

Que $\{a, b\} \subset \mathbb{Z}$, faz $a^2 + ab + b^2 = a^2 b^2$?

Se $a = 0$, então $0 + 0 + b^2 = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow \{a, b\} = \{0, 0\}$

Se $a = \pm 1$, então $1 \pm b + b^2 = b^2 \Rightarrow -b = \pm 1 \Rightarrow \{a, b\} = \{1, -1\}$ ou $\{a, b\} = \{-1, 1\}$

Seja $a = \pm k$ (k inteiro maior que 1). Então $k^2 \pm kb + b^2 = k^2 b^2$.

Ou $(1 - k^2)b^2 \pm kb + k^2 = 0 \Rightarrow b = \frac{\pm k \pm \sqrt{k^2 + 4k^2(k^2 - 1)}}{2(k^2 - 1)} = \frac{\pm k \pm \sqrt{k^2(4k^2 - 3)}}{2(k^2 - 1)} = \frac{\pm k}{2} \frac{1 \pm \sqrt{4k^2 - 3}}{k^2 - 1} \notin \mathbb{Z}$, pois $4k^2 - 3$ nunca será um quadrado perfeito.

$4k^2 - 3 = 13$, se $k = \pm 2 \Rightarrow 4k^2 - 3 < 4k^2 =$ quadrado de $2k$ ($13 < 16$),

$4k^2 - 3 = 33$, se $k = \pm 3 \Rightarrow 4k^2 - 3 < 4k^2 =$ quadrado de $2k$ ($33 < 36$),

$4k^2 - 3 = 61$, se $k = \pm 4 \Rightarrow 4k^2 - 3 < 4k^2 =$ quadrado de $2k$ ($61 < 64$),

$4k^2 - 3 = 97$, se $k = \pm 5 \Rightarrow 4k^2 - 3 < 4k^2 =$ quadrado de $2k$ ($97 < 100$),

.....,

$4k^2 - 3 = 397$, se $k = \pm 10 \Rightarrow 4k^2 - 3 < 4k^2 =$ quadrado de $2k$ ($397 < 400$),

-----,

$4k^2 - 3 = 39.997$, se $k = \pm 100 \Rightarrow 4k^2 - 3 < 4k^2 =$ quadrado de $2k$ ($39.997 < 40.000$),

-----,

$4k^2 - 3$ será sempre menor (3 a menos) que o quadrado de $2k$.

Lembra que a diferença entre os quadrados de dois inteiros consecutivos (k e $k+1$) é sempre $(2k+1)$, pois $(k+1)^2 - k^2 = k^2 + 2k + 1 - k^2 = 2k + 1$. Com $k \geq 2$, temos que $(k+1)^2 - k^2 \geq 5 > 3$