Equações Diferenciais - Aplicações na Engenharia

Dr. Mílton Procópio de Borba

RESUMO:

Inúmeros fenômenos físicos que aparecem na engenharia são modelados por equações envolvendo uma função (desconhecida) e suas duas primeiras derivadas - *Equações Diferenciais de Segunda Ordem*.

Equações

Algébricas:	$5x + 3 = 38$	$\Rightarrow x = 7$
	$t^2 - 2t = 8$	$\Rightarrow t_1 = 4\ ,\ t_2 = -2$
Exponenciais:	$3^e = 3^{2e} - 6$	$\Rightarrow e = 1$
Logarítmicas:	$\log(b + 5) - 2 = 0$	$\Rightarrow b = 95$
Trigonométricas:	$2.\cos 3\alpha = 1$	$\Rightarrow \alpha = 2.k\pi/3 \pm \pi/9$

DIFERENCIAIS :

$f'(t) = 2t + 1 \qquad \Rightarrow f(t) = t^2 + t + C$

$dy + 3x^2 y\, dx = 0 \qquad \Rightarrow y(x) = Ce^{-x^3}, \forall C.$

$z''(x) - 2z'(x) = 8z(x) + x \qquad \Rightarrow z(x) = Ae^{4x} + Be^{-2x} + 1/32 - x/8$

$\dfrac{\partial T}{\partial t} = 4\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad \Rightarrow T(t,x) = e^{-4k^2 t}(A\cos kx + B\,\mathrm{sen}\, kx),\ \forall\, k,A,B.$

Problemas de Valor <u>Inicial</u>

$$\begin{cases} f'(t) = 2t + 1 \\ f(1) = 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} dy + 3x^2 y\, dx = 0 \\ y(0) = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z''(x) - 2z'(x) = 8z(x) + x \\ z'(0) = 0 \\ z(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial t} = 4\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} \\ T(0,x) = 10x(3-x) \end{cases}$$

Problemas de Valor <u>de Contorno</u>

$$\begin{cases} z''(x) - 2z'(x) = \\ 8z(x) + x \\ z(0) = 1 \\ z(5) = 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial t} = 4\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} \\ T(t,0) = 0 \quad \rightarrow \text{Dirichlet} \\ \dfrac{\partial T}{\partial x}(t,3) = 0 \quad \rightarrow \text{Neumann} \end{cases}$$

Problema <u>Misto</u>

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial t} = 4\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} \\ T(0,x) = 10x(3-x) \\ T(t,0) = 0 \quad \rightarrow \text{Dirichlet} \\ \dfrac{\partial T}{\partial x}(t,3) = 0 \quad \rightarrow \text{Neumann} \end{cases}$$

Aplicações:

- √ **Radioatividade**
- √ **Esfriamento / Aquecimento**
- √ **População**
- √ **Pára - Quedas**
- √ **Despoluição**
- √ **Coluna / Pilar**

- √ **Tesoura**
- √ **Avião**
- √ **Mísseis**
- √ **Lançamento Espacial**

- √ **Massa / Mola / Amortecedor**
- √ **Circuito RLC**

- √ **Calor na Barra**
- √ **Corda Vibrante**

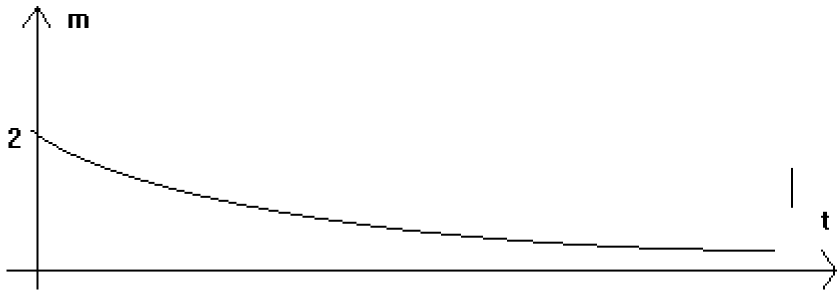
Radioatividade

m = massa de material radioativo

t = tempo

$m' \approx m \Rightarrow$ $\left| \begin{array}{l} m' = -km \\ m(0)=2 \end{array} \right.$

t	m
0,0	2
0,2	?
0,4	?
0,6	?
0,8	?



