Transformadas de Laplace

Notas de aulas - material compilado no dia 6 de Maio de 2003

Computação, Engenharia Elétrica e Engenharia Civil

Prof. Ulysses Sodré

email: <ulysses@sercomtel.com.br>
email: <ulysses@matematica.uel.br>
Material compilado no dia 6 de Maio de 2003.

Para conhecer centenas de aplicações da Matemática, visite a Home Page:

`http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/`

Filho meu, se aceitares as minhas palavras, e entesourares contigo os meus mandamentos, para fazeres atento à sabedoria o teu ouvido, e para inclinares o teu coração ao entendimento; sim, se clamares por discernimento, e por entendimento alçares a tua voz; se o buscares como a prata e o procurares como a tesouros escondidos; então entenderás o temor do Senhor, e acharás o conhecimento de Deus. Porque o Senhor dá a sabedoria; da sua boca procedem o conhecimento e o entendimento; ele reserva a verdadeira sabedoria para os retos; e escudo para os que caminham em integridade, guardando-lhes as veredas da justiça, e preservando o caminho dos seus santos. Então entenderás a retidão, a justiça, a eqüidade, e todas as boas veredas. [PROVÉRBIOS 2:1-9, Bíblia Sagrada.]

Conteúdo

1 Introdução às transformadas de Laplace

Oliver Heaviside, quando estudava processos simples para obter soluções de Equações Diferenciais, vislumbrou um método de Cálculo Operacional que leva ao conceito matemático da Transformada de Laplace, que é um método simples para transformar um Problema com Valores Iniciais (PVI)[1], em uma equação algébrica, de modo a obter uma solução deste PVI de uma forma indireta, sem o cálculo de integrais e derivadas para obter a solução geral da Equação Diferencial. Pela utilidade deste método em Matemática, na Computação, nas Engenharias, na Física e outras ciências aplicadas, o método representa algo importante neste contexto. As transformadas de Laplace são muito usadas em diversas situações, porém, aqui trataremos de suas aplicações na resolução de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares.

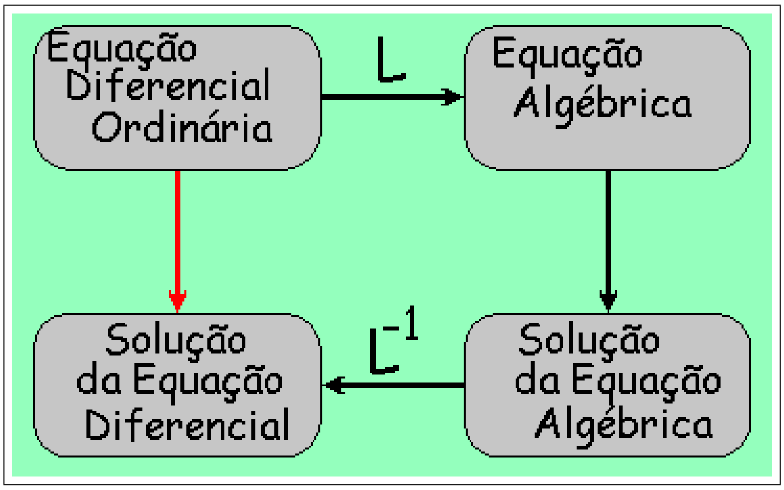

Figura 1: Solução de Equação Diferencial com Transformadas de Laplace

2 Definição de transformada de Laplace

Se $f = f(t)$ é uma função real ou complexa, definida para todo $t \geq 0$ e o parâmetro z é um número complexo da forma $z = s + iv$ de modo que para cada para $s > 0$, ocorre a convergência da integral imprópria

[1]PVI: Problema com Valores Iniciais formado por uma equação diferencial e condições iniciais.

$$F(z) = \int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt = \lim_{M\to\infty}\left[\int_0^M f(t)e^{-zt}dt\right]$$

então a função $F = F(z)$ definida pela integral acima, recebe o nome de transformada de Laplace da função $f = f(t)$.
Se o parâmetro z é um número real, isto é, a parte imaginária $v = 0$, usamos $z = s > 0$ e a definição fica simplesmente na forma

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

A transformada de Laplace depende de s, é representada por uma letra maiúscula $F = F(s)$, enquanto que a função original que sofreu a transformação depende de t é representada por uma letra minúscula $f = f(t)$. Para representar a transformada de Laplace da função f, é comum usar a notação

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$

Exemplo: A função degrau unitário é muito importante neste contexto e é definida por

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

Para a função degrau unitário e considerando $s > 0$, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u(t)] &= \int_0^\infty u(t)e^{-st}dt = \lim_{M\to\infty}\int_0^M e^{-st}dt \\ &= \lim_{M\to\infty}\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^M = \lim_{M\to\infty}\left[\frac{e^{-sM}}{-s} - \frac{1}{-s}\right] = \frac{1}{s} \end{aligned}$$

Identidade de Euler: Para todo número complexo α, vale a relação:

$$e^{i\alpha} \equiv \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$$

A partir desta identidade, podemos escrever

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{2}[e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}] \qquad \text{e} \qquad \sin(\alpha) = \frac{1}{2i}[e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}]$$

Exercício: Demonstrar que para

1. $s > 0$:
$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}, \qquad \mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2} \quad e \quad \mathcal{L}[t^2] = \frac{2}{s^3}$$
2. $s, a \in \mathbb{R}$ com $s > a$:
$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$$
3. $z, \alpha \in \mathbb{C}$ com Re$(z-\alpha) > 0$:
$$\mathcal{L}[e^{\alpha t}] = \frac{1}{z-\alpha}$$
4. Re$(z) > 0$:
$$\mathcal{L}[\cos(kt)] = \frac{z}{z^2+k^2}, \qquad \mathcal{L}[\sin(kt)] = \frac{k}{z^2+k^2}$$

Exercícios: Calcular as transformadas de Laplace das funções reais

1. $f(t) = \cosh(kt) = \frac{1}{2}[e^{kt} + e^{-kt}]$
2. $f(t) = \sinh(kt) = \frac{1}{2}[e^{kt} - e^{-kt}]$
3. $f(t) = t\ e^{-at}$
4. $f(t) = e^{at}\ \cos(bt)$

3 Função de ordem (tipo) exponencial

Uma função $f = f(t)$ é de ordem (tipo) exponencial α sobre $[0, \infty)$, se existem constantes $M > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que para todo $t > 0$ se tem:

