Exercícios sobre Séries Numéricas – Prof. Milton Borba

Analisar a convergência ou não das séries. Se Possível, calcular a soma:

1) $5 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \frac{16}{27} + \cdots$

2) $\frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} + \cdots$

3) $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdots$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+3n-5}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!2^n}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2+2n}$

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{n^2+3n}$

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+n}{2^n}$

10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

Resolução/Respostas

1) $5 + PG = 5 + \frac{2}{1-2/3} = 5 + \frac{2}{1/3} + 5 + 6 = 11$

2) $\int_1^{\infty} \frac{x}{e^x}\,dx = 2/e \sim 0{,}74$ ➔ Converge.

3) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ é alternada, com $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ e $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$ é decrescente. Por Leibniz ➔ Converge.

4) $\frac{n}{n^3+3n-5} < \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$ p/ $n > 1$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge (Exemplo 4), $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+3n-5}$ ➔ Converge.

5) $\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1+2)!2^{n+1}}}{\frac{n!}{(n+2)!2^n}} = \frac{\frac{(n+1).n!}{(n+3)!2^n.2}}{\frac{n!}{(n+2)!2^n}} = \frac{(n+1).n!}{(n+3)!.2^n.2}.\frac{(n+2)!.2^n}{n!} = \frac{(n+1)(n+2)!}{(n+3)!.2} = \frac{(n+1)(n+2)!}{(n+3)(n+2)!.2} = \frac{(n+1)}{(n+3).2}$

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{(n+3).2} = ½ < 1$. ➔ Converge.

6) $\frac{6}{n^2+2n} < \frac{6}{n^2}$ p/ $n \geq 1$. Como $6\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge (Exemplo 4), $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2+2n}$ ➔ Converge.

Além disto, $\frac{6}{n^2+2n} = \frac{3}{n} - \frac{3}{n+2}$. Então, telescopicamente, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2+2n} = (\frac{3}{1} - \frac{3}{1+2}) + (\frac{3}{2} - \frac{3}{2+2}) + (\frac{3}{3} - \frac{3}{3+2}) + \ldots$,

ou seja, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2+2n} = (\frac{3}{1} - \frac{3}{3}) + (\frac{3}{2} - \frac{3}{4}) + (\frac{3}{3} - \frac{3}{5}) + (\frac{3}{4} - \frac{3}{6}) + (\frac{3}{5} - \frac{3}{7}) + \ldots$, ➔ $\frac{3}{1} + \frac{3}{2} = 9/2 = 4{,}5$

7) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2+3n} = 2 \neq 0$, então $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{n^2+3n}$ ➔ Diverge.

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$ é alternada, com $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ e $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ é decrescente. Por Leibniz. ➔ absol. Converge.

9) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2+n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \sqrt[n]{2+n} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2+n} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} (2+n)^{1/n} = \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2} < 1$. ➔ Converge.

Ou por duas integrais. Uma delas será parecida com a integral do exercício 2 (2 no lugar de e)

10) Por integral, $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}.dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{t\to\infty} [\ln x]_1^t = \lim_{t\to\infty} (\ln t - \ln 1) = \lim_{t\to\infty} \ln t = \infty$. ➔ Diverge, se $p = 1$

ou $\lim_{K\to\infty} [\, x^{-p+1}/(1-p)]_1^K = (\infty - 1)/(1-p)$, se $(-p+1) > 0$ ➔ Diverge, se $p < 1$

ou $\lim_{K\to\infty} [\, x^{-p+1}/(1-p)]_1^K = 1/(1-p)$, se $(-p+1) < 0$ ➔ Converge, se $p > 1$