Esta série é chamada série binomial e como o leitor poderá verificar através do critério de D 'Alambert é absolutamente convergente para todo x tal que $|x| < 1$. Pode ser provado

que esse desenvolvimento é verdadeiro para todo n. A prova pode ser encontrada nos livros citados na bibliografia. Escrevendo em forma de somatório vem para todo n.

$$(1+x)^n = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2).....(n-k+1)}{k!} x^k \text{ se } |x| < 1.$$

Exemplo 5.90. *Desenvolver em série de funções a função* $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

Solução: Temos

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$

Portanto, basta substituir $n = -1$ na fórmula**??**. Assim,

$$\frac{1}{1+x} = 1 + (-1)x + \frac{-1(-1-1)}{2!}x^2 + \frac{-1(-1-1)(-1-2)}{3!}x^3 + ..$$

$$+\frac{-1(-1-1)(-1-2).....(-1-k+1)}{k!}x^k + ...$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{-6}{3!}x^3 + ... + \frac{-1(-1-1)(-1-2).....(-1-k+1)}{k!}x^k + ...$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4.......... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

Exemplo 5.91. *Expresse como uma série de potência em* x *a função* $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$

Vamos analisar inicialmente a função $\ln(x+1)$. A derivada de $\ln(x+1)$ é $\frac{1}{x+1}$

$$\frac{1}{1+x} = 1 + (-1)x + \frac{-1(-1-1)}{2!}x^2 + \frac{-1(-1-1)(-1-2)}{3!}x^3 + .$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{-6}{3!}x^3 + ... + \frac{-1(-1-1)(-1-2).....(-1-k+1)}{k!}x^k +$$

....

$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4.......... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$, portanto se queremos $\ln(x+1)$ devemos integrar os membros da equação:

$$\int \frac{1}{1+x}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n x^n dx$$
$$\int \frac{1}{1+x}dx = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Como queremos $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$, temos:

$$\frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}}{x} = (-1)^n \frac{x^n}{n+1}$$

Exemplo 5.92. *Desenvolver em série de funções a função* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

Solução: Temos

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

Portanto, basta substituir $n = -\frac{1}{2}$ na fórmula**??**. Assim,

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)x + \frac{-\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}-1\right)}{2!}x^2 + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3 + ...+$$

$$+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right).....(-\frac{1}{2}-k+1)}{k!}x^k + ...$$

donde vem

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}x^2 + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}x^3 + ...+$$

$$+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right).....(\frac{1-2k}{2})}{k!}x^k + ...$$

resultando em

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2^2 2!}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3 3!}x^3 + ... + (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ......\cdot(2n-1)}{2^n n!}x^n....$$

Exemplo 5.93. *Desenvolver em série de funções a função* $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Solução: Podemos aproveitar o resultado do exemplo 5.92. Basta substituir x no exemplo 5.92 por $(-x^2)$. Teremos então

$$\frac{1}{\sqrt{1+(-x^2)}} = 1 - \frac{1}{2}\left(-x^2\right) + \frac{1\cdot 3}{2^2 2!}\left(-x^2\right)^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3 3!}\left(-x^2\right)^3 + ...+$$

$$+\left(-1\right)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdot(2n-1)}{2^n n!}\left(-x^2\right)^n ...$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2^2 2!}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3 3!}x^6 + ... + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)}{2^n n!}x^{2n}...$$

Exemplo 5.94. *Desenvolver em séries de funções a função $f(x) = arcsenx$.*

Solução: Vimos no teorema 5.74 que uma série de funções contínuas majorável, a integral da soma é igual a soma das integrais. Sendo a derivada da função $f(x) = arcsenx$ igual a $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ podemos aproveitar o resultado do exemplo 5.93, isto é

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int dx + \frac{1}{2}\int x^2 dx + \frac{1\cdot 3}{2^2 2!}\int x^4 dx + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3 3!}\int x^6 + ...+$$

$$+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)}{2^n n!}\int x^{2n}dx...$$

resultando em

$$arcsenx = x + \frac{1}{2\circ 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2^2 2!5}x^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3 3!7}x^7 + ... + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)}{2^n n!\,(2n+1)}x^{2n+1}...$$

ou

$$arcsenx = x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)}{2^n n!\,(2n+1)}x^{2n+1}.$$

5.16. Exercícios Gerais

1. Usando séries, determine o valor de

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x + 2x^2 - 1}{x^4}$$

2. Usando Maclaurin determine o valor de $\int x^2 \ln(x+1)dx$

3. Encontre o termo geral da soma da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{4n^2-1}$ e verifique se ela é convergente.

4. Encontre a soma da série
$a)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{5})^n$ $\quad b)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5}{(5n+2)(5n+7)}$ $\quad c)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

5. Encontre o raio e o domínio de convergência da série: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(x-2)^n}{(5)^n(1+n^2)}$

6. Determine o intervalo de convergência que representa a série $f(x) = \frac{4}{x^2}$

7. Usando séries de Maclaurin, prove que a $\int coxdx = \sin x + k$

8. Use o teste de comparação para decidir se as séries abaixo são convergentes
$a)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n3^n}$ $\quad b)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$ $\quad c)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2+\cos n}{n^2}$ $\quad d)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+4}$
$e)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^n}{1+3^n}$ $\quad f)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+\ln n}{n^3+1}$ $\quad \sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n^p}{(n-1)n(n+1)}$

9. Use o teste da integral para decidir se as séries são convergentes
$a)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+7}$ $\quad b)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n^2+1}}$ $\quad c)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{arctgn}{n^2+1}$

10. Use o teste de D 'alambert para decidir se as séries são convergentes
$a)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{2^n}$ $\quad b)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2+2}$ $\quad c)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+2)^3}$ $\quad d)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{5^n(n+1)}$

11. Determine se a série é absolutamente ou condicionalmente convergente
$a)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ $\quad b)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(n^n+3)2^n}{(2n-5)^n}$ $\quad c)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^4}{e^n}$
$d)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}$ $\quad e)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^3+3}$

12. Encontre o raio e o domínio de convergência das séries
$a)\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n(x-5)^n}{n^2+1}$ $\quad b)\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n^n+3)(x+2)^n}{(2n-5)^n}$ $\quad c)\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^4(x-1)^n}{e^n}$
$d)\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(x+1)^n}{n^2+1}$ $\quad e)\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n(x-1)^{2n}}{n^3+3}$ $\quad e)\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1.3.5.7...(2n-1)x^n}{3.6.9.....3n}$

13. Desenvolver em série de Taylor e Mclaurin as funções

$a) f(x) = sen2x \quad b) f(x) = x^2 sen2x \quad c) f(x) = e^{3x} \quad d) f(x) = e^{-x^2}$

$e) f(x) = \cos 2x \quad g) f(x) = \frac{senx}{x} \quad h) f(x) = \frac{\cos x}{x^2}$

14. Desenvolver em série de Mclaurin as funções

$a) f(x) = \frac{1}{1+x} \quad b) f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \quad c) f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad d) f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$e) f(x) = \int \frac{senx}{x} dx \quad g) f(x) = \int e^{-x^2} \quad h) f(x) = \int \frac{\ln(1+x)}{x} \quad i) f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$

$j) f(x) = arcsenx \quad l) f(x) = \arccos x \quad n) f(x) = arctagx \quad o) f(x) = \sqrt[3]{1+x}$