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$$

o que é equivalente a

$$\lim_{t\to\infty} |e^{-\alpha t} f(t)| = 0$$

Exemplos:

1. $f(t) = t^2$ é de ordem exponencial pois $|f(t)| \leq 2e^t$.
2. $f(t) = t^2\cos(at)$ é de ordem exponencial pois $|f(t)| \leq 2e^{(1+a)t}$.
3. $f(t) = \exp(t^{3/2})$ **não** é de ordem exponencial.
4. $f(t) = t^n e^{at}\cos(bt)$ é de ordem exponencial
5. $g(t) = t^n e^{at}\sin(bt)$ é de ordem exponencial

4 Existência da Transformada de Laplace

Se $f = f(t)$ é seccionalmente contínua[2] para todo intervalo finito de $[0,\infty)$, e além disso $f = f(t)$ é de tipo exponencial de ordem α quando $t \to \infty$, então a transformada de Laplace $F = F(s)$, definida para $s > \alpha$ por:

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

existe e converge absolutamente.

A partir deste ponto, assumiremos que todas as funções $f = f(t)$ serão seccionalmente contínuas em todos os intervalos finitos de $[0,\infty)$ e que todas serão de ordem exponencial quando $t \to \infty$.

Para este tipo de função $f = f(t)$ podemos obter a transformada de Laplace $F = F(s)$, assim, dada uma função $G = G(s)$ poderemos questionar se existe uma função $g = g(t)$ tal que $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$?

[2]Contínua por pedaços = Contínua por partes.

Se existir esta função, ela será a transformada inversa de Laplace de $G = G(s)$ e esta inversa será denotada por

$$\mathcal{L}^{-1}[G(s)] = g(t)$$

5 Pares de Transformadas de Laplace

Na realidade, duas transformadas inversas de Laplace para a mesma função $F = F(s)$ são iguais, a menos de uma constante, mas aqui não levaremos isto em consideração tendo em vista que estamos procurando soluções particulares para equações diferenciais ordinárias lineares.

Assumindo que as transformadas de Laplace direta e inversa são inversas uma da outra, isto é: $\mathcal{L} \circ \mathcal{L}^{-1} = I_d = \mathcal{L}^{-1} \circ \mathcal{L}$, usaremos a notação com duas setas em sentidos opostos e o par de funções (f, F) na forma

$$f(t) \rightleftarrows F(s)$$

para indicar que $F = F(s)$ é a Transformada de Laplace de $f = f(t)$ e que $f = f(t)$ é a transformada inversa de Laplace de $F = F(s)$.

Exemplos: Dois importantes pares de transformadas são

$$\begin{array}{rcll} u(t) & \rightleftarrows & \dfrac{1}{s} & \quad (s > 0) \\ e^{at} & \rightleftarrows & \dfrac{1}{s-a} & \quad (s > a) \end{array}$$

6 Propriedades lineares das Transformadas de Laplace

A Transformada de Laplace é uma transformação linear, isto é:

$$\mathcal{L}[f + g] = \mathcal{L}[f] + \mathcal{L}[g] \qquad \text{e} \qquad \mathcal{L}[kf] = k\,\mathcal{L}[f]$$

Exemplo: Pode-se demonstrar que $\mathcal{L}[a+bt+ct^2] = aL[1]+bL[t]+cL[t^2]$.

Exercício: Calcular as transformadas de Laplace das funções reais:

$$f(t) = 1 + t + t^2 \qquad \text{e} \qquad g(t) = \sin(t) + \cos(t)$$

A Transformada inversa de Laplace é uma transformação linear, i.e.:

$$\mathcal{L}^{-1}[F+G] = \mathcal{L}^{-1}[F] + \mathcal{L}^{-1}[G] \qquad \text{e} \qquad \mathcal{L}^{-1}[kF] = k\,\mathcal{L}^{-1}[F]$$

Exemplo: Pode-se mostrar que

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{8}{s} - \frac{16}{s^2}] = 8\,\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s}] - 16\,\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^2}]$$

Exercícios: Calcular as transformadas inversas de Laplace de:

$$F(s) = \frac{3}{s-a} + \frac{5}{s-b} \qquad \text{e} \qquad G(s) = \frac{2s+5}{s^2-25}$$

Embora sejam necessárias algumas propriedades para facilitar o cálculo da transformada inversa de Laplace, um modo prático para obter transformadas inversas de Laplace é através de tabelas.

7 Tabela de algumas transformadas de Laplace

N	função	$\mathcal{L}[f]$	N	função	$\mathcal{L}[f]$	Condição
01	$u(t) \equiv 1$	$1/s$	02	t	$1/s^2$	$s > 0$
03	t^2	$2/s^3$	04	t^n	$n!/s^{n+1}$	$s > 0$
05	$e^{at}, a \in \mathbb{R}$	$\dfrac{1}{s-a}$	06	$e^{at}, a \in \mathbb{C}$	$\dfrac{1}{z-a}$	$\text{Re}(z-a) > 0$
07	$\cos(at)$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$	08	$\sin(at)$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$	$s > 0$
09	$e^{at}\cos(bt)$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$	10	$e^{at}\sin(bt)$	$\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}$	$s > a$
11	$\cosh(at)$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$	12	$\sinh(at)$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$	$s > a$
13	$t\cos(at)$	$\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$	14	$t\sin(at)$	$\dfrac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	$s > 0$

8 Translação na Transformada de Laplace

Se a Transformada de Laplace de $f = f(t)$ é dada por

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

então

$$\mathcal{L}[e^{bt}f(t)] = F(s-b)$$

Demonstração:

$$\mathcal{L}[e^{bt}f(t)] = \int_0^\infty [e^{bt}f(t)]e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-(s-b)t}f(t)dt$$

Substituindo $s - b = \sigma$, seguirá que

$$\mathcal{L}[e^{bt}f(t)] = \int_0^\infty e^{-\sigma t}f(t)dt = F(\sigma) = F(s-b)$$

Exercício: Seja a função $f(t) = u(t)\cos(t)$. Obter a transformada de Laplace da translação de f deslocada b unidades para a direita.