Analiticamente:

$$\left. \begin{array}{l} m' = -km \\ m(0) = 2 \end{array} \right| \begin{array}{l} \Rightarrow m(t) = C.e^{-kt} \\ \Rightarrow C = 2 \quad \Rightarrow \end{array} \qquad \boxed{m(t) = 2.e^{-kt}}$$

k depende das propriedades de cada material.

Conhecido outro ponto, p.ex: $m(1) = 1{,}85$, pode-se calcular k:

$$1{,}85 = 2.e^{-k} \quad \Rightarrow \quad k = \ln(2/1{,}85) \approx 0{,}078.$$

Esfriamento / Aquecimento

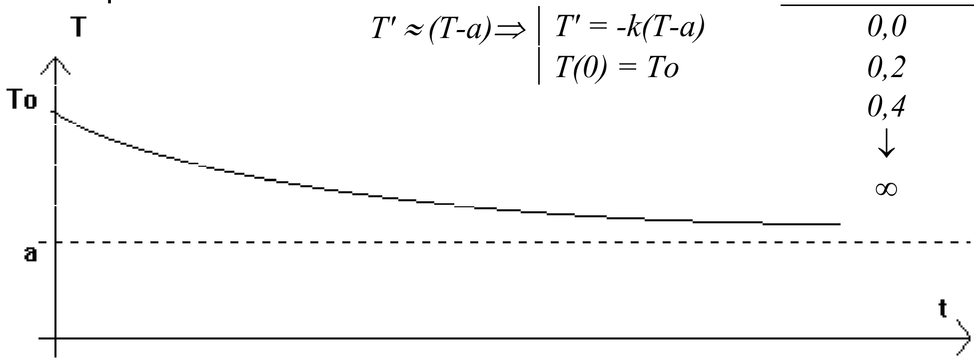
T = temperatura do corpo

a = temperatura ambiente

t = tempo

$T' \approx (T-a) \Rightarrow$ $\left| \begin{array}{l} T' = -k(T-a) \\ T(0) = To \end{array} \right.$

t	T
0,0	To
0,2	?
0,4	?
$\downarrow$	$\downarrow$
∞	a



Analiticamente:

$$\begin{array}{ll} T' = -k(T-a) & \Rightarrow T(t) = a+C.e^{-kt} \\ T(0) = To & \Rightarrow C = To - a \\ \qquad \Rightarrow & \boxed{T(t)=a+(To-a).e^{-kt}} \end{array}$$

k depende das propriedades de cada corpo.

Conhecido, p.ex: $T(1) = T1$, pode-se calcular k:

$$T1 = a+(To-a).e^{-k} \Rightarrow k = \ln[(To-a)/(T1-a)]$$

População

P = população
t = tempo
L = limite máximo de habitantes

Sem limite:

$p' \approx p \quad \Rightarrow p' = k.p$

$p(0) = Po$

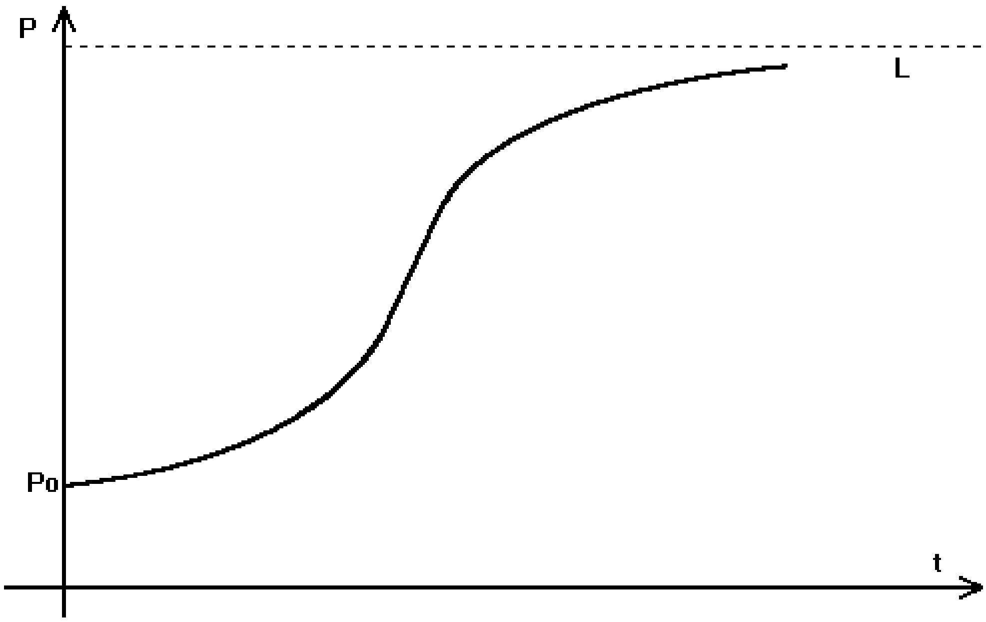
Limitada:

$p' \approx p$

$p' \approx L - p \quad \Rightarrow p' = k.p.(L-p)$

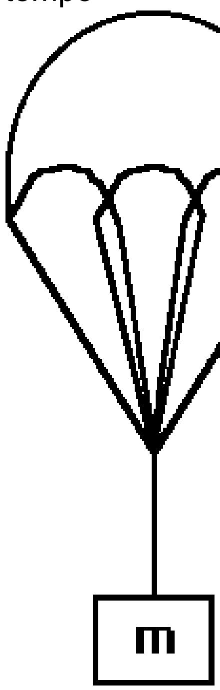
$p(0) = Po$

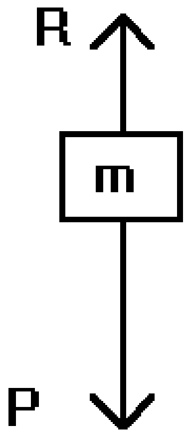
t	p
0	Po
1	?
2	?
3	?
4	?
↓	↓
∞	L



Pára-Quedas

v = velocidade do Pára-Quedas
t = tempo





$P = m.g$

$R \approx v^2 \Rightarrow R = k.v^2$

$FR = m.\ a$

$P - R = m.v'$

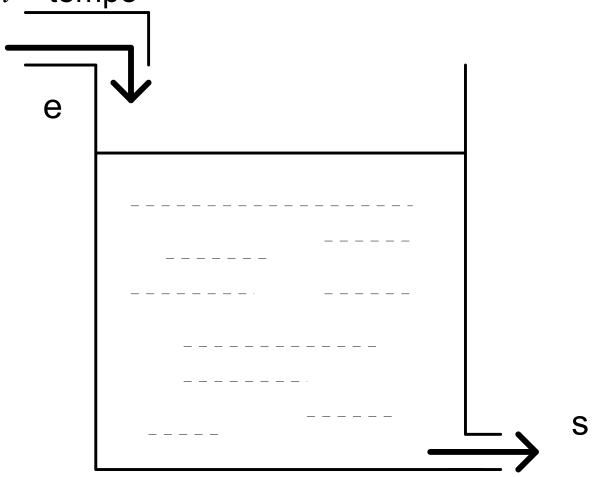
$m.g - k.v^2 = m.v'$

$k \Rightarrow$ *depende da forma do Pára-Quedas*

$$\boxed{v' = g - (k/m).v^2}$$
$$\boxed{v(0) = Vo}$$

Despoluição

M = Massa de poluentes
V = Volume de solução
C = Concentração de poluentes
t = tempo



e: entra
solução "limpa": L g/l
c/ vazão: V_e l/min

s: sai
solução "suja": C g/l
c/ vazão: V_s l/min

$V' = V_e - V_s$ $\Rightarrow$ $\boxed{V(t) = Vo + (V_e - V_s).t}$

$M' = L.V_e - C.V_s$

$C = M / V$ $\Rightarrow$ $M = C.V$

$C' = (V.M' - M.V')/V^2$ $\Rightarrow$ $C' = (M' - C.V') / V$

$$\boxed{\begin{array}{l} C' = \dfrac{(L - C).V_e}{Vo + (V_e - V_s).t} \\ C(0) = Co \end{array}}$$

