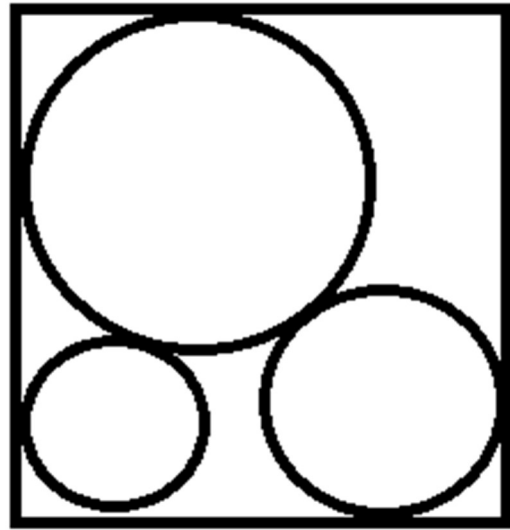
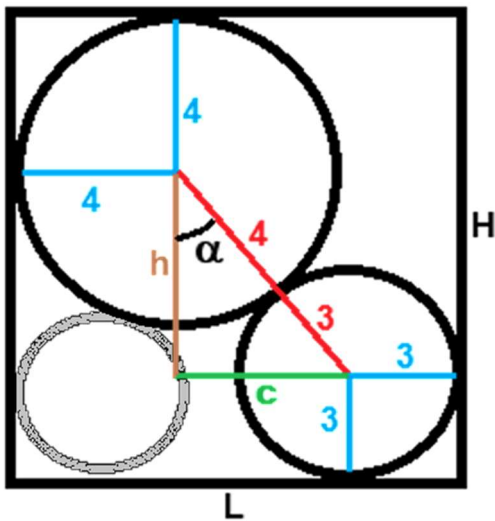


Qual a menor base retangular da caixa capaz de conter três garrafas de raios 4cm, 3cm e 2 cm?



Inicialmente, vamos arrumar um lugar menor para caber as duas garrafas maiores



$$1 \leq c = 7 \sin \alpha \leq \sqrt{49 - 1} = 4\sqrt{3}$$

$$L = 4 + c + 3 = 7 + c = 7 + 7 \sin \alpha$$

$$8 \leq L \leq 7 + 4\sqrt{3}$$

$$1 \leq h = 7 \cos \alpha \leq \sqrt{49 - 1} = 4\sqrt{3}$$

$$H = 4 + h + 3 = 7 + h = 7 + 7 \cos \alpha$$

$$8 \leq H \leq 7 + 4\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{7} \leq \sin \alpha \leq \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

$$A = L \cdot H = (7 + 7 \sin \alpha) \cdot (7 + 7 \cos \alpha)$$

Efetuando o produto: $A = 49(1 + \sin \alpha + \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha)$.

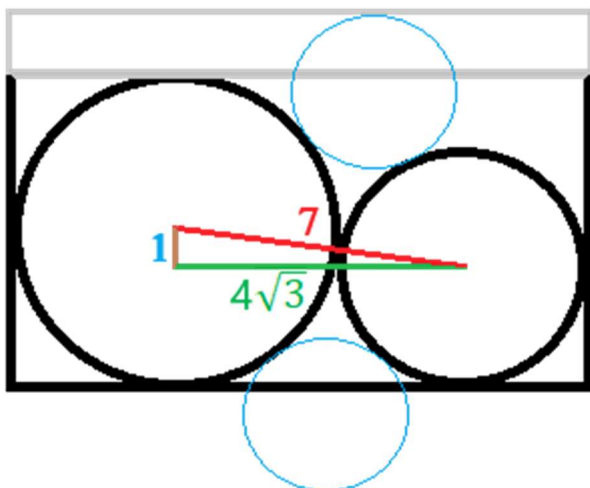
Derivando: $A' = 49(\cos \alpha - \sin \alpha + \cos 2\alpha) = 0 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$ [ver (*) no final].