9 Escala (homotetia) na Transformada de Laplace

Se a Transformada de Laplace de $f = f(t)$ é dada por

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

e $\lambda > 0$, então

$$\mathcal{L}[f(\lambda t)] = \frac{1}{\lambda}F(\frac{s}{\lambda})$$

Demonstração:

$$\mathcal{L}[f(\lambda t)] = \int_0^\infty [f(\lambda t)]e^{-st}dt$$

Substituindo $\lambda t = u$ e depois substituindo $\sigma = \frac{s}{\lambda}$ poderemos escrever

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f(\lambda t)] &= \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty f(u)e^{-\frac{su}{\lambda}}du && (1)\\
&= \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty f(u)e^{-\sigma u}du && (2)\\
&= F(\sigma) && (3)\\
&= \frac{1}{\lambda}F(\frac{s}{\lambda}) && (4)
\end{aligned}$$

Exercício: Obter a transformada de Laplace da função $f(t) = \cos(12t)$ e determinar a conexão entre a transformada obtida e a transformada de Laplace de $f(t) = \cos(t)$.

10 Transformadas de Laplace de derivadas de funções

Uma propriedade muito útil na resolução de um PVI é

$$\mathcal{L}[y'] = s\ \mathcal{L}[y] - y(0)$$

Demonstração:

$$\mathcal{L}[y'] = \int_0^\infty y'(t)e^{-st}dt = \lim_{M\to\infty} \int_0^M y'(t)e^{-st}dt$$

Usando o método de integração por partes com $u = e^{-st}$ e $dv = y'(t)dt$, poderemos escrever

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[y'] &= \mathcal{L}[y'] = \lim_{M\to\infty} \left[y(t)e^{-st}\right]_0^M - \int_0^M y(t)(-s)e^{-st}dt \\
&= \lim_{M\to\infty} \left[y(M)e^{-sM} - y(0)\right] + s\int_0^M y(t)e^{-st}dt \\
&= \lim_{M\to\infty} \left[y(M)e^{-sM}\right] - y(0) + s\int_0^\infty y(t)e^{-st}dt \\
&= 0 - y(0) + s\int_0^\infty y(t)e^{-st}dt \\
&= s\ Y(s) - y(0)
\end{aligned}$$

sendo que $\lim_{M\to\infty}[y(M)e^{-sM}] = 0$ pois a função $y = y(t)$ é de ordem exponencial quando $t \to \infty$, assim

$$\mathcal{L}[y'] = s\ Y(s) - y(0)$$

Exercício: Se $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$, demonstrar que

$$\mathcal{L}[y''] = s^2\ Y(s) - s\ y(0) - y'(0)$$

e que em geral

$$\mathcal{L}[y^{(n)}] = s^n Y(s) - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}y'(0) - s^{n-3}y''(0) - ... - y^{(n-1)}(0)$$

11 Derivadas de Transformadas de Laplace

Se tomarmos a Transformada de Laplace:

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

e derivarmos ambos os membros desta igualdade em relação à variável s, obteremos:

$$\frac{dF}{ds} = \int_0^\infty (-t)f(t)e^{-st}dt$$

que também pode ser escrito como

$$\frac{dF}{ds} = \mathcal{L}[(-t).f(t)]$$

Tomando as derivadas sucessivas de $F = F(s)$, teremos a regra geral

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

12 Resolução de EDO Linear com Transformadas de Laplace

Exemplo: Para obter a solução do PVI

$$y' + y = e^{-t}, \qquad y(0) = 5$$

aplicamos a Transformada de Laplace a esta EDO Linear para obter:

$$\mathcal{L}[y' + y] = \mathcal{L}[e^{-t}]$$

Pela fórmula 05 da tabela da seção 7 e pela linearidade da transformada de Laplace, segue que

$$\mathcal{L}[y'] + \mathcal{L}[y] = \frac{1}{s+1}$$

Usando a fórmula da transformada da derivada, obtemos

$$sY(s) - y(0) + Y(s) = \frac{1}{s+1}$$

que podemos reescrever como

$$sY(s) - 5 + Y(s) = \frac{1}{s+1}$$

Extraindo o valor de $Y(s)$, obtemos

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2} + 5\frac{1}{s+1}$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace a esta equação e observando na tabela que

$$\mathcal{L}[t\ e^{-t}] = \frac{1}{(s+1)^2} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{L}[e^{-t}] = \frac{1}{s+1}$$

obtemos a solução do PVI

$$y(t) = te^{-t} + 5e^{-t} = (t+5)e^{-t}$$

Exemplo: Para obter a solução do PVI

$$y'' - 2y' - 3y = 6e^{t}, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 3$$

aplicamos a Transformada de Laplace a esta equação, para obter

$$\mathcal{L}[y'' - 2y' - 3y] = L[6e^t]$$

Pela linearidade, temos

$$\mathcal{L}[y''] - 2\mathcal{L}[y'] - 3\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[6e^t]$$

que pode ser escrito como

$$[s^2Y(s) - s - 3] - 2[sY(s) - 1] - 3Y(s) = \frac{6}{s-1}$$

Extraindo o valor $Y(s)$, obtemos

$$Y(s) = \frac{6}{(s-1)(s+1)(s-3)} + \frac{1}{(s+1)(s-3)}$$

Como esta última função pode ser escrita na forma:

$$Y(s) = -\frac{3}{2}\frac{1}{s-1} + \frac{3}{4}\frac{1}{s+1} + \frac{7}{4}\frac{1}{s-3}$$

então, aplicando as transformadas inversas de Laplace através do uso das tabelas, obtemos a solução do PVI:

$$y(t) = -\frac{3}{2}e^t + \frac{3}{4}e^{-t} + \frac{7}{4}e^{3t}$$

13 Convolução de funções

Sejam $f = f(t)$ e $g = g(t)$ funções integráveis para as quais o produto destas funções também é uma função integrável. Definimos a convolução (ou produto de convolução) de f e g, denotada por $f * g$, como a função

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)du$$

Com a mudança de variáveis $v = t - u$, teremos que $0 \leq v \leq t$ e a integral acima poderá ser escrita como

$$(f * g)(t) = \int_0^t g(t-v)f(v)dv = (g * f)(t)$$

significando que a convolução é comutativa:

$$f * g = g * f$$

Em cursos mais avançados, podemos estudar outras propriedades da convolução de funções. Por exemplo, quando temos uma função f com uma propriedade **fraca** relacionada com a suavidade e outra função g com propriedade **forte** relacionada com a suavidade, então a convolução $f * g$ é uma outra função com propriedades **melhores** que as propriedades de f e g.

