10ª. LISTA – FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS (parte 2) CÁLCUL O II

1. A equação $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ é denominada de equação de Laplace (1749 – 1827). Ela representa uma grande ferramenta na área de engenharia para condução de calor, mecânica de fluidos e potencial elétrico.
Sendo assim, mostre que as funções abaixo são soluções para a equação de Laplace.
a) $u(x,y) = e^x\, sen(y)$ b) $u(x,y) = x^3 + 3xy^2$

2. Outra equação de grande aplicabilidade é a equação de onda: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, neste caso usada para oscilação de corda vibrante.
Verifique se as funções são soluções para a equação acima.
a) $u(x,t) = sen(x - at)$ b) $u(x,t) = sen(kx).sen(akt)$

Diferencial total de $f(x_1, x_2, x_3, \ldots)$: $df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$

3. Determine a diferencial total de:
a) $f(x,y) = x^2 + xy^2 + sen(y)$ (Piskunov) b) $z = xy + \ln(xy)$

4. Dada a função $z = x^2 - 2xy + 3y^2$, use o conceito da diferencial total para aproximar linearmente Δz no ponto $P(3,1)$ considerando as variações em x e y como: $\Delta x = 0{,}04$ e $\Delta y = -0{,}02$.

Regra da cadeia para $u = f(x_1(t), x_2(t), x_3(t), \ldots)$: $\frac{du}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}$

5. Use a regra da cadeia para determinação de $\frac{dz}{dt}$ (Anton v.2) :

a. $z = x^2 + y^2$; $x = 1 - 5t$ e $y = t^2 - 1$

b. $z = 3x^2y^3$; $x = t^4$, $y = t^2$

c. $z = \ln(2x^2 + y^3)$; $x = \sqrt{t}$, $y = \sqrt[3]{t^2}$

d. $z = 3\cos x - sen\, xy$; $x = \frac{1}{t}$, $y = 3t$

e. $z = 3e^{xy}$; $x = \sqrt[3]{t}$, $y = t^3$

6. Use a regra da cadeia para determinação de $\frac{\partial \phi}{\partial u}$ e $\frac{\partial \phi}{\partial v}$ (Anton v.2) :

a. $\phi = 8x^2y - 2x + 3y$; $x = uv$, $y = u - v$

b. $\phi = \frac{x}{y}$; $x = 2\cos u$, $y = 3\,sen\, v$

c. $\phi = e^{x^2y}$; $x = \sqrt{uv}$, $y = \frac{1}{v}$

d. $\phi = \cos x\; sen\, y$; $x = u$, $y = u^2 + v^2$

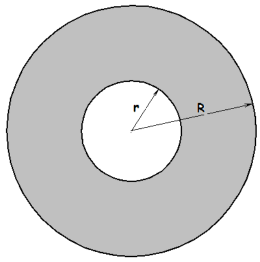
e. $\phi = 3x - 2y$; $x = u + v\ln u$, $y = u^2 - v\ln v$

7. Considere uma propriedade física, atuando numa partícula, variando no espaço segundo a função: $\phi = x^2 + y^2 + 2xyz$. Determine a sua variação no tempo ($\frac{d\phi}{dt}$) no ponto (1, 2, 3) em m, sabendo que a velocidade da partícula é dada pelas componentes $vx = 2m/s$, $vy = -1m/s$, $vz = 1/2\,m/s$.

Dica: $v_x = \frac{dx}{dt}$

8. Considere um gás submetido a condição $\frac{P.V}{T} = 5$ (P=pressão ; V=volume ; T= temperatura). Determine a taxa de variação da temperatura ($\frac{dT}{dt}$) para $P = 5000\,Pa \;\; e \;\; V = 0,4\,m^3$, se o volume cresce a uma taxa de 0,01 m^3/s e sua pressão cai 80 Pa/s.

9. Com base na região indicada determine a taxa de variação da área em relação ao tempo, no exato instante em que os raios assumem os valores $r = 2\,m \;\; e \;\; R = 5\,m$, sabendo que os raios interno e externo crescem a taxas de 0,03m/min e 0,02 m/min respectivamente.



Máximos e Mínimos :

10. Determine, para as funções, os pontos críticos e classifique-os (máximo local , mínimo local e sela):

a) $f(x,y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$

b) $f(x,y) = x^3y + 12x^2 - 8y$

c) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$

d) $f(x,y) = e^{4y - x^2 - y^2}$

e) $f(x,y) = x^3 - 3xy - y^3$ (Anton)

f) $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x^2y$ (Anton)

11. Determine as dimensões mais econômicas para uma caixa retangular sem tampa de volume 0,6 m^3, sabendo que o fundo em madeira apresenta custo de R$ 70,00/m^2, duas laterais opostas de tela tem o custo de R$ 80,00/m^2 e as outras duas laterais em chapa com custo de R$ 100,00/m^2.