Coluna / Pilar

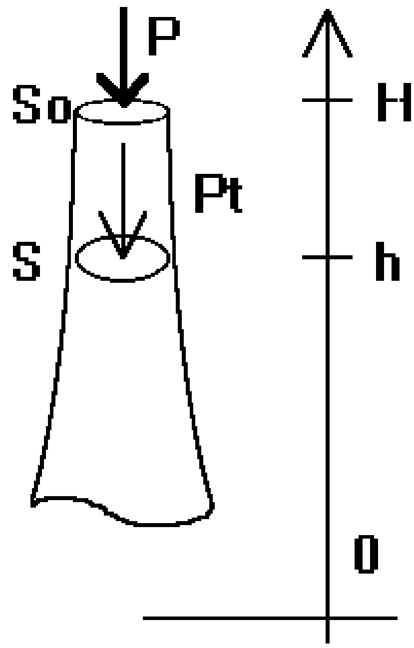
h = altura
S = Seção da coluna em cada h

$Pt = P + Pc$
$Pt / S = \tau$
$P + Pc = \tau. S$

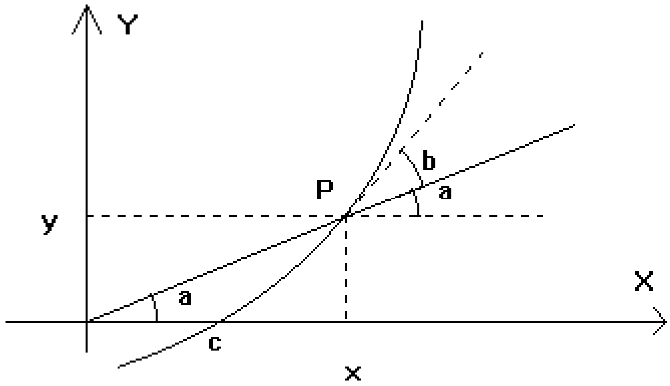
$$P + \rho\int_h^H S(h).dh =$$

$0 - \rho.S = \tau. S'$

$$\boxed{S' = -(\rho/\tau).S}$$
$$\boxed{S(H) = So}$$



Tesoura



x	y
8,00	0
8,25	?
8,50	?
8,75	?
9,00	?
::	::

b = ângulo "de corte" $\Rightarrow tg\ b = k$

a = ângulo "de fechamento" $\Rightarrow tg\ a = y/x$

(a+b) = inclinação da curva $\Rightarrow tg\ (a+b) = y'$

$$y' = tg(a+b) = \frac{tg\ a + tg\ b}{1 - tg\ a\ .\ tg\ b} = \frac{y/x + k}{1 - (y/x).k}$$

Por exemplo:

$b = 26°33'54,2''$

$\Rightarrow k = tg\ b = 1/2$

$c = 8$

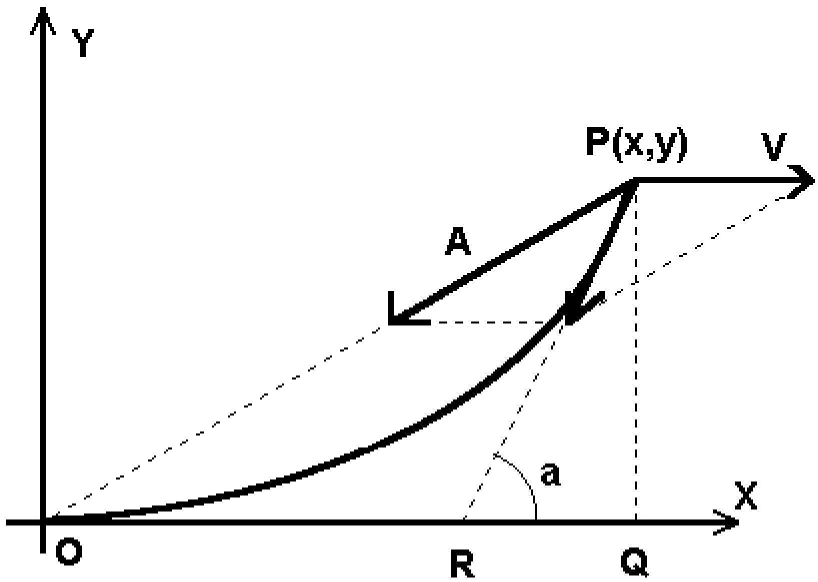
$$y' = \frac{2y + x}{2x - y}$$

$$y(8) = 0$$

Avião

Planta do Aeroporto: Pouso *(0,0)*

k = V/A = razão entre as velocidades *V* (do Vento) e *A* (do Avião).