Para a convolução de funções valem as seguintes propriedades:

1. Comutatividade: $f * g = g * f$
2. Associatividade: $f * (g * h) = (f * g) * h$
3. Distributividade: $f * (g + h) = f * g + f * h$
4. Nulidade: $f * 0 = 0$
5. Identidade: $f * \delta = f$ onde δ é a distribuição delta de Dirac.

Exercício: Calcular cada convolução indicada

1. $u_2(t) = (u * u)(t)$ onde $u = u(t)$ é a função degrau unitário.
2. $u_n(t) = (u * u * ... * u)(t)$ (n vezes).
3. $f * g$ sendo $f(t) = e^{at}$ e $g(t) = e^{bt}$.
4. $f * g$ sendo $f(t) = e^{at}$ e $u = u(t)$.

14 Convolução e Transformadas de Laplace

O produto das transformadas de Laplace **não** é igual à transformada de Laplace do produto de funções, mas se tomarmos $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ e $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$, então poderemos escrever

$$\mathcal{L}[f * g] = F(s)\ G(s)$$

Em particular, se $g(t) = u(t)$, então $G(s) = 1/s$ para $s > 0$, teremos

$$\mathcal{L}[f * u] = \frac{F(s)}{s}$$

Como $u(w) = 1$ para $w > 0$, segue que

$$\mathcal{L}[f*u] = \mathcal{L}\left[\int_0^t f(t-w)u(w)dw\right] = \mathcal{L}\left[\int_0^t f(t-w)dw\right] = \mathcal{L}\left[\int_0^t f(w)dw\right]$$

então

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(w)dw\right] = \frac{F(s)}{s}$$

Tomando as transformadas de $f = f(t)$, $g(t) = h(t) = u(t)$, respectivamente dadas por $F = F(s)$ e $G(s) = H(s) = 1/s$ ($s > 0$), teremos

$$\frac{F(s)}{s^2} = \mathcal{L}\left[\int_0^t \left(\int_0^w f(v)dv\right) dw\right]$$

Exercício: Usando o Princípio da Indução Finita (PIF), mostre que

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^n}{n!}\right] = \frac{1}{s^{n+1}}, \qquad \mathcal{L}\left[e^{at}\frac{t^n}{n!}\right] = \frac{1}{(s-a)^{n+1}}, \qquad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)^{n+1}}\right] = e^{at}\ \frac{t^n}{n!}$$

15 Tabela de propriedades das Transformadas de Laplace

Tn	Propriedades da Transformada	In	Propriedades da Inversa
$T1$	$\mathcal{L}[f+g]=\mathcal{L}[f]+\mathcal{L}[g]$	$I1$	$\mathcal{L}^{-1}[F+G]=\mathcal{L}^{-1}[F]+\mathcal{L}^{-1}[G]$
$T2$	$\mathcal{L}[kf]=k\mathcal{L}[f]$	$I2$	$\mathcal{L}^{-1}[kF]=k\mathcal{L}^{-1}[F]$
$T3$	$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)]=F(s+a)$	$I3$	$\mathcal{L}^{-1}[F(s+a)]=e^{-at}f(t)$
$T4$	$\mathcal{L}[f*g]=F(s).G(s)$	$I4$	$\mathcal{L}^{-1}[F(s).G(s)]=f*g$
$T5$	$\mathcal{L}[(-t)f(t)]=F'(s)$	$I5$	$\mathcal{L}^{-1}[F'(s)]=(-t)f(t)$
$T6$	$\mathcal{L}[(-t)^n\ f(t)]=F^{(n)}(s)$	$I6$	$\mathcal{L}^{-1}[F^{(n)}(s)]=(-t)^n\ f(t)$
$T7$	$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(w)dw\right]=\dfrac{F(s)}{s}$	$I7$	$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{F(s)}{s}\right]=\int_0^t f(w)dw$

16 O Método das frações parciais através de exemplos

O Método das frações parciais é utilizado para decompor uma função racional

$$f(s)=\frac{p(s)}{q(s)}$$

que é a divisão de dois polinômios $p=p(s)$ e $q=q(s)$, ambos na variável s, para obter frações mais simples, com o objetivo de facilitar processos de integração ou obter as transformadas inversas de Laplace.

Para realizar tal tarefa, necessitamos de três hipóteses essenciais sobre os polinômios $p=p(s)$ e $q=q(s)$:

1. $p=p(s)$ e $q=q(s)$ só possuem coeficientes reais;
2. $p=p(s)$ e $q=q(s)$ não possuem fatores em comum;
3. O grau de $p=p(s)$ é sempre menor que o grau de $q=q(s)$.

Apresentaremos alguns exemplos e o mínimo necessário de teoria relacionado com cada método. Um polinômio de grau n na variável s

será representado por $p_n = p_n(s)$, enquanto $p = p(s)$ será um polinômio conhecido, sendo o seu grau indicado por gr(p). Dentre os casos importantes, quatro serão analisados:

16.1 Denominador tem m fatores lineares distintos

Aqui $n = \text{gr}(p_n)$ e cada um dos m fatores "lineares" possuirá a forma $(s - a_k)$ $(k = 1, 2, ..., m)$, sendo $m > n$.

Exemplo: Para decompor a função racional

$$f(s) = \frac{2s^2 - s + 1}{(s-1)(s-2)(s-3)}$$

em frações parciais, devemos escrever

$$\frac{2s^2 - s + 1}{(s-1)(s-2)(s-3)} \equiv \frac{C_1}{s-1} + \frac{C_2}{s-2} + \frac{C_3}{s-3}$$

multiplicar todos os termos desta identidade por $(s-1)(s-2)(s-3)$ para obter uma outra identidade sem frações:

$$2s^2 - s + 1 \equiv C_1(s-2)(s-3) + C_2(s-1)(s-3) + C_3(s-1)(s-2)$$

Substituir nesta última identidade, respectivamente, os valores $s = 1$, $s = 2$ e $s = 3$, para obter:

$$\begin{aligned} 2 &= C_1(1-2)(1-3) \\ 7 &= C_2(2-1)(2-3) \\ 16 &= C_3(3-1)(3-2) \end{aligned}$$

Assim $C_1 = 1$, $C_2 = -7$ e $C_3 = 8$, logo

$$\frac{2s^2 - s + 1}{(s-1)(s-2)(s-3)} = \frac{1}{s-1} - \frac{7}{s-2} + \frac{8}{s-3}$$

