

	() Prova	() Prova Semestral	Nota:
	(X) Exercícios	() Segunda Chamada	
	() Prova Modular	() Prova de Recuperação	
	() Prática de Laboratório		
	() Exame Final/Exame de Certificação		
	() Aproveitamento Extraordinário de Estudos		
	Disciplina: <i>Cálculo III</i>		
Professor: <i>Bárbara, Dani, Milton e Rebello</i>		Data: <i>2014-1</i>	
Aluno (a):			

Lista 5: Operadores Diferenciais

1. Determine o gradiente do campo escalar:

a) $f(x, y, z) = xy + xz + yz$ b) $f(x, y, z) = \sqrt{xyz}$ c) $f(x, y, z) = z - \sqrt{x^2 + y^2}$

2. Determine o divergente do campo vetorial:

a) $\vec{f}(x, y) = 2x^4 \vec{i} + e^{xy} \vec{j}$ b) $\vec{f}(x, y, z) = [2x^2 y^2; 3xyz; y^2 z]$

3. Determine o rotacional do campo vetorial:

a) $\vec{f}(x, y, z) = \sin(xy) \vec{i} + \cos(xy) \vec{j} + z \vec{k}$ b) $\vec{f}(x, y, z) = [2x^2 y; 3xz; -y]$

4. Sejam $\vec{f}(x, y, z) = [xz; yz; xy]$, $\vec{g}(x, y, z) = [x^2; y^2; z^2]$ e $h(x, y, z) = xy/z$. Determine:

a) $\nabla \cdot \vec{g} - \nabla \cdot \vec{f}$ b) $\nabla(\nabla \cdot \vec{g}) + \nabla \times \vec{f}$ c) $(\nabla \times \vec{f}) \cdot (\nabla \times \vec{g})$ e) $\nabla \cdot \nabla h$ (Laplaceano)

5. Calcule $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F})$ (contrib. Prof. Péricles)

a) $\vec{F}(x, y, z) = \sin x \vec{i} + \cos(x - y) \vec{j} + z \vec{k}$ b) $\vec{F}(x, y, z) = e^{xz} \vec{i} + 3xe^y \vec{j} - e^{yz} \vec{k}$

6. Calcule $\nabla \times (\nabla \times \vec{G})$ (contrib. Prof. Péricles)

a) $\vec{G}(x, y, z) = xy \vec{j} + xyz \vec{k}$ b) $\vec{G}(x, y, z) = xy^2 \vec{i} - 3yz \vec{j} + xy \vec{k}$

7. Calcular a derivada direcional da função $f(x, y) = e^{x+y}$ na direção $\vec{v} = [1, 1]$, no ponto $P(0, 1)$.

8. Determine a derivada direcional de $f(x, y)$ no ponto P e direção indicada pelo ângulo:

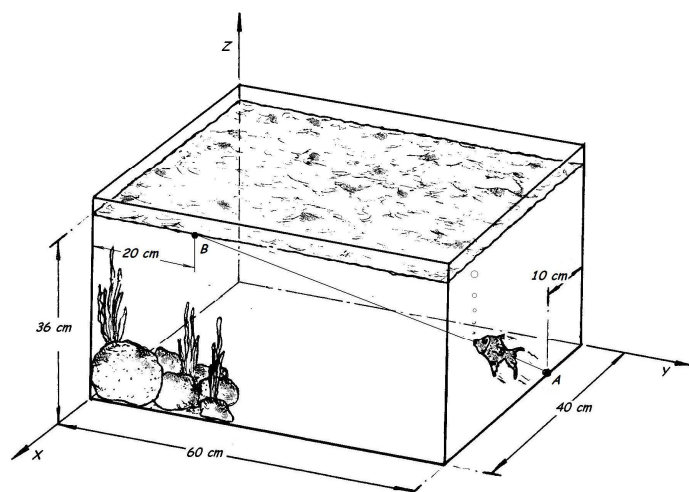
a) $f(x, y) = x^2 y^3 - y^4$, $P(2, 1)$ e $\theta = \pi/3$ b) $f(x, y) = \sqrt{5x} \cdot y$, $P(1, 4)$ e $\theta = -\pi/6$

9. A temperatura dentro de um aquário é dada pela função $T(x, y, z)$. Considere a trajetória, em linha reta, de um peixe que sai do ponto **A** e se dirige para o ponto **B**.

$$T(x, y, z) = -0,0008(x - 30)^2 - 0,002(y - 10)^2 + \frac{z}{10} + 20 \quad (^{\circ}\text{C})$$

Determine para o ponto médio da trajetória:

- Valor da temperatura local;
- O gradiente térmico local;
- Taxa de variação térmica, em relação ao espaço, sofrida pelo peixe neste mesmo local. Está se aquecendo ou resfriando?



