

$$n! = n^3 - n$$

Como podemos encontrar, se existe(m) número(s) natural(is) tal(is) que $n! = n^3 - n$?

Poderíamos testar cada natural. Mas isto demoraria. A menos que se prove que acima de certo natural, $n!$ é sempre maior (ou menor) que $n^3 - n$.

Vejamos: $n = 0 \rightarrow 0! = 1 > 0^3 - 0 = 0 \rightarrow$ maior

$n = 1 \rightarrow 1! = 1 > 1^3 - 1 = 0 \rightarrow$ maior

$n = 2 \rightarrow 2! = 2 < 2^3 - 2 = 6 \rightarrow$ menor (epa...)

$n = 3 \rightarrow 3! = 6 < 3^3 - 3 = 24 \rightarrow$ menor

$n = 4 \rightarrow 4! = 24 < 4^3 - 4 = 60 \rightarrow$ menor (nossa...)

$n = 5 \rightarrow 5! = 120 = 5^3 - 5 = 120 \rightarrow$ igual (um natural, achado!)

$n = 6 \rightarrow 6! = 720 = 6^3 - 6 = 210 \rightarrow$ maior (epa...)

$n = 7 \rightarrow 7! = 5.040 > 7^3 - 7 = 336 \rightarrow$ maior

$n = 8 \rightarrow 8! = 40.320 > 8^3 - 8 = 504 \rightarrow$ maior (epa...) (nossa...)

$n = 9 \rightarrow 9! = 362.880 > 9^3 - 9 = 720 \rightarrow$ maior

$n = 10 \rightarrow 10! = 3.628.800 > 10^3 - 10 = 990 \rightarrow$ maior (uaaaauuuu...)

Parece que não tem mais volta (igual ou menor, só maior)!?

Mas isto não PROVA.

Vamos PROVAR que, se $n \geq 6$, então $n! = n^3 - n$.

LEMA: Se $n \geq 6$, então $n^4 + n^3 - n^2 - n > (n+1)^3 - (n+1)$.

Demonstração: As raízes de $x^2 - 4x - 3 = 0$ são $x = 2 \pm \sqrt{7}$

Então, para todo natural $n > 2 + \sqrt{7}$, $n^2 - 4n - 3 > 0$.

Assim, somando $3n + 2$, teremos que $n^2 - n - 1 > 3n + 2$

Multiplicando por n : $n^3 - n^2 - n > 3n^2 + 2n$

Também, $n^4 > n^3$, para $n \geq 6$.

Somando estas duas desigualdades, teremos que

$n^4 + n^3 - n^2 - n > n^3 + 3n^2 + 2n = (n+1)^3 - (n+1)$. **c.q.d.**

TEOREMA: Se $n \geq 6$, então $n! > n^3 - n \Rightarrow (n+1)! > (n+1)^3 - (n+1)$.

Demonstração: Para $n = 6$, está constatado na lista acima.

Para $n > 6$, multiplicamos $n! > n^3 - n$ por $(n+1)$. Então, teremos $(n+1).n! > (n+1).(n^3 - n)$

Ou seja, ficamos com $(n+1)! > n^4 + n^3 - n^2 - n$

Pelo LEMA, $n^4 + n^3 - n^2 - n > (n+1)^3 - (n+1)$,

Então, $(n+1)! > n^4 + n^3 - n^2 - n > (n+1)^3 - (n+1)$. **c.q.d.**