Método geral: Para decompor a função racional

$$f(s) = \frac{p_n(s)}{(s-a_1)(s-a_2)...(s-a_m)}$$

em m fatores lineares da forma $(s-a_1)$, $(s-a_2)$, ..., $(s-a_m)$, sendo $m > n$, escreveremos a identidade

$$\frac{p_n(s)}{(s-a_1)(s-a_2)...(s-a_m)} \equiv \frac{C_1}{s-a_1} + \frac{C_2}{s-a_2} + ... + \frac{C_m}{s-a_m}$$

Multiplicamos agora todos os termos desta identidade pelo produto de todos os m fatores lineares:

$$\prod_{j=1}^{m}(s-a_j) = (s-a_1)(s-a_2)...(s-a_m)$$

para obter uma outra identidade sem frações:

$$\begin{aligned}
p_n(s) &\equiv C_1(s-a_2)(s-a_3)...(s-a_m)\\
&+ C_2(s-a_1)(s-a_3)...(s-a_m)\\
&+ C_3(s-a_1)(s-a_2)(s-a_4)...(s-a_m)\\
&+ ...\\
&+ C_k(s-a_1)(s-a_2)...(s-a_{k-1})\underline{(s-a_k)}(s-a_{k+1})...(s-a_m)\\
&+ ...\\
&+ C_n(s-a_1)(s-a_2)...(s-a_{m-1})
\end{aligned}$$

Para obter cada constante C_k, basta substituir $s = a_k$ nesta última identidade, para obter a igualdade:

$$p_n(a_k) = C_k \prod_{j=1,(j\neq k)}^{m} (a_k - a_j)$$

Observamos que a expressão da direita contém o produto de todos os fatores da forma $(a_k - a_j)$ com $j = 1, 2, ..., m$ exceto o que tem índice $j = k$. Dessa forma, para cada $k = 1, 2, ..., m$ temos que

$$C_k = \frac{p_n(a_k)}{\prod_{j=1,(j\neq k)}^{m}(a_k - a_j)}$$

16.2 Divisão de polinômio p_n por fator linear repetido

Consideremos uma situação em que m é o número de vezes que ocorre a repetição de um fator linear $(s - a)$ sendo $m > n$.

Exemplo: Para decompor a função racional

$$f(s) = \frac{2s^2 - s + 1}{(s-2)^3}$$

em frações parciais, escreveremos

$$\frac{2s^2 - s + 1}{(s-2)^3} \equiv \frac{C_1}{s-2} + \frac{C_2}{(s-2)^2} + \frac{C_3}{(s-2)^3}$$

Multiplicamos os termos da identidade por $(s - 2)^3$ para obter

$$2s^2 - s + 1 \equiv C_1(s-2)^2 + C_2(s-2) + C_3$$

Como necessitamos de três identidades, ainda faltam duas, as quais podem ser obtidas através das duas primeiras derivadas desta última:

$$4s - 1 \equiv 2C_1(s-2) + C_2$$
$$4 = 2C_1$$

Da última relação, obtemos $C_1 = 2$. Na penúltima, tomamos $s = 2$ para obter $C_2 = 7$ e na primeira, obtemos $C_3 = 7$. Concluímos que

$$\frac{2s^2 - s + 1}{(s-2)^3} \equiv \frac{2}{s-2} + \frac{7}{(s-2)^2} + \frac{7}{(s-2)^3}$$

Método: Para decompor a função racional

$$f(s) = \frac{p_n(s)}{(s-a)^m}$$

em m frações parciais, sendo $m > n$, escreveremos

$$\frac{p_n(s)}{(s-a)^m} \equiv \frac{C_1}{s-a} + \frac{C_2}{(s-a)^2} + ... + \frac{C_m}{(s-a)^m}$$

Multiplicamos todos os termos da identidade por $(s-a)^m$ para obter

$$p_n(s) \equiv C_1(s-a)^{m-1} + C_2(s-a)^m - 2 + ... + C_m$$

Como necessitamos de m equações, devemos calcular as $m-1$ primeiras derivadas sucessivas desta identidade e depois substituir $s = a$ em todas as m identidades para obter os coeficientes C_k para cada $k = 1, 2, ..., m$.

16.3 Divisão de polinômio p_n por um fator linear e outro repetido

Seja m é o número de vezes que ocorre a repetição do fator linear $(s-a)$ com $m > n$ e vamos considerar que ocorre apenas um fator linear $(s-b)$ no denominador da expressão racional.

Exemplo: Para decompor a função racional

$$f(s) = \frac{2s^2 - s + 1}{(s-2)^3(s-1)}$$

em frações parciais, escreveremos

$$\frac{2s^2 - s + 1}{(s-2)^3(s-1)} \equiv \frac{C_1}{s-2} + \frac{C_2}{(s-2)^2} + \frac{C_3}{(s-2)^3} + \frac{C_4}{s-1}$$

Multiplicando os termos da identidade por $(s-2)^3(s-1)$, obteremos

$$2s^2-s+1 \equiv C_1(s-1)(s-2)^2+C_2(s-1)(s-2)+C_3(s-1)+C_4(s-2)^3$$

Como o fator linear $(s-1)$ aparece somente uma vez, basta tomar $s=1$ nesta identidade para obter $C_4=-2$. Para $s=2$ obtemos $C_3=7$, mas ainda necessitamos de duas outras identidades. Basta realizar as duas primeiras derivadas da identidade acima em relação à variável s para obter:

$$4s-1 \equiv C_1[2(s-1)(s-2)+(s-2)^2]+C_2[(s-1)+(s-2)]+C_3+C_4(s-2)^2$$

e

$$4 \equiv C_1[2(s-1)+4(s-2)]+2C_2+6C_4(s-2)$$

e depois substituir $s=2$ em ambas. Não fizemos qualquer esforço para reunir os termos semelhantes pois esta forma é altamente simplificadora, pois para $s=2$, segue que $C_2=0$ e $C_1=2$, logo

$$\frac{2s^2-s+1}{(s-2)^3(s-1)} \equiv \frac{2}{s-2}+\frac{7}{(s-2)^3}-\frac{2}{s-1}$$

Método geral: Para decompor a função racional

$$f(s)=\frac{p_n(s)}{(s-a)^m(s-b)}$$

em frações parciais, escreveremos

$$\frac{p_n(s)}{(s-a)^m(s-b)} \equiv \frac{C_1}{s-a}+\frac{C_2}{(s-a)^2}+...+\frac{C_m}{(s-a)^m}+\frac{C_0}{s-b}$$

Multiplicando os termos da identidade por $(s-a)^m(s-b)$, obteremos

$$p_n(s) \equiv (s-b)[C_1(s-a)^{m-1}+C_2(s-a)^{m-2}+...+C_m]+C_0(s-a)^m$$

Como o fator linear $(s-b)$ aparece somente uma vez, basta tomar $s=b$ nesta identidade para obter C_0. Para $s=a$ obtemos C_m, mas ainda necessitamos de $m-1$ outras identidades. Basta realizar as $m-1$ primeiras derivadas sucessivas da identidade acima em relação à variável s para obter as outras constantes.