10. Considere a trajetória $\vec{r} = [4\cos(\frac{\pi}{2}t), 5\sin(\frac{\pi}{2}t), 4\sqrt{t}]$ e o campo definido por

$\phi(x, y, z) = 4x^2 + 2y^2 - \frac{8}{z} + 5$. Determine a taxa de variação (derivada direcional), enfrentada por partícula que segue a trajetória $\vec{r}(t)$ no exato instante $t = 1$.

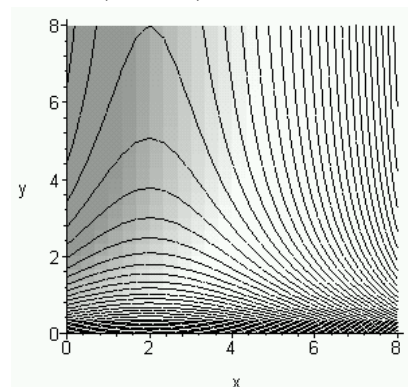
11. Determine as equações do plano tangente e da reta normal à superfície dada por:

a) $xyz = 6$ no ponto $P(1, 2, 3)$ b) $x^2 - 2y^2 + z^2 + yz = 2$ no ponto $P(2, 1, -1)$

12. O campo de temperatura de uma superfície é representado

por $T = 250 + \frac{500}{(y+2)^2} - 3(x-2)^2$, veja as isotermas.

Determine a trajetória de uma partícula sobre o plano, sabendo que seu deslocamento é provocado pelo gradiente térmico, isto é, de maneira que procure sempre a condição de maior aquecimento. Seu ponto de partida: $(8, 6)$. Faça a representação da trajetória.



13. Considere a possibilidade de você estar escalando um morro cujo formato é dado por:

$$h = 200 + 300e^{-0,0001x^2} - 0,004y^2 - 0,5y$$

Onde o eixo x está orientado para o Leste e o eixo y para o Norte.

Se sua posição é $x = 100m$, $y = 40m$ e $h \cong 284m$.

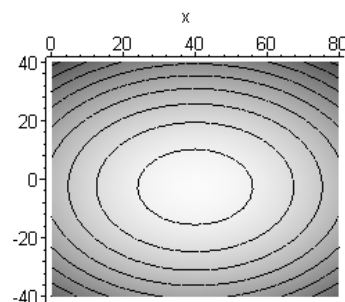
- Ao caminhar para o Oeste, você subirá ou descera? Qual taxa?
- Ao caminhar para o Sul, você subirá ou descera? Qual taxa?
- Ao caminhar para o Nordeste, você subirá ou descera? Qual taxa?
- Em que direção terá a máxima inclinação? Qual a taxa de elevação? Qual o ângulo de elevação de "h"?

14. A temperatura da camada superior da água de um tanque para criação de peixes pode ser aproximada pela função

$$T = -\frac{(x-40)^2}{250} - \frac{y^2}{160} - \frac{y}{30} + 45.$$

Qual a trajetória de um peixe que

parte da posição $(80, 40)$ e segue sempre o caminho de maior aquecimento?



15. Se o potencial elétrico em um ponto (x, y) do plano é $V(x, y)$, então o vetor de intensidade elétrica, neste mesmo ponto, é $\vec{E} = -\nabla V(x, y)$. Supondo $V(x, y) = e^{-2x} \cos 2y$. (contrib. Prof. Péricles)

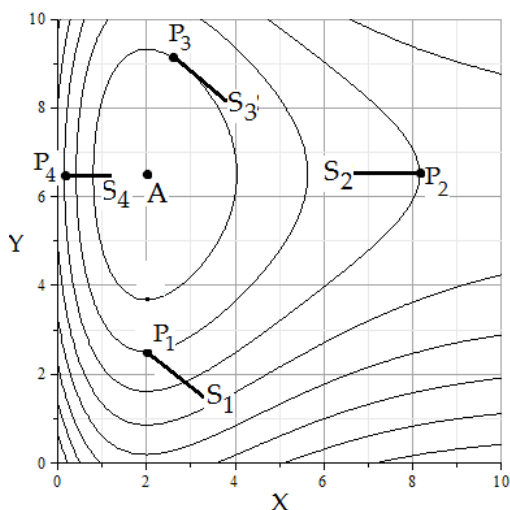
- Determine o vetor de intensidade elétrica em $(\frac{\pi}{4}, 0)$.
- Mostre que, em cada ponto no plano, o potencial elétrico decresce mais rapidamente na direção e sentido do vetor $\vec{E}$.

