25/fev a 11/mar Cálculo IV - 5Lic.Fís

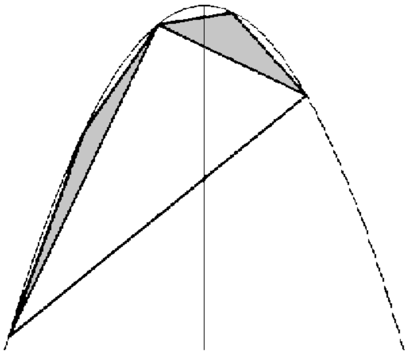
Séries Numéricas - Milton Procópio de Borba

Comentários

Em várias situações poderemos estar interessados em somar os (infinitos) elementos de uma sequência numérica $\{u_n\}$. Evidentemente, isto só fará sentido, se a sequência convergir para <u>*zero*</u>, caso contrário estaríamos somando uma infinidade de termos não nulos, que certamente não faria sentido (∞. # = k real, somente se # = 0).

O fato mais curioso é que nem toda sequência que converge para *zero* pode ser "somada" (pois nem sempre ∞. 0 é real).

Arquimedes (287-212 a.C.), segundo a história, foi o primeiro a estudar este assunto, ao tentar achar a área entre uma parábola com o vértice para cima e uma secante. Ele percebeu que, a partir de um certo triângulo inscrito, a soma das áreas dos outros dois seguintes era sempre $1/4$ da área do anterior.



Assim, a área procurada seria $A = S_0 + S_0/4 + S_0/16 + S_0/64 + ...$,
ou seja $A = S_0\,(1 + 1/4 + 1/16 + 1/64 + ...)$,

Sua "soma" será analisada na generalização do item S.2.

Definição

Seja S_n a soma dos n primeiros termos de uma sequência $\{u_n\}$.

$\boldsymbol{S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n} = \sum_{k=1}^{n} u_k$ é chamada de <u>*Soma Parcial*</u> da sequência $\{u_n\}$.

Ao $\lim_{n\to\infty} S_n$, chamamos de <u>*Série infinita*</u> e representamos por $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

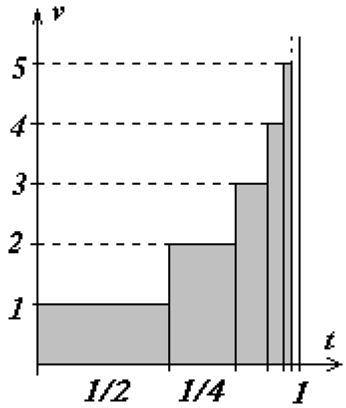
Se este limite existir, a série é convergente (converge), caso contrário, é divergente (diverge).

Exemplos

1. Série Telescópica: $\{u_n\} = \{\frac{2}{n(n+1)}\}$. Temos que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ e que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 2$ (ver S.1).

2. Série Geométrica: $\{g_n\} = \{1/2^n\}$. Também $\lim_{n\to\infty} g_n = 0$ e veremos (S.2) que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$.

3. Por volta de 1350, *Richard Swineshead* considerou um movimento durante um intervalo de tempo unitário, começando com velocidade unitária e de forma que quando faltasse a metade do tempo restante, sua velocidade aumentava em 1 unidade.



Isto gera a sequência de velocidades $\{v_n\} = \{n\}$ e de tempos $\{t_n\} = \{1/2^n\}$.

A distância percorrida = $\boldsymbol{d = d_1 + d_2 + d_3 + ...}$, onde $\boldsymbol{d_n = t_n . v_n}$.

Falamos de $\{d_n\} = \{n/2^n\}$ e veremos (S.3) que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$.

4. Seja $\{w_n\} = \{1/n^2\}$. Note de $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$, Vamos ver que existe $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ e é menor que 2.