16.4 Divisão de polinômio p_n por fatores lineares repetidos

Seja q o número de vezes que ocorre a repetição do fator linear $(s-a)$ e r o número de vezes que ocorre a repetição do fator linear $(s-b)$, sendo $q+r>n$.

Exemplo: Para decompor a função racional

$$f(s)=\frac{2s^2-s+1}{(s-2)^3(s-1)^2}$$

em frações parciais, escreveremos

$$\frac{2s^2-s+1}{(s-2)^3(s-1)^2}\equiv\frac{C_1}{s-2}+\frac{C_2}{(s-2)^2}+\frac{C_3}{(s-2)^3}+\frac{C_4}{s-1}+\frac{C_5}{(s-1)^2}$$

Multiplicando os termos da identidade por $(s-2)^3(s-1)^2$, obteremos

$$\begin{aligned}2s^2-s+1 &\equiv (s-1)^2[C_1(s-2)^2+C_2(s-2)+C_3]\\ &\quad +(s-2)^3[C_4(s-1)+C_5]\end{aligned}$$

Como o fator linear $(s-1)$ aparece duas vezes, devemos ter duas identidades relacionadas com ele, assim devemos derivar esta identidade mais uma vez para obter a segunda identidade. Como o fator linear $(s-2)$ aparece três vezes, devemos ter três identidades relacionadas com este fator, assim, devemos realizar ainda as duas primeiras derivadas desta identidade para que tenhamos três identidades relacionadas com este outro fator. Substituindo $s=2$ e $s=1$ nas cinco identidades, obtemos as constantes.

Método geral: Podemos decompor a função racional

$$f(s) = \frac{p_n(s)}{(s-a)^q(s-b)^r}$$

em frações parciais, para escrever

$$\begin{aligned}\frac{p_n(s)}{(s-a)^q(s-b)^r} &\equiv \frac{C_1}{s-a} + \frac{C_2}{(s-a)^2} + ... + \frac{C_q}{(s-a)^q} \\ &+ \frac{D_1}{s-b} + \frac{D_2}{(s-b)^2} + ... + \frac{D_r}{(s-b)^r}\end{aligned}$$

Multiplicando os termos da identidade por $(s-a)^q(s-b)^r$, obteremos uma identidade sem frações:

$$\begin{aligned}p_n(s) &\equiv (s-b)^r[C_1(s-a)^{q-1} + C_2(s-a)^{q-2} + ... + C_q] \\ &+(s-a)^q[D_1(s-b)^{r-1} + D_2(s-b)^{r-2} + ... + D_r]\end{aligned}$$

Como o fator linear $s-a$ aparece q vezes na função racional, devemos ainda realizar as primeiras $q-1$ derivadas sucessivas desta identidade para ter ao final q identidades associadas ao fator $s-a$.

Como o fator linear $s-b$ aparece r vezes na função racional, devemos ainda realizar as primeiras $r-1$ derivadas sucessivas desta identidade para ter ao final r identidades associadas ao fator $s-b$.

Substituindo $s=a$ e $s=b$ nas $q+r$ identidades, obtemos as constantes C_j com $j=1,2,...,q$ e D_k com $k=1,2,...,r$.

17 Completando quadrados em uma função quadrática

Se uma função quadrática $q(s) = as^2 + bs + c$ não possui zeros (raízes) reais, e este fato ocorre quando o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, é vantajoso reescrever esta função como uma soma de quadrados. Para realizar isto, devemos por em evidência o valor a, que é o coeficiente do termo dominante:

$$q(s) = a[s^2 + \frac{b}{a}s + \frac{c}{a}]$$

Somamos e subtraímos o valor $(\frac{b}{2a})^2$ dentro das chaves, que corresponde ao quadrado da metade do coeficiente do termo em s:

$$q(s) = a[s^2 + \frac{b}{a}s + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a}]$$

para escrever

$$q(s) = a[(s + \frac{b}{a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}]$$

que representa a soma de dois quadrados, pois $4ac - b^2 > 0$.

Exemplo: Seja $q(s) = 2s^2 - s + 1$. Como $\Delta = -7$, pomos em evidência a constante 2 para obter

$$q(s) = 2[s^2 - \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}]$$

A metade do coeficiente do termo em s é $-\frac{1}{4}$ que elevado ao quadrado fornece $\frac{1}{16}$. Somando e subtraindo $\frac{1}{16}$, segue que

$$q(s) = 2[s^2 - \frac{1}{2}s + \frac{1}{16} - \frac{1}{16} + \frac{1}{2}]$$

ou seja

$$q(s) = 2[(s - \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{16}]$$

que é uma soma de quadrados multiplicada por uma constante

$$q(s) = 2\left[(s - \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{7}}{4})^2\right]$$

17.1 Divisão de $p(s) = ds + e$ por fator quadrático sem raízes reais

Seja a função $p(s) = ds+e$ dividida por um fator quadrático as^2+bs+c que não tem zeros reais, isto é

$$f(s) = \frac{ds + e}{as^2 + bs + c}$$

Uma forma útil de decompor esta função racional é usar o fato que o denominador pode ser escrito como uma soma de quadrados multiplicada por uma constante:

$$f(s) = \frac{ds + e}{a[(s + \frac{b}{a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}]}$$

Com a mudança de variável $v = s + \frac{b}{a}$, a função racional fica na forma

$$f(v) = \frac{d(v - \frac{b}{a}) + e}{a[v^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}]}$$

$$f(v) = \frac{d}{a}\left[\frac{v}{v^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}}\right] + \frac{ae - db}{a^2}\left[\frac{1}{v^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}}\right]$$