$y' = tg\ a = \frac{PQ}{RQ} \Rightarrow RQ = y/y'$

$\frac{OR}{V} = \frac{OP}{A} \Rightarrow OR = (V/A).\ OP$

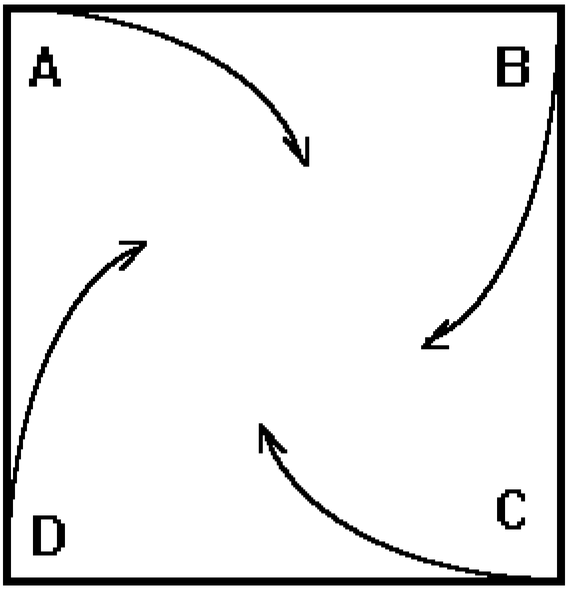
$\Rightarrow OR = = k.(x^2 + y^2)^{1/2}$

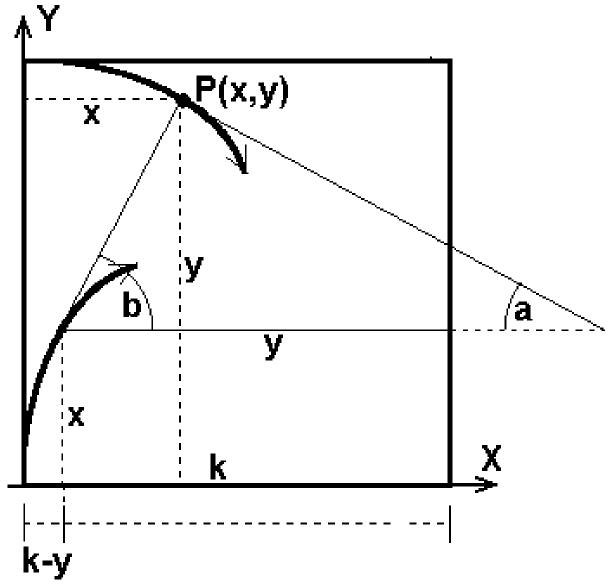
$\Rightarrow\ x - RQ = k.(x^2 + y^2)^{1/2}$

$x - y/y' = k.(x^2 + y^2)^{1/2}$

$$\boxed{y' = \frac{y}{x - k.(x^2 + y^2)^{1/2}} \qquad y(xo) = yo}$$

Mísseis





O Míssel A persegue o B
O Míssel B persegue o C
O Míssel C persegue o D
O Míssel D persegue o A

$$tg\ a = -y' = cot\ b = \frac{x-(k-y)}{y-x}$$

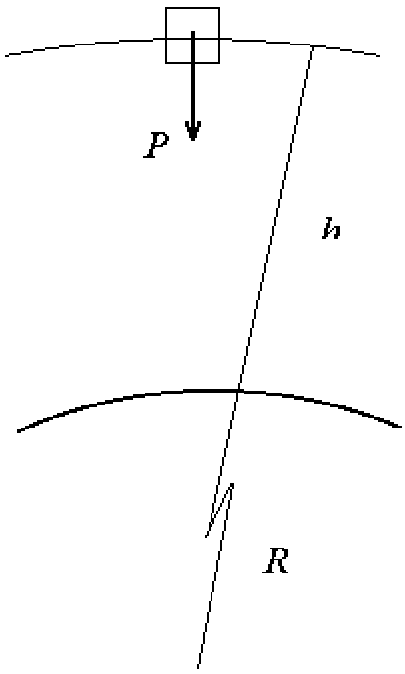
$$\boxed{\begin{array}{l} y' = \dfrac{x+y-k}{x-y} \\ y(0) = k \end{array}}$$

