

# Segundo limite fundamental: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,781828$

## Como surgiu?

Conta-se que veio de uma situação referente à uma conta (valor  $C$ ) a ser paga em  $n$  prestações e juros compostos de 100% em 6 anos (72 meses), por exemplo.

Na hora (desistiu):  $n = 0 \rightarrow$  paga  $C$

Em 1 parcela (fim dos 6 anos):  $n = 1 \rightarrow$  paga  $C + C = 2C$

Em 2 parcelas (trianuais):  $n = 2 \rightarrow$  deve em 3 a:  $C + C/2 = C(1+1/2)$

paga:  $C(1+1/2) + C(1+1/2)/2$

Total (6 a):  $C(1+1/2)^2 (1+1/2) = C(1+1/2)^3$

Em 3 parcelas (bianuais):  $n = 3 \rightarrow$  deve em 2 a:  $C + C/3 = C(1+1/3)$

deve em 4 a:  $C(1+1/3)(1+1/3)$

Total (6 a):  $C(1+1/3)^2 (1+1/3) = C(1+1/3)^3$

\*\*\*

Em  $n$  parcelas (72/n meses)  $\rightarrow$  Total (6 a):  $= C(1+1/n)^n$

| $n$        | $(1+1/n)^n$ |
|------------|-------------|
| 1          | 2           |
| 2          | 2,25        |
| 3          | 2,3703704   |
| 4          | 2,4414063   |
| 5          | 2,4883200   |
| 10         | 2,5937425   |
| 100        | 2,7048138   |
| 1.000      | 2,7169239   |
| 10.000     | 2,7181459   |
| 100.000    | 2,7182682   |
| 1.000.000  | 2,7182805   |
| 10.000.000 | 2,7182817   |

Vamos mostrar que  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

é crescente e limitada:  $2 \leq f(x) < 3$ .

(ver gráfico ao lado e prova ABAIXO)

Realmente,  $f(1) = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = (1+1)^1 = 2$

Usando Binômio de Newton temos que

$$f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1^n + \frac{n \cdot 1^{n-1}}{(1)n} + \frac{n(n-1) \cdot 1^{n-2}}{(1.2)n^2} + \frac{n(n-1)(n-2) \cdot 1^{n-3}}{(1.2.3)n^3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3) \cdot 1^{n-4}}{(1.2.3.4)n^4} + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3) \dots 2.1}{(1.2.3.4 \dots n)n^n}$$

$$\text{Ou } f(n) = 1 + \frac{1}{1} + \frac{n-1}{2n} + \frac{(n-1)(n-2)}{6n^2} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(4!)n^3} + \dots + \frac{(n-1)(n-2)(n-3) \dots 2.1}{(n!)n^n}$$

$$\text{Ou } f(n) = 1 + 1 + \frac{1}{2} \frac{n-1}{n} + \frac{1}{6} \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n} + \frac{1}{4!} \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n} \frac{n-3}{n} + \dots + \frac{1}{n!} \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n} \frac{n-3}{n} \dots \frac{2}{n} \frac{1}{n}$$

Como  $\frac{n-k}{n} < 1$ , teremos que  $f(n) < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!}$ .

Mas  $3! = 6 = 3.2.1 > 2.2 = 2^2$ ;  $4! = 24 = 4.3.2.1 > 2.2.2 = 2^3$ ; ...;  $n! > 2^{n-1}$ . Então,  $\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$ .

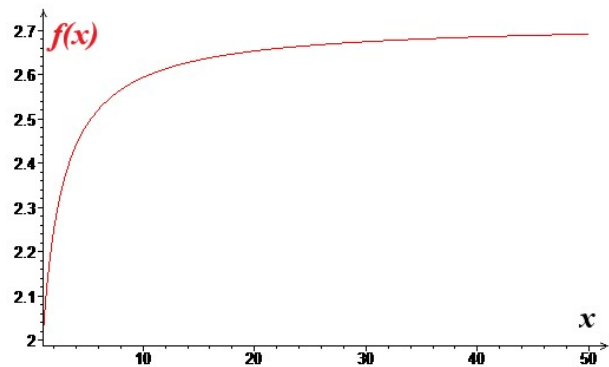
Assim,  $f(n) < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{2^{n-1}} < 1 + 2 = 3$  (portanto limitada entre 2 e 3).

Também,  $\lim_{n \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

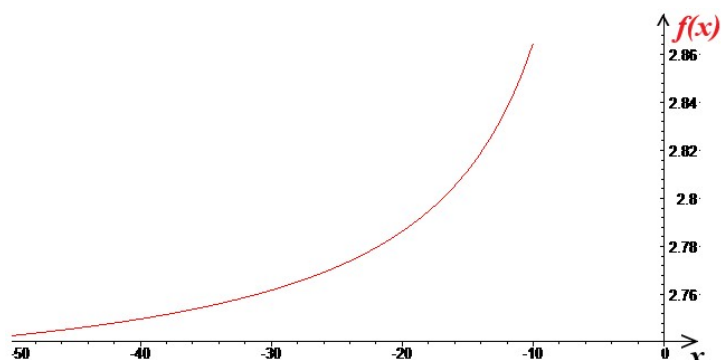
$$\text{pois } f(-x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-x} = \left(\frac{x-1}{x}\right)^{-x} = \left(\frac{x}{x-1}\right)^x = \left(\frac{x-1+1}{x-1}\right)^x = \left(\frac{x-1}{x-1} + \frac{1}{x-1}\right)^x = \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^x$$

Então, com  $n = -x$ , teremos que  $\lim_{n \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^x$ .

Agora, fazendo  $z = x - 1$ , ficamos com  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{z+1} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z \left(1 + \frac{1}{z}\right) = e.1 = e$



Ver mais ABAIXO



Vamos encontrar que  $f(x)$  é crescente, quando  $x \geq 0$ .

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \rightarrow f'(x) = x \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right) + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot (1) \rightarrow f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left[ \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-1} \right].$$

$$\text{Arrumando, } f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left[ \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \left(\frac{x+1}{x}\right)^{-1} \right] = f(x) \left[ \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \right].$$

Para mostrar que  $f(x)$  é crescente, basta provar que  $f'(x)$  é positiva.

Já que  $f(x)$  é positiva ( $2 < f(x) < 3$ ), basta provar que o colchete  $\left[ \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \right] > 0$ .

Seja  $u = \frac{1}{x}$  e  $g(u) = \left[ \ln(1 + u) - \frac{u}{u+1} \right]$  será o nosso colchete que queremos analisar sua positividade.

$$\text{A sua derivada é } g'(u) = \left[ \ln(1 + u) - \frac{u}{u+1} \right]' = \frac{1}{u+1} - \frac{(u+1) - u}{(u+1)^2} = \frac{1}{u+1} - \frac{1}{(u+1)^2} = \frac{u+1-1}{(u+1)^2} = \frac{u}{(u+1)^2} > 0.$$

Assim,  $G(x) = g(u(x))$  sendo o nosso colchete original,  $G(x) = \left[ \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \right]$ , temos que

$$G'(x) = g'(u(x)) \cdot u'(x) = \frac{u}{(u+1)^2} \cdot \frac{-1}{x^2} \text{ será sempre negativo. Então, } G(x) \text{ é decrescente.}$$

$$\text{Mas } \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \right] = 0 \text{ e } G(1) = \ln(2) - 0,5 > 0 (\approx 0,19).$$

Ora, se  $G$  é decrescente,  $G(1) > 0$  e, no infinito positivo  $G(x)$  tende para zero, então  $G$  é POSITIVA.