Voltando a usar a variável s, podemos escrever:

$$f(s) = \frac{d}{a}\left[\frac{s + \frac{b}{a}}{(s + \frac{b}{a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}}\right] + \frac{ae - db}{a^2}\left[\frac{1}{(s + \frac{b}{a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}}\right]$$

Exemplo: Seja a função racional

$$f(s) = \frac{s}{s^2 - 4s + 13}$$

Assim

$$f(s) = \frac{s}{s^2 - 4s + 4 + 9} = \frac{s - 2 + 2}{(s-2)^2 + 3^2}$$

que também pode ser escrito na conveniente forma

$$f(s) = \frac{s-2}{(s-2)^2 + 3^2} + \frac{2}{3}\,\frac{3}{(s-2)^2 + 3^2}$$

17.2 Divisão de p_n por fator quadrático sem raízes reais e outro linear

Exemplo: Seja a função racional

$$f(s) = \frac{2s+5}{(s^2 - 4s + 13)(s-3)}$$

Esta função pode ser reescrita na forma

$$f(s) = \frac{2(s-2+2)+5}{[(s-2)^2 + 3^2](s-3)} = \frac{2(s-2)+9}{[(s-2)^2 + 3^2](s-3)}$$

que pode ser decomposta como

$$\frac{2s+5}{(s^2 - 4s + 13)(s-3)} \equiv \frac{A(s-2)}{(s-2)^2 + 3^2} + \frac{B}{(s-2)^2 + 3^2} + \frac{C}{s-3}$$

Multiplicando os termos da identidade por $(s^2 - 4s + 13)(s-3)$, obteremos

$$2s + 5 \equiv A(s-2)(s-3) + B(s-3) + C[(s-2)^2 + 3^2]$$

Com $s = 3$ na identidade acima, obtemos $C = \frac{11}{10}$ e com $s = 2$ na mesma identidade, obtemos $B = \frac{9}{10}$.

Ainda falta obter a constante A. Derivaremos então a identidade acima em relação à variável s para obter

$$2 \equiv A[(s-2)+(s-3)] + B + 2C(s-2)$$

Com $s = 2$ nesta identidade adicional, obtemos $A = -20$.

18 Refinando a decomposição em frações parciais

18.1 O denominador tem um fator linear não repetido $(s-a)$

Neste caso, temos que $q(a) = 0$ e a decomposição fica na forma

$$\frac{p(s)}{q(s)} \equiv \frac{A}{s-a} + r(s)$$

Multiplicando os termos da identidade acima por $(s-a)$, obtemos:

$$\frac{(s-a)p(s)}{q(s)} \equiv A + (s-a)\, r(s)$$

Sabemos que $q(a) = 0$, assim, se definirmos

$$\varphi_1(s) = \frac{(s-a)p(s)}{q(s)} = \frac{p(s)}{\dfrac{q(s)-q(a)}{s-a}}$$

escreveremos

$$\varphi_1(s) \equiv A + (s-a)\, r(s)$$

Tomando agora o limite em ambos os membros desta identidade, quando $s \to a$, obtemos

$$A = \lim_{s\to a} \varphi_1(s) = \frac{\lim\limits_{s\to a} p(s)}{\lim\limits_{s\to a} \dfrac{q(s)-q(a)}{s-a}} = \frac{p(a)}{q'(a)}$$

Obtemos assim a constante A, e a transformada inversa de Laplace aplicada à identidade, nos dará:

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{p(s)}{q(s)}] = Ae^{at} + \mathcal{L}^{-1}[r(s)]$$

Exercício: Usando as transformadads de Laplace, mostrar que se

$$F(s) = \frac{7s-1}{(s-3)(s+2)(s-1)}$$

então $f(t) = 2e^{3t} - e^{-2t} - e^t$.

18.2 O denominador tem um fator linear repetido $(s-a)^m$

Neste caso:

$$\frac{p(s)}{q(s)} \equiv \frac{A_m}{(s-a)^m} + \frac{A_{m-1}}{(s-a)^{m-1}} + ... + \frac{A_1}{s-a} + r(s)$$

Multiplicando a identidade acima por $(s-a)^m$, obtemos

$$\frac{(s-a)^m p(s)}{q(s)} \equiv A_m + A_{m-1}(s-a)^1 + ... + A_1(s-a)^{m-1} + r(s)$$

É interessante definir

$$\varphi_m(s) = \frac{(s-a)^m p(s)}{q(s)}$$

O coeficiente A_m é dado por

$$A_m = \lim_{s\to a} \varphi_m(s)$$

e os coeficiente A_{m-1}, A_{m-2}, ..., são obtidos, respectivamente pelas relações obtidas pelos limites das derivadas sucessivas de φ multiplicadas por algumas constantes, isto é:

$$A_{m-1} = \frac{1}{1!} \lim_{s\to a} \frac{d\varphi_m(s)}{ds}, \quad A_{m-2} = \frac{1}{2!} \lim_{s\to a} \frac{d^2\varphi_m(s)}{ds^2}, \quad \ldots$$

Em geral, cada A_k ($k = 1, 2, ..., m$), pode ser obtido por

$$A_k = \frac{1}{(m-k)!} \lim_{s\to a} \frac{d^{m-k}\varphi_m(s)}{ds^{m-k}}$$

e a transformada inversa de Laplace nos dará:

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{p(s)}{q(s)}] = e^{at}\left[\frac{A_m t^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{A_{m-1}t^{m-2}}{(m-2)!} + ... + A_1\right] + \mathcal{L}^{-1}[r(s)]$$

Exercício: Obter a função $f = f(t)$ cuja transformada de Laplace é

$$F(s) = \frac{1}{(s-4).(s-3)^3}$$

Resposta: $f(t) = e^{3t}(-\frac{1}{2}t^2 - t - 1) + e^{4t}$.

Em momento algum nos preocupamos se o número a deveria ser real ou complexo. Se a é complexo, isto é, $a = c + di$, então podemos decompor a função racional em frações parciais de uma forma um pouco diferente, pois sabemos da Álgebra que se $a = c + di$ é um zero de $q = q(s)$, então o conjugado de a, dado por $\overline{a} = c - di$ também é um zero de $q = q(s)$, uma vez que os coeficientes do polinômio $q = q(s)$ são números reais. Temos assim, o terceiro caso.