16. Os operadores diferenciais são ferramentas fundamentais dentro da área de fenômeno de transportes (transferência de calor e massa). Considere as funções vetoriais $\vec{V}(x,y,z)$, $\vec{W}(x,y,z)$ e as funções escalares $G(x,y,z)$, $H(x,y,z)$. Observe as operações apresentadas e indique qual delas é inválida.

Dica: $\text{grad}(F) = \nabla F$ $\text{div}(\vec{M}) = \nabla \cdot \vec{M}$ $\text{rot}(\vec{M}) = \nabla \times \vec{M}$

- a) $\text{grad}(\vec{V} \cdot \vec{W} + \text{div}(\vec{V} \times \vec{W}))$
- b) $\text{grad}(H + G) - \text{rot}(\vec{W} \times \vec{V})$
- c) $\nabla(\nabla \cdot \vec{W} - \vec{V} \cdot \vec{W} + G)$
- d) $\text{rot}(\text{grad}(G) + \text{div}(\vec{V} \cdot \vec{W}))$
- e) $H + \text{div}(\text{rot}(\vec{V}) + \vec{W})$

17. Considere um campo de temperaturas $T(x,y)$, sobre uma superfície, representado pelas isothermas (curvas de níveis) onde o ponto "A" é o local com ponto de máximo. Com base nos conceitos de gradiente e derivada direcional analise nos pontos e orientações indicadas no gráfico.



- I) A derivada direcional em P1 na orientação de S1 tem valor positivo;
- II) Comparando os 5 pontos, a orientação S2 representa o maior valor de derivada direcional;
- III) Comparando os 5 pontos, a orientação S4 representa o maior valor de derivada direcional;
- IV) O gradiente no ponto A é nulo;
- V) A orientação S2 apresenta derivada direcional negativa;
- VI) A orientação S3 representa um valor nulo de derivada direcional.

Dadas as afirmações indique a alternativa verdadeira:

- a) As alternativas III, IV e VI estão corretas;
- b) As alternativas II, IV e VI estão corretas;
- c) A alternativa IV é incorreta;
- d) A única alternativa aceitável é a IV;
- e) A alternativa I é verdadeira.

Respostas:

1a. $[y+z, x+z, x+y]$ 1b. $[\frac{yz}{2\sqrt{xyz}}; \frac{xz}{2\sqrt{xyz}}; \frac{xy}{2\sqrt{xyz}}]$ 1c. $[-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}; 1]$

2a. $8x^3 + xe^{xy}$ 2b. $4xy^2 + 3xz + y^2$

3a. $[0; 0; -y \operatorname{sen}(xy) - x \cos(xy)]$ 3b. $[-1-3x; 0; 3z-2x^2]$

4a. $2(x+y)$ 4b. $[x-y+2; x-y+2; 2]$ 4c. 0 4d. $\frac{2xy}{z^3}$

5a. 0 5b. 0

6a. $(1+y)\vec{i} + x\vec{j}$ 6b. $-2x\vec{i} + 2y\vec{j} - 3\vec{k}$

7. $\sqrt{2}e$

8a. $2+4\sqrt{3}$ 8b. $\sqrt{15} - \frac{\sqrt{5}}{2}$

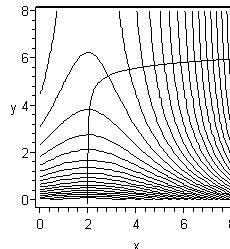
9a. $19,98^\circ\text{C}$ 9b. $[0,008; -0,12; 0,1]^\circ\text{C}/\text{cm}$ 9c. $0,14^\circ\text{C}/\text{cm}$ (aquecendo)

10. 0,15

11a. $6x+3y+2z-18=0$, $[6t+1; 3t+2; 2t+3]$

11b. $4x-5y-z-4=0$, $[4t+2; -5t+1; -(t+1)]$

12. $[2+6e^{-6t}; 2\sqrt[4]{(256-250t)}-2]$



13a. Sobe (2,21 m/m); 13b. Sobe (0,82 m/m); 13c. Desce (-2,14 m/m);

13d. $\vec{u} = [-0,937; -0,348]$ ou $\alpha_x \cong -159,6^\circ$ (em rel. a x); taxa máxima = 2,35 m/m ; $\alpha \cong 67^\circ$

14. $[40(1+e^{-t/125}); -\frac{8}{3} + \frac{128}{3}e^{-t/80}]$

15a. $2e^{-\frac{\pi}{2}}\vec{i}$