A soma infinita: $1 + 1/4 + 1/9 + \ ... + 1/n^2 + ...$ pode ser agrupada assim:
$1 + (1/4 + 1/9)+(1/16 + 1/25 + 1/36 + 1/49)+(1/64 + ... +1/225) + ...$, menor ou igual a
$1 + (1/4 + 1/4)+(1/16 + 1/16 + 1/16 + 1/16)+(1/64 + ... +1/64) + ...$, que é equivalente à série

$$1 + 2/4 + 4/16 + 8/64 + ... = 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + ... = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + 1 = 2.$$

Euler provou, para espanto dos matemáticos no início do século XVIII, que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2/6 \approx 1,644934066848.$$ (ver, ainda, o item S.4.)

5. Série Harmônica: Seja $\{h_n\} = \{1/n\}$. Apesar de $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$, temos que não existe $\sum_{n=1}^{\infty} h_n$,

pois a soma infinita: $1 + 1/2 + 1/3 + \ ... + 1/n + ...$ tende a ∞, como veremos a seguir:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1+ 1/2 + (1/3 + 1/4) + (1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8) + (1/9 + ...+1/16) +...$, maior ou igual a:

$$1+ 1/2 + (1/4 + 1/4) + (1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8) + (1/16 + ... +1/16) + ... =$$
$$1+ 1/2 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + ... \to \infty$$

Os COMANDOS abaixo no Maple, forneceram os seguintes RESULTADOS

`> for vez from 1 to 3 do`
`> S[10^vez]= evalf(sum(1/n,n=1..10^vez))`
`> od;`
	$S_{10} = 2.928968254$
	$S_{100} = 5.187377518$
	$S_{1000} = 7.485470861$

`> for vez from 2 to 4 do`
`> S[1000^vez]=  evalf(sum(1/n,n=1..1000^vez))`
`> od;`
	$S_{1000000} = 14.39272672$
	$S_{1000000000} = 21.30048150$
	$S_{1000000000000} = 28.20823678$

As próximas somas com 1000 x mais parcelas são aproximadamente: 35, 42, 49, 56, 63, 70,

6. Se, da sequência harmônica, tirarmos todas as parcelas que tenham 4, teremos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/5 + 1/6 +1/7 + 1/8 + 1/9 + ... + 1/12 + 1/13 + 1/15 + 1/16 + 1/17 + ...$$

Vamos mostrar que esta “soma” não passa de 80.
As primeiras 8 parcelas não passam de 1, totalizando menos que 8.
As próximas 72 $(=8\text{x}9)$ parcelas de $1/10$ até $1/99$ não passam de $1/10$. Total menor que $8\text{x}9/10$.
As próx. $8\text{x}9\text{x}9$ parcelas de $1/100$ até $1/999$ não passam de $1/100$. Total < $8\text{x}9\text{x}9/100$.

Sucessivamente, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n < 8.[\ 1 + 9/10 + (9/10)^2 + (9/10)^3 + ...\ ] = 8.[10]$ (ver final de S.2).

7. Seja: Seja $\{A_n\} = \{-(-1)^n/n\}$ = 1 - 1/2 + 1/3 – ¼ + ...
Temos que $\lim_{n\to\infty} A_n = 0$, e veremos, mais tarde que

$\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ converge para um valor entre 1 e $0,5$ (Teorema de Leibniz).

Na verdade, $\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \ln(2) \approx 0,693$.(ver Apêndice).

Soma de uma série infinita (convergente)

S.1 Série Telescópica: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n+1} \right) = (2/1 - 2/2) + (2/2 - 2/3) + (2/3 - 2/4) + \ldots$

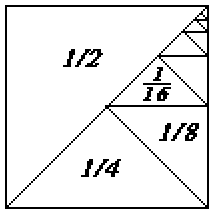
Todos os termos serão eliminados, exceto o primeiro $(2/1)$ e o "*último*" que tende a zero.
Portanto a "soma" é $2/1 = 2$.
Outras sequências têm suas parcelas intermediárias eliminadas como estas: *Telescópicas*.

