

Os números reais $\sqrt{2}$ e $\sqrt[3]{5}$ são irracionais

Definições: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ = Conjunto dos **Naturais**

$\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ = Conjunto dos **Naturais positivos**

$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$ = Conjunto dos **Inteiros**

$\mathbb{Q} = \{p/q, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^+\}$ = Conjunto dos **Racionais**

Lema1: Se $m \in \mathbb{N}$, m^2 é par, então m também é par

Demonstração: Se m **não** é par, então $m = 2k+1$ para algum $k \in \mathbb{N}$

Neste caso, $m^2 = 4k^2 + 4k + 1 \rightarrow m^2$ é ímpar. C.q.d.

Proposição1: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Prova: Supor que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Então, $\sqrt{2} = p/q$ **irredutível** (p e q não sem divisores em comum)

Elevando ao quadrado, temos que $2 = p^2/q^2 \rightarrow p^2 = 2q^2 \rightarrow p^2$ é par $\rightarrow$ (Lema1) **p é par**.

Assim, $p = 2k$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Neste caso, $p^2 = 4k^2$.

Substituindo em **$p^2 = 2q^2$** , temos que $4k^2 = 2q^2 \rightarrow q^2 = 2q^2 \rightarrow q^2$ é par $\rightarrow$ (Lema1) **q também é par**.

A **contradição** ocorre por **p é par** e **q também é par**, pois p/q era **irredutível**.

Lema 2: Se p é múltiplo de 5, então, p^3 também p é múltiplo de 5.

Demonstração: Se p **não** é múltiplo de 5, então p não termina com os algarismos 0 nem 5.

Logo, p termina com os algarismos 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, ou 9.

Último alg. p	1	2	3	4	6	7	8	9
$p =$	$10n + 1$	$10n + 2$	$10n + 3$	$10n + 4$	$10n + 6$	$10n + 7$	$10n + 8$	$10n + 9$
$p^3 =$	$10m + 1$	$10m + 8$	$10m + 7$	$10m + 4$	$10m + 6$	$10m + 3$	$10m + 2$	$10m + 1$

Então, p^3 também termina com estes algarismos (exceto 0 e 5) $\rightarrow p^3$ não é divisível por 5. C.q.d.

Proposição1: $\sqrt[3]{5} \notin \mathbb{Q}$

Prova: Supor que $\sqrt[3]{5} \in \mathbb{Q}$. Então, $\sqrt[3]{5} = p/q$ **irredutível** (p e q não sem divisores em comum)

Elevando ao cubo, temos que $5 = p^3/q^3 \rightarrow p^3 = 5q^3 \rightarrow p^3$ é múltiplo de 5 par.

Pelo Lema2, **p é múltiplo de 5**.

Assim, $p = 5k$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Neste caso, $p^3 = 125k^3$.

Substituindo em **$p^3 = 5q^3$** temos que $125k^3 = 5q^3 \rightarrow q^3 = 25q^3 \rightarrow q^3$ é múltiplo de 5 par.

Pelo Lema2, **q também é múltiplo de 5**.

A **contradição** ocorre por **p é múltiplo de 5** e **q também é múltiplo de 5**, pois p/q era **irredutível**.