Derivando: $A'' = 49(-\sin \alpha - \cos \alpha - 2 \sin 2\alpha) \rightarrow A''(\frac{\pi}{4}) < 0 \rightarrow$ Área máxima em $\alpha = \frac{\pi}{4}$

Então o mínimo só pode ocorrer nos finais dos intervalos:

$$A(\alpha_{\min}) = 49(1 + \frac{1}{7} + \frac{4\sqrt{3}}{7} + \frac{1}{7} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{7}) = 49 + 7 + 28\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 56 + 32\sqrt{3}$$

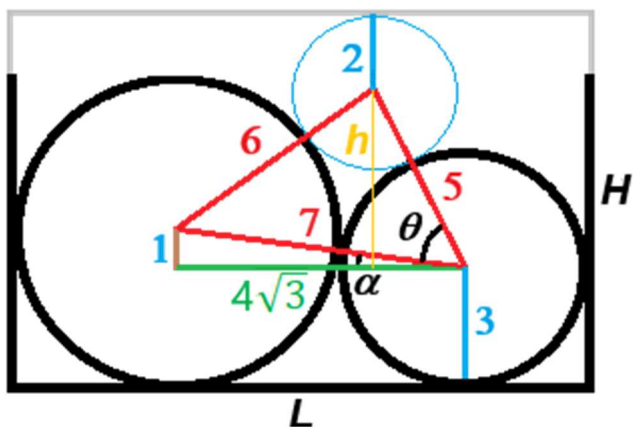
$$A(\alpha_{\max}) = 49(1 + \frac{4\sqrt{3}}{7} + \frac{1}{7} + \frac{4\sqrt{3}}{7} \cdot \frac{1}{7}) = 56 + 32\sqrt{3} \rightarrow A_{\max} \sim 111,4256 \text{ cm}^2$$



Assim fica o retângulo (três lados **pretos** e um **cinza**) com o maior ângulo α , cujo seno vale $\frac{4\sqrt{3}}{7}$. O outro retângulo com o menor ângulo é o mesmo, rotacionado de 90° .

Infelizmente, não cabe a outra garrafa (a de raio 2cm).

A solução será deixar o retângulo mais alto (subindo o lado cinza).



Pela lei dos cossenos:

$$6^2 = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \cos \theta$$

$$\text{Então, } \cos \theta = \frac{38}{70} \rightarrow \sin \theta = \frac{24\sqrt{6}}{70}$$

$$\sin(\alpha + \theta) = \sin \alpha \cdot \cos \theta + \sin \theta \cdot \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha + \theta) = \frac{1}{7} \cdot \frac{38}{70} + \frac{24\sqrt{6}}{70} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{7} = \frac{19+144\sqrt{3}}{245}$$

$$h = 5 \cdot \sin(\alpha + \theta) = 5 \cdot \frac{19+144\sqrt{3}}{245} = \frac{19+144\sqrt{3}}{49}$$

$$\text{Então, } H = 2 + h + 3 = 5 + \frac{19+144\sqrt{3}}{49} = \frac{26+144\sqrt{3}}{49} \sim 10,48 \text{ cm}$$

$$L = 7 + 4\sqrt{3} \sim 13,93 \text{ cm}$$

$$A = L \cdot H = (7+4\sqrt{3}) \cdot \frac{26+144\sqrt{3}}{49} = \frac{3576+206\sqrt{3}}{49} \sim 145,94 \text{ cm}^2$$

=====

(*)

$(\cos \alpha - \sin \alpha + \cos 2\alpha) = 0$. Usando $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$:

$\cos \alpha - \sin \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 0$. De $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$:

$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$. Fazendo $x = \sin \alpha$: $\sqrt{1 - x^2} - x + (1 - x^2) - x^2 = 0$

Ou $\sqrt{1 - x^2} = 2x^2 + x - 1$. Ao quadrado: $1 - x^2 = 4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 2x + 1$

Ou $4x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(4x^3 + 4x^2 - 2x - 2) = 0$. Suas raízes são:

$x_1 = 0$; $x_2 = -1$; $x_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $x_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}$; Como $x = \sin \alpha$:

$\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = \frac{3\pi}{2} = 270^\circ$; $\alpha_3 = \frac{5\pi}{4} = 225^\circ$ e $\alpha_4 = \frac{\pi}{4}$