Cada Míssel segue uma trajetória similar, solução de *Equações Diferenciais. As* soluções são: ESPIRAS que se encontram no Centro do quadrado.
Questão: *Se um míssel não funcionar?*

Lançamento Espacial

h = altura do foguete
t = tempo
r = raio

R = raio do planeta
V = velocidadde lançamento



$P = mg$
$g \approx 1/r^2 \Rightarrow g = k/r^2$
$r = R + h$

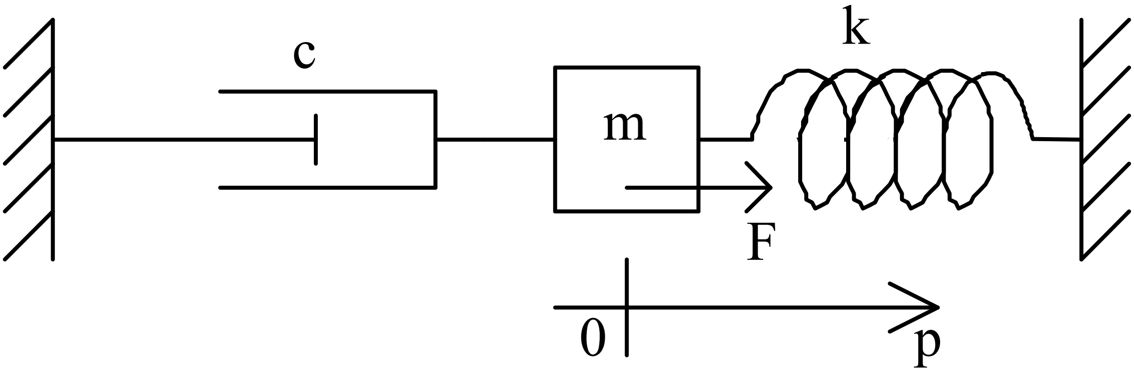
$F_R = m.a$
$- P = m.h''$

$- mg = m.h''$
$- k/r^2 = h'' = r''$

$k \Rightarrow$ depende do planeta
Terra: $g = k/R^2 = 9{,}8\ m/s^2$
$k = g.R^2$

$$\boxed{r'' = -k/r^2}$$
$$\boxed{r'(0) = V}$$
$$\boxed{r(0) = R}$$

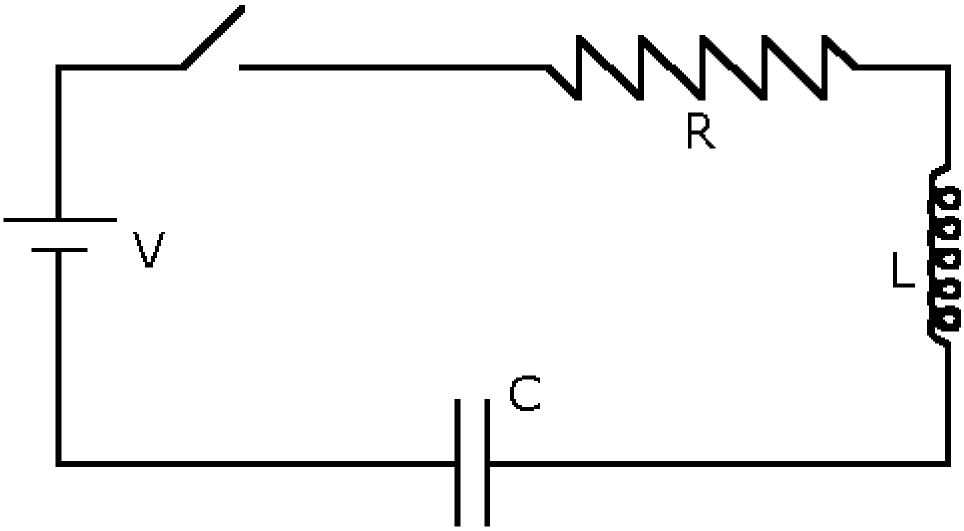
Sistema Mecânico Simples



$$Fr = Fm - Fa + F \qquad Fm \approx p \;\Rightarrow Fm = -k.p$$
$$Fa \approx p' \;\Rightarrow Fa = c.p'$$

$$Fr = m.p''$$
$$m.p'' = -k.p - c.p' + F \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} m.p'' + c.p' + k.p = F \\ p'(0) = Vo \\ p(0) = Po \quad \Rightarrow p(t) = ? \end{array} \right.$$

<u>Sistema Elétrico Simples</u>



$$V_R + V_L + V_C = V \qquad V_R = R.i$$
$$R.i + L.i' + q/C = V \qquad V_L = L.i'$$
$$R.q' + L.q'' + q/C = V \qquad V_C = q/C$$