S.2. Série Geométrica: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots + 1/2^n + \ldots$

é o "limite da soma" da P.G. que começa por $a_1 = 1/2$ e tem razão $q = 1/2$.

Seu valor pode ser calculado por: $S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1/2}{1-1/2} = \frac{1/2}{1/2} = 1.$

Outra maneira (geométrica) de verificar esta soma é considerar a área do quadrado unitário ao lado.



Este foi um caso particular do GERAL: $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a.q^n \text{ , que converge se } |q| < 1}$ (Soma da P.G.).

Por exemplo, a série que aparece no final do exemplo 6 tem primeiro termo 1 e razão $9/10$.

Sua soma vale: $\frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-9/10} = \frac{1}{1/10} = 10.$

S.3. Agora, podemos achar a soma $\boldsymbol{d}$ da série citada no exemplo 3:

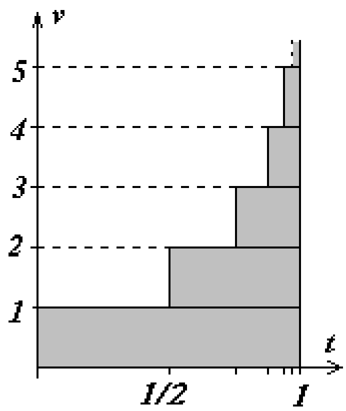
$$\boldsymbol{d} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 1/2 + 2/4 + 3/8 + 4/16 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(n-1)}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{2^n}$$

$$\boldsymbol{d} = 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} \boldsymbol{d}.$$

De $\boldsymbol{d} = 1 + \boldsymbol{d}/2$ tiramos que $\boldsymbol{d} - \boldsymbol{d}/2 = 1$ e portanto que $\boldsymbol{d} = 2$.

Certamente, *Richard Swineshead*, em 1350, não usou estes artifícios do somatório .

Ele usou o seguinte argumento: A soma da área daqueles retângulos verticais cada vez mais finos e mais altos (exemplo 3) é equivalente à soma das áreas dos retângulos de altura unitária, cada vez mais finos da figura ao lado.



Assim, $\boldsymbol{d} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 1/2 + 2/4 + 3/8 + 4/16 + \ldots$ é equivalente a

$$\boldsymbol{d} = 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + 1 = 2.$$

S.4. A 'soma" de uma série infinita convergente pode ser determinada em alguns casos especiais, como uma "telescópica" ou uma geométrica. Nos casos gerais, podemos conseguir a "soma", de uma quantidade razoável de termos com uso do computador. Por exemplo, para a série do exemplo 4 (já citada), conseguimos na planilha Excel:

Quantidade	1	2	5	10	20	50	100	500	1.000	5.000	10.000
"Soma"	1	1,25	1,46	1,55	1,596	1,625	1,635	1,6429	1,6439	1,6447	1,64483

Critérios de convergência para séries de termos <u>positivos</u>

Para verificar se uma série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ dada converge, o primeiro teste é a

C.1. Condição necessária de convergência: $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Depois disto, podemos usar um dos seguintes critérios:

C.2 *<u>Comparação</u>* das séries de termos positivos

Se $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ converge e $0 \leq u_n \leq V_n$, $\forall\ n \geq N$ para algum N, então $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge.

Se $\sum_{n=1}^{\infty} t_n$ diverge e $u_n \geq t_n \geq 0$, $\forall\ n \geq N$ para algum N, então $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ diverge.

C.3 Critério de D'Alembert (*<u>Razão</u>*)

Se $u_n > 0$ *e* $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, então $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge.

Se $u_n > 0$ *e* $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, então $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ diverge.

C.4 Critério de Cauchy (*<u>Raiz</u>*)

Se $u_n \geq 0$ e $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} < 1$, então $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge.

Se $u_n \geq 0$ e $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} > 1$, então $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ diverge.

C.5 Critério da *<u>Integral</u>*

Sejam $u_n \geq 0$ e f contínua, não crescentes, com $f(n) = u_n$, $\forall\ n \geq N$ para algum N.

