

Um sistema de duas equações a três Incógnitas?!

$$\begin{cases} ab + c = 10 \\ a + bc = 11 \end{cases}$$

Somando as equações:

$$ab + a + c + bc = 21$$

Fatorando:

$$a(b+1) + c(1+b) = 21$$

Fatorando:

$$(b+1)(a+c) = 21$$

Nos inteiros positivos,	ou $\begin{cases} b+1=1 \\ a+c=21 \end{cases}$,	ou $\begin{cases} b+1=21 \\ a+c=1 \end{cases}$,	ou $\begin{cases} b+1=3 \\ a+c=7 \end{cases}$,	ou $\begin{cases} b+1=7 \\ a+c=3 \end{cases}$.
Soluções: Com $\{a, b, c\} \in \mathbb{N}$ e com $b \in \mathbb{N}$ $\{a, c\} \subset \mathbb{Q}$	$b=0$ e $\begin{cases} c=10 \\ a=11 \end{cases}$ (sistema original)	$b=20$ e ou $a=0$ e $c=1$ ou $a=1$ e $c=0$ ou $\begin{cases} 20a+c=10 \\ a+20c=11 \end{cases}$ (sistema original) $c=10-20a$ $a+20(10-20a)=11$ $a-400a=11-200=-189$ $a=63/133$ $c=70/133$	$b=2$ e $\begin{cases} 2a+c=10 \\ a+2c=11 \end{cases}$ (sistema original) $c=10-2a$ $a+2(10-2a)=11$ $a-4a=11-20=-9$ $a=3 \rightarrow c=4$	$b=6$ e ou $a=0$ e $c=3$ ou $a=1$ e $c=2$ ou $a=2$ e $c=1$ ou $a=3$ e $c=0$ ou $\begin{cases} 6a+c=10 \\ a+6c=11 \end{cases}$ (sistema original) $c=10-6a$ $a+6(10-6a)=11$ $a-36a=11-60=-49$ $a=7/5$ $c=8/5$

Nos inteiros	ou $\begin{cases} b+1=-1 \\ a+c=-21 \end{cases}$,	ou $\begin{cases} b+1=-21 \\ a+c=-1 \end{cases}$,	ou $\begin{cases} b+1=-3 \\ a+c=-7 \end{cases}$,	ou $\begin{cases} b+1=-7 \\ a+c=-3 \end{cases}$.
Soluções: Com $b \in \mathbb{Z}$ $\{a, c\} \subset \mathbb{Q}$	$b=-2$ e $\begin{cases} -2a+c=10 \\ a-2c=11 \end{cases}$ (sistema original) $c=10+2a$ $a-2(10+2a)=11$ $a-4a=11+20=31$ $a=-31/3$ $c=-32/3$	$b=-22$ e $\begin{cases} -22a+c=10 \\ a-22c=11 \end{cases}$ (sistema original) $c=10+22a$ $a-22(10+22a)=11$ $a-484a=11+220=231$ $a=-11/23$ $c=-12/23$	$b=-4$ e $\begin{cases} -4a+c=10 \\ a-4c=11 \end{cases}$ (sistema original) $c=10+4a$ $a-4(10+4a)=11$ $a-16a=11+40=51$ $a=-51/15$ $c=-54/15$	$b=-8$ e $\begin{cases} -8a+c=10 \\ a-8c=11 \end{cases}$ (sistema original) $c=10+8a$ $a-8(10+8a)=11$ $a-64a=11+80=91$ $a=-13/9$ $c=-14/9$

Soluções em $\mathbb{Q}$

$\begin{cases} ab + c = 10 \\ a + bc = 11 \end{cases}$	$\rightarrow c = 10 - ab$ $\rightarrow a + b(10 - ab) = 11 \rightarrow a + 10b - ab^2 = 11 \rightarrow a(1 - b^2) = 11 - 10b \rightarrow a = \frac{11-10b}{1-b^2}$
--	---

$$\text{Então, } c = 10 - ab = 10 - \frac{11-10b}{1-b^2}b \rightarrow c = \frac{10-11b}{1-b^2}$$

Em particular,	se $b=0$ então, $a=10$ e $c=11$. se $b=2$ então, $a=3$ e $c=4$.	se $b=20$ então, $a=63/133$ e $c=70/1333$. se $b=6$ então, $a=7/5$ e $c=8/5$.
	se $b=-2$ então, $a=-31/3$ e $c=-32/3$. se $b=-22$ então, $a=-11/23$ e $c=-12/23$.	se $b=-4$ então, $a=-17/5$ e $c=-18/5$. se $b=-8$ então, $a=-13/9$ e $c=-14/9$.
	se $b=3$ então, $a=19/8$ e $c=23/8$. se $b=-3$ então, $a=-41/8$ e $c=-43/8$.	se $b=1/10$ então, $a=1000/99$ e $c=890/99$. se $b=1/11$ então, $a=407/40$ e $c=363/40$.