12. Considere a função $\Omega = 2x^4 - x^2 + yz$, determine os extremos locais de Ω sobre o plano $z = y - 2$.

13. Ache os extremos relativos para $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$ condicionado a $x - y = 3$

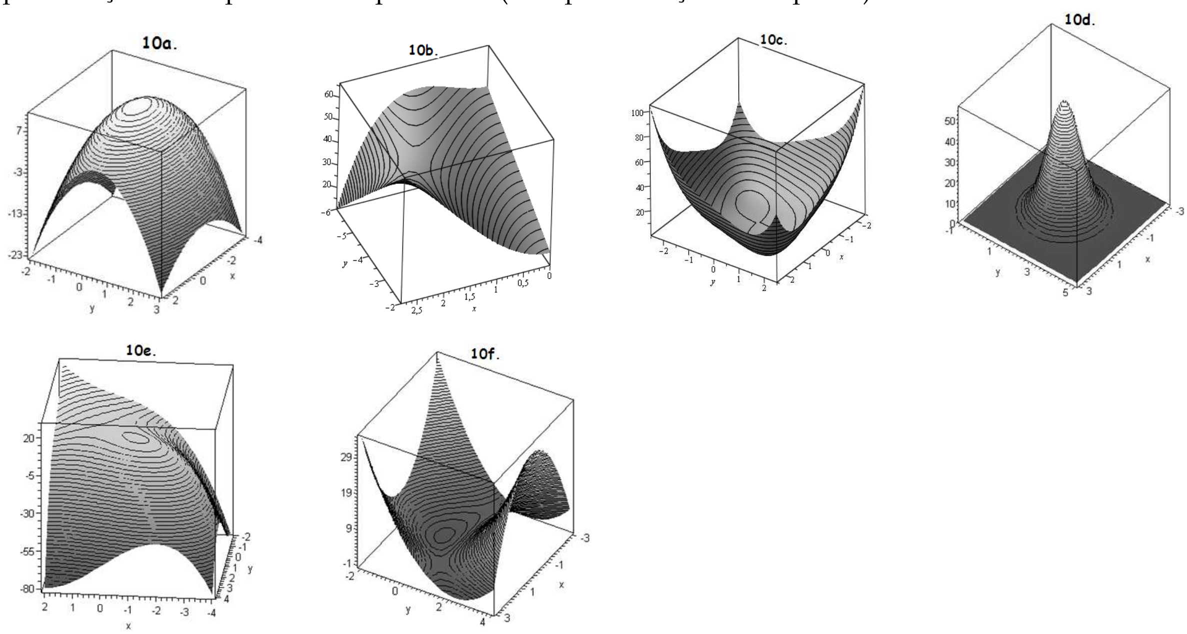
14. Ache os extremos relativos para $f(x,y,z) = \frac{1}{x} - \frac{64}{y} + z^2$ condicionado a $z - \sqrt{xy} = 0$

15. $T(x,y) = 2x^2 + y^2 - y + 25$ (^oC) representa o campo de temperaturas num disco circular limitado por $x^2 + y^2 = 1$ (raio de 1m). Encontre os pontos mais quentes e mais frios do disco.

Respostas:

1a. Sim	1b. Não	2a. Sim
2b. Sim	3a. $(2x+y^2)dx+(2xy+\cos y)dy$	3b. $(y+1/x)dx+(x+1/y)dy$
4. $0,16$	5a. $4t^3+46t-10$	5b. $42t^{13}$
5c. $\frac{2+2t}{t(2+t)}$	5d. $\frac{3}{t^2}sen(\frac{1}{t})$	5e. $10t^{\frac{7}{3}}e^{t^{\frac{10}{3}}}$
6a. $24u^2v^2-16uv^3-2v+3$, $16u^3v-24u^2v^2-2u-3$	6b. $-\frac{2\,sen\,u}{3\,sen\,v}$, $-\frac{2\cos u\cos v}{3\,sen^2 v}$	6c. e^u , 0
6d. $-sen\,u\;sen(u^2+v^2)+2u\cos u\cos(u^2+v^2)$, $2v\cos u\cos(u^2+v^2)$	6e. $\frac{3u+3v-4u^2}{u}$, $3\ln u+2\ln v+2$	7. 20
8. $3,6^oC/s$	9. $0,08\pi m^2/s$	10a. $(-1,\frac{1}{2})_{máx.}$
10b. $(2,-4)_{sela}$	10c. $(0,0)_{sela}$, $(1,1)_{mín.}$, $(-1,-1)_{mín.}$	10d. $(0,2)_{máx.}$
10e. $(0,0)_{sela}$, $(-1,1)_{máx.}$	10f. $(0,0)_{mín.}$, $(2,1)_{sela}$, $(-2,1)_{sela}$	11. $1,29m$; $1,03m$; $0,45m$
12. $(-\frac{1}{2},1,-1)_{min}$; $(0,1,-1)_{sela}$; $(\frac{1}{2},1,-1)_{min}$	13. $(\frac{3}{2},-\frac{3}{2})_{min}$	14. $(-\frac{1}{4},16)_{min}$
15. $(0,1/2)_{min}$; $(\pm\sqrt{3}/2,-1/2)_{máx}$		

Representação das superfícies da questão 10 (complementação da resposta)



Complemento para resposta : questão 15.