$$\left\| \begin{array}{l} L.q'' + R.q' + q/C = V \\ q'(0) = I_0 \\ q(0) = Q_0 \qquad \Rightarrow q(t) = ? \end{array} \right.$$

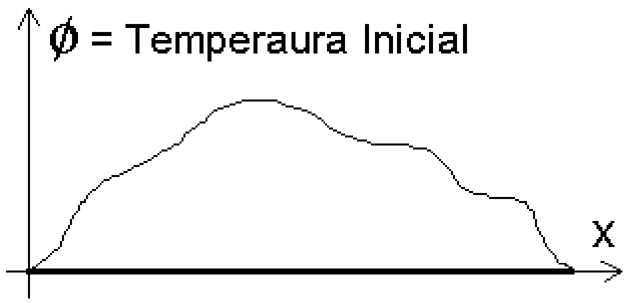
Comparação $\quad L\,.\,q'' + \quad R\,.\,q' + \quad (1/C).\,q = \quad V$

$$\updownarrow \qquad \updownarrow \qquad \updownarrow \qquad \updownarrow$$

$$m\,.\,p'' + \quad c\,.\,p' + \quad k\,.\,p = \quad F$$

q	(Carga)	$\Longleftrightarrow$	(posição)	p
i	(Corresnte)	$\Longleftrightarrow$	(Velocidade)	v
R	(Resistor)	$\Longleftrightarrow$	(Amortecedor)	c
L	(Indutor)	$\Longleftrightarrow$	(Massa)	m
C	(Capacitor)	$\Longleftrightarrow$	(Mola)	k
V	(Voltagem)	$\Longleftrightarrow$	(Força)	F

Calor na Barra



Fina
Homogênea

t = tempo x = posição
$T = T(t,x)$ = temperatura

no ponto x
em cada instante t

Em cada trecho [$x1,x2$], a quantidade de Calor é:

$Q = mcT1 + mcT2 + mcT3 + ... + mcTn$,

ou seja, com $m = \rho.s.dx$, $$Q = cs\rho\int_{x1}^{x2} T(t,x)\,dx$$

A taxa de variação deste calor, no tempo é $$Q' = cs\rho\int_{x1}^{x2} T'_t(t,x)\,dx$$

Em cada ponto x, a transferência de calor é $\Delta q = \dfrac{k.s.\Delta T.\Delta t}{\Delta x} \Rightarrow \dfrac{\Delta q}{\Delta t} = \dfrac{k.s.\Delta T}{\Delta x}$.