Então, se $\int_N^{\infty} f(x).dx$ existe, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge. Se $\int_N^{\infty} f(x).dx$ diverge, então $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ diverge.

Séries de termos positivos e negativos

Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ com alguns termos u_n negativos pode convergir, mas $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ pode divergir. (ver exemplos 5 e 7).

Convergência absoluta e condicional

Dizemos que uma série é *<u>absolutamente convergente</u>* se $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ converge (e também $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$). Neste caso, sua “soma” *<u>não depende</u>* da ordem das infinitas “parcelas”.

Dizemos que uma série é *<u>condicionalmente convergente</u>* se $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ diverge, mas $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge.

Neste caso, sua "soma" não só *depende* da ordem das infinitas "parcelas", como pode atingir *qualquer valor* previamente determinado.

Realmente, na série do exemplo 7, seja $S = \sum_{n=1}^{\infty} A_n = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \ldots = ln(2)$, nesta ordem.

Vamos "somá"-la numa outra ordem, com um termo positivo, seguido de dois negativos:

A nova "soma" será: $Ns = 1 - 1/2 - 1/4 + 1/3 - 1/6 - 1/8 + 1/5 - 1/10 - 1/12 + 1/7 - 1/14 - 1/16 + \ldots$

Ora, $Ns = (1 - 1/2 - 1/4) + (1/3 - 1/6 - 1/8) + (1/5 - 1/10 - 1/12) + (1/7 - 1/14 - 1/16) + \ldots$

Ou $Ns = (1/2 - 1/4) + (1/6 - 1/8) + (1/10 - 1/12) + (1/14 - 1/16) + \ldots$

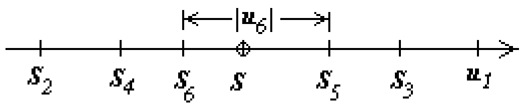
Finalmente, $Ns = (1/2)(1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + 1/7 - 1/8 + \ldots) = (1/2)S = ln(2)/2$.

Séries alternadas

Os exemplos mais interessantes de séries com alguns termos negativos são as *alternadas*, isto é, cada termos seguinte tem sinal trocado, ou seja $(u_n).(u_{n+1}) < 0, \forall n \geq 1$.

Teorema de Leibniz

Uma série alternada com $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ e $|u_n| \leq |u_{n-1}|$, $\forall n \geq 1$, converge para uma "soma" S que se situa entre S_{n-1} e S_n, $\forall n \geq 1$.



Assim, o erro cometido ao "truncar" a série depois do n^o termo não passa de $|u_n|$.

Apêndice

Séries de Taylor

Se f for derivável numa vizinhança de a,

$$f(x) = C_0 + C_1.(x-a) + C_2.(x-a)^2 + C_3.(x-a)^3 + \ldots + C_n.(x-a)^n + \ldots \ \forall x,$$

onde $C_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$, $\forall k$

Exemplo

Logaritmo Natural: Se $f(x) = ln(x)$ e $a = 1$, então $ln(x) = (x-1) - \dfrac{(x-1)^2}{2} + \dfrac{(x-1)^3}{3} - \dfrac{(x-1)^4}{4} + \ldots \pm \dfrac{(x-1)^n}{n} + \ldots$

Com $x = 2$ na série de $ln(x)$ (acima), temos que $f(2) = ln(2) = (1) - \dfrac{(1)^2}{2} + \dfrac{(1)^3}{3} - \dfrac{(1)^4}{4} + \ldots \pm \dfrac{(1)^n}{n} + \ldots$

Exercícios sobre Séries Numéricas – Prof. Milton Borba

Analisar a convergência ou não das séries. Se Possível, calcular a soma:

1) $5 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \frac{16}{27} + \cdots$	6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2+2n}$
2) $\frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} + \cdots$	7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{n^2+3n}$
3) $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdots$	8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$
4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+3n-5}$	9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+n}{2^n}$
5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!2^n}$	10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$