Resumo da Aula 1 – de Cálculo IV, 25/fevereiro de 2022
Séries Numéricas - Milton Procópio de Borba

Definição

Seja S_n a soma dos n primeiros termos de uma sequência $\{u_n\}$.

$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ é chamada de <u>*Soma Parcial*</u> da sequência $\{u_n\}$.

Ao $\lim_{n\to\infty} S_n$, chamamos de <u>*Série infinita*</u> e representamos por $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Se este limite existir, a série é convergente (converge), caso contrário, é divergente (diverge).

Exemplos

1. Série Geométrica: $\{g_n\} = \{1/2^n\}$. Também $\lim_{n\to\infty} g_n = 0$ sua soma é $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$. (Soma da PG)

2. Série Telescópica: $\{u_n\} = \{\frac{1}{n(n+1)}\}$. Temos que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ e que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = (1/1 \underline{- 1/2) + (1/2} \underline{- 1/3) + (1/3} - 1/4) + ...$$

Todos os termos serão eliminados, exceto o primeiro $(1/1)$ e o "*último*" que tende a zero.

Portanto a "soma" é $1/1 = 1$.

Outras sequências têm suas parcelas intermediárias eliminadas como estas: <u>*Telescópicas*</u>.

3. Série Harmônica: Seja $\{h_n\} = \{1/n\}$. Apesar de $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$, temos que não existe $\sum_{n=1}^{\infty} h_n$,

pois a soma infinita: $1 + 1/2 + 1/3 + \ ... + 1/n + ...$ tende a ∞, como veremos a seguir:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + 1/2 + (1/3 + 1/4) + (1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8) + (1/9 + ... + 1/16) + ...$, maior ou igual a:

$$1 + 1/2 + (1/4 + 1/4) + (1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8) + (1/16 + ... + 1/16) + ... =$$
$$1 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + ... \to \infty$$

Os COMANDOS abaixo no Maple, forneceram os seguintes RESULTADOS

`> for vez from 1 to 3 do`
`> S[10^vez]= evalf(sum(1/n,n=1..10^vez))`
`> od;`
	$S_{10} = 2.928968254$
	$S_{100} = 5.187377518$
	$S_{1000} = 7.485470861$

`> for vez from 2 to 4 do`
`> S[1000^vez]=  evalf(sum(1/n,n=1..1000^vez))`
`> od;`
	$S_{1000000} = 14.39272672$
	$S_{1000000000} = 21.30048150$
	$S_{1000000000000} = 28.20823678$

As próximas somas com 1000 x mais parcelas são aproximadamente: 35, 42, 49, 56, 63, 70,

4. Seja: Seja $\{A_n\} = \{-(-1)^n/n\}$ = 1 - 1/2 + 1/3 – ¼ + ...

Temos que $\lim_{n\to\infty} A_n = 0$, e veremos, mais tarde que

$\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ converge para um valor entre 1 e $0,5$ (Teorema de Leibniz).

Na verdade, $\sum_{n=1}^{\infty} A_n = ln(2) \approx 0,693$.(veremos por séries de Taylor, bem mais tarde).

5. Se, da sequência harmônica, tirarmos todas as parcelas que tenham 4, teremos:

$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/5 + 1/6 +1/7 + 1/8 + 1/9 + ... + 1/12 + 1/13 + 1/15 + 1/16 + 1/17 + ...$

Vamos mostrar que esta "soma" não passa de 80.

As primeiras 8 parcelas não passam de 1, totalizando menos que 8.
As próximas 72 $(=8$x$9)$ parcelas de $1/10$ até $1/99$ não passam de $1/10$. Total menor que 8x$9/10$.
As próx. 8x9x9 parcelas de $1/100$ até $1/999$ não passam de $1/100$. Total < 8x9x$9/100$.

Sucessivamente, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n < 8.[\, 1 + 9/10 + (9/10)^2 + (9/10)^3 + ... \,] = 8.[10]$ (Soma da PG)