

Uma Equação Binomial – Milton Borba

Sabendo que

$$a^2 + \frac{1}{a^2} = 4$$

Avalie $a^6 + \frac{1}{a^6}$

Tratando como polinomial, por Bhaskara (irracional):

Com $t = a^2$,

Temos $t + \frac{1}{t} = 4$,

Ou $t^2 - 4t + 1 = 0 \Rightarrow t = 2 \pm \sqrt{3}$

Agora, como $a^6 = t^3 = 26 \pm 15\sqrt{3}$ teremos que

$$a^6 + \frac{1}{a^6} = t^3 + \frac{1}{t^3} = 26 \pm 15\sqrt{3} + \frac{1}{26 \pm 15\sqrt{3}}$$

Racionalizando: $26 \pm 15\sqrt{3} + \frac{(26 \pm 15\sqrt{3})}{(26 \pm 15\sqrt{3})(26 \pm 15\sqrt{3})} = 26 \pm 15\sqrt{3} + \frac{(26 \pm 15\sqrt{3})}{1}$

Então: $a^6 + \frac{1}{a^6} = 26 \pm 15\sqrt{3} + 26 \pm (-15\sqrt{3}) = 52$

Outro tratamento **BINOMIAL** do tipo $x^n + \frac{1}{x^n}$

No problema dado, $a^2 + \frac{1}{a^2} = 4 \Rightarrow (a^2 + \frac{1}{a^2})^2 = 16 \Rightarrow a^4 + 2(1) + \frac{1}{a^4} = 16 \Rightarrow a^4 + \frac{1}{a^4} = 14$

$$4 \times 14 = (a^2 + \frac{1}{a^2}) \times (a^4 + \frac{1}{a^4}) = a^6 + \frac{1}{a^2} + a^2 + \frac{1}{a^6} = a^6 + \frac{1}{a^6} + \frac{1}{a^2} + a^2 = a^6 + \frac{1}{a^6} + 4$$

Ou seja, $4 \times 14 = a^6 + \frac{1}{a^6} + 4 \Rightarrow a^6 + \frac{1}{a^6} = 56 - 4 = 52$

Outra Equação Binomial: $x^2 - 7x + 1 = 0 \Rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} = ?$

a) Tratamento **BINOMIAL** do tipo $x^n + \frac{1}{x^n}$

No problema dado, $x^2 - 7x + 1 = 0$, dividimos por $x \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 7$

Então, $(x + \frac{1}{x})^2 = 49 \Rightarrow x^2 + 2(1) + \frac{1}{x^2} = 49 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 47$

Agora, $(x^2 + \frac{1}{x^2})^2 = 47^2 \Rightarrow x^4 + 2(1) + \frac{1}{x^4} = 2209 \Rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} = 2207$

b) Tratando com Bhaskara (irracional):

Com $x = \frac{7 \pm \sqrt{49-4}}{2} = \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$

Temos $x^2 = \frac{49 \pm 42\sqrt{5} + 4}{4} = \frac{94 \pm 42\sqrt{5}}{4} = \frac{47 \pm 21\sqrt{5}}{2}$

Então, $x^4 = \frac{2209 \pm 1974\sqrt{5} + 220}{4} = \frac{44 \pm 1974\sqrt{5}}{4} = \frac{2207 \pm 98\sqrt{5}}{2}$

E $\frac{1}{x^4} = \frac{2}{2207 \pm 98\sqrt{5}} \times \frac{2207 \mp 98\sqrt{5}}{2207 \mp 98\sqrt{5}} = \frac{4414 \mp 1974\sqrt{5}}{4870849 - 487084} = \frac{4414 \mp 1974\sqrt{5}}{4} = \frac{22 \mp 98\sqrt{5}}{2}$

Então, $x^4 + \frac{1}{x^4} = \frac{2207 \pm 98\sqrt{5}}{2} + \frac{220 \mp 987\sqrt{5}}{2} = 2207$

Mais geralmente, este tratamento **BINOMIAL** pode ser visto no meu site, em
Curiosidades / Mais Outras / Regras / Um **BINÔMIO** especial