Isto implica que: $q' = k.s.T'x.$

No trecho [$x1,x2$], em cada instante t, temos que:

$Q' = q'(x2) - q'(x1) = k.s.T'x(t\,,\,x2) - k.s.T'x(t\,,\,x1)$

$$Q' = c.s.\rho\int_{x1}^{x2} T'_t(t,x)\,dx = k.s\int_{x1}^{x2} T''_{xx}(t,x)\,dx$$

Como o trecho [$x1\,,\,x2$] foi qualquer, temos que $c.s.\rho.T't(t\,,\,x) = k.s.T''xx(t\,,\,x).$

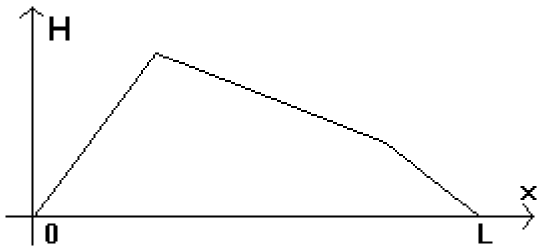
Com $\lambda^2 = k/(c.\rho),$ temos que

$$\left|\begin{array}{ll} T't = \lambda^2\, T''xx & \Rightarrow \text{Equação do Calor} \\ T(0,x) = \phi(x) & \Rightarrow \text{Temperatura inicial} \\ T(t,0) = 0 & \Rightarrow \text{Esquerda em gelo} \\ Tx(t,L) = 0 & \Rightarrow \text{Direita isolada} \end{array}\right.$$

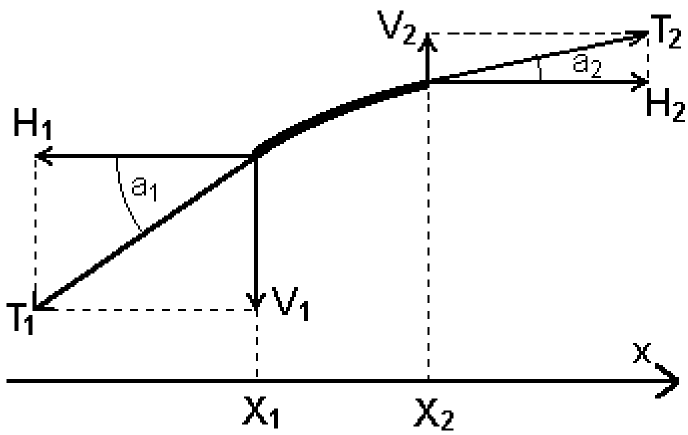
Alguns valores de λ^2:

Material	λ^2 (cm²/s)
Prata	*1,71*
Cobre	*1,14*
Alumínio	*0,86*
Ferro fundido	*0,12*
Granito	*0,011*
Tijolo	*0,0038*
Água	*0,00144*

Corda Vibrante



Homogênea
Deslocamento Vertival
Sem Gravidade



$H_1 = H_2 = T$
$H_1 = T_1.\cos a_1$
$H_2 = T_2.\cos a_2$
$V_1 = T_1.\text{sen } a_1$
$V_2 = T_2.\text{sen } a_2$
$\rho = \text{dens. linear}$

$$FR = m.a \quad \Rightarrow \quad V_2 - V_1 = \rho.\Delta x \,.\, F''tt \;\Rightarrow\; \frac{T_2.\text{sen } a_2 - T_1.\text{sen } a_1}{T} = \frac{\rho.\Delta x \,.\, F''tt}{T}$$

$$\frac{T_2.\text{sen } a_2}{T_2.\cos a_2} - \frac{T_1.\text{sen } a_1}{T_1.\cos a_1} = \frac{\rho.\Delta x \,.\, F''tt}{T}$$

$$\frac{tg\, a_2 - tg\, a_1}{\Delta x} = \frac{\rho.\, F''tt}{T}$$

$$\frac{F'x(x2) - F'x(x1)}{\Delta x} = \frac{\rho.\, F''tt}{T}$$

Para Δx pequeno $\Rightarrow$ $T.\, F''xx = \rho.\, F''tt$

Com $\lambda^2 = T/\rho$ $\Rightarrow$ $\boxed{F''tt = \lambda^2 F''xx}$

$F''tt = \lambda^2 F''xx$ $\Rightarrow$ Equ. da Onda
$F(0,x) = \phi(x)$ $\Rightarrow$ Posição inicial
$Ft(0,x) = V(x)$ $\Rightarrow$ Velocidade inicial
$F(t,0) = 0$ $\Rightarrow$ Extremidade esquerda
$F(t,L) = 0$ $\Rightarrow$ Extremidade direita