

Terceiro limite fundamental: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$

Prova (usando deriadas)

Seja $f(t) = a^t$.

Então, $f'(t) = a^t \cdot \ln(a)$ e $f'(0) = a^0 \cdot \ln(a) = \ln(a)$.

$$\text{Mas } f'(t) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(t+x) - f(t)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{t+x} - a^t}{x}$$

$$\text{Portanto, } f'(0) = \ln(a) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{0+x} - a^0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}.$$

$$\text{Ou Seja, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$$

Prova (sem deriadas)

Com $t = a^x - 1$, temos que $x = \log(1+t)$.

$$\begin{aligned} \text{Agora, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log(1+t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{t} \log(1+t)} \\ &= \frac{1}{\lim_{t \rightarrow 0} [\log(1+t)^{1/t}]} = \frac{1}{\log\left[\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t}\right]} = \frac{1}{\log[e]} = \ln(a), \end{aligned}$$

$$\text{pois } u = \log[e] \iff a^u = e \iff u \ln(a) = 1,$$

$$\text{ou } u = \frac{1}{\ln(a)} \rightarrow \frac{1}{\log[e]} = \frac{1}{u} = \ln(a).$$