18.3 O denominador tem fator linear complexo $(s-a)$ não repetido

Neste caso:

$$\frac{p(s)}{q(s)} \equiv \frac{A}{s-a} + r(s)$$

Aqui usaremos $a = c+di$ e multiplicaremos tanto o numerador como o denominador da fração do segundo membro da identidade pelo conjugado de $(s-a) = \overline{s-a}$, para obter

$$\frac{p(s)}{q(s)} \equiv A\frac{\overline{s-a}}{(s-a)\overline{s-a}} + r(s)$$

e esta última identidade pode ser escrita como

$$\frac{p(s)}{q(s)} = \frac{A(s-c)+B}{(s-c)^2+d^2} + r(s)$$

onde agora A e B são números reais, ou ainda na forma

$$\frac{p(s)}{q(s)} = A\frac{s-c}{(s-c)^2+d^2} + D\frac{d}{(s-c)^2+d^2} + r(s)$$

A transformada inversa de Laplace nos dá então

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{p(s)}{q(s)}] = Ae^{ct}\cos(dt) + De^{ct}\sin(dt) + \mathcal{L}^{-1}[r(s)]$$

18.4 O denominador possui um fator complexo $(s-a)^2$

Aqui, usaremos $a = c + di$ e escreveremos

$$\frac{p(s)}{q(s)} \equiv \frac{A}{(s-a)^2} + r(s)$$

Multiplicaremos tanto o numerador como o denominador da fração do segundo membro da identidade pelo conjugado de $\overline{(s-a)^2}$, para obter uma identidade da forma

$$\frac{p(s)}{q(s)} \equiv \frac{As+B}{[(s-c)^2+d^2]^2} + \frac{Cs+D}{(s-c)^2+d^2} + r(s)$$

onde agora A, B, C e D são números reais.

O restante segue de forma similar aos casos anteriores.

Exercício: Obter a função $f = f(t)$ tal que

$$F(s) = \frac{s^2+2}{(s^2+2s+5)^2}$$

Resposta:

$$f(t) = 2e^{-t} \left[\frac{t}{16}\cos(2t) + (-\frac{t}{4} + \frac{7}{32})\sin(2t)\right]$$

19 Resolução de uma equação integro-diferencial

Uma equação integro-diferencial é uma equação diferencial em que a função incógnita está sob o sinal de integração. Consideremos o PVI dado pela equação integro-diferencial

$$y' + 2y - 3\int_0^t y(u)du = 5(1+t), \qquad y(0) = 2$$

Aplicando a Transformada de Laplace a ambos os membros da igualdade desta equação, obtemos:

$$\mathcal{L}[y'] + 2\mathcal{L}[y] - 3\mathcal{L}\left[\int_0^t y(u)du\right] = 5\mathcal{L}[1+t]$$

assim

$$s\,Y(s) - 2 + 2Y(s) - 3\frac{Y(s)}{s} = \frac{5}{s} + \frac{5}{s^2}$$

Isolando o valor de $Y(s)$, obtemos

$$Y(s) = \frac{2 + \frac{5}{s} + \frac{5}{s^2}}{s^2 + 2s - 3} = \frac{2s^2 + 5s + 5}{s^2(s-1)(s+3)}$$

Usando frações parciais, podemos escrever

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{s+3}$$

Após obter as constantes A, B, C e D, podemos usar as transformadas inversas de Laplace para escrever

$$y(t) = -\frac{5}{3} + 3e^t + \frac{2}{3}e^{-3t}$$

Exercícios: Resolver as Equações integro-diferenciais:

1. $y' + \int_0^t y(u)du = 1, \qquad y(0) = 2$
2. $y' - y - 6\int_0^t y(u)du = 12e^{3t}, \qquad y(0) = -3$
3. $y + \int_0^t y(u)du = \sin(2t)$

20 Resolução de Sistemas de EDO lineares

Para resolver sistemas com duas equações diferenciais nas funções incógnitas $x = x(t)$ e $y = y(t)$, podemos aplicar a Transformada de Laplace a cada EDO de forma que $\mathcal{L}[x] = X(s)$ e $\mathcal{L}[y] = Y(s)$ e fazer com que o sistema recaia num sistema algébrico com duas equações nas duas incógnitas $X(s)$ e $Y(s)$. Veremos como isto funciona com um exemplo relativamente simples mas suficientemente amplo para mostrar a funcionalidade do método.

Exemplo: Para determinar a solução do PVI

$$\begin{aligned} x'(t) + x(t) + y'(t) - y(t) &= 2 \\ x''(t) + x'(t) - y'(t) &= \cos(t) \end{aligned}$$

sujeito às condições: $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$ e $y(0) = 1$, devemos usar as fórmulas que envolvem as transformadas de Laplace das derivadas de primeira e segunda ordem.

Como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x''(t)] &= s^2X(s) - s\,x(0) - x'(0) = s^2X(s) - x'(0) \\ \mathcal{L}[x'(t)] &= sX(s) - x(0) = sX(s) \\ \mathcal{L}[y'(t)] &= sY(s) - y(0) = sY(s) - 1 \\ \mathcal{L}[2] &= \frac{2}{s} \\ \mathcal{L}[\cos(t)] &= \frac{s}{s^2+1} \end{aligned}$$

podemos aplicar a transformada de Laplace às equações

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x'(t) + x(t) + y'(t) - y(t)] &= \mathcal{L}[2] \\ \mathcal{L}[x''(t) + x'(t) - y'(t)] &= \mathcal{L}[\cos(t)] \end{aligned}$$

para obter

$$\begin{aligned} (s+1)\;X(s) + (s-1)\;Y(s) &= 1 + \frac{2}{s} \\ (s^2+s)\;X(s) - s\;Y(s) &= 1 + \frac{s}{s^2+1} \end{aligned}$$

Este sistema de equações algébricas pode ser posto na forma matricial

$$\begin{pmatrix} s+1 & s-1 \\ s+1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{s+2}{s} \\ \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s^2+1} \end{pmatrix}$$

Resolvendo este sistema pela regra de Cramer, obtemos

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2+1} \\ Y(s) &= \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1} \end{aligned}$$

Com as transformadas inversas de Laplace destas funções, obtemos

$$\begin{aligned} x(t) &= t + \sin(t) \\ y(t) &= t + \cos(t) \end{aligned}$$

21 Resolução de Equações com coeficientes variáveis

Já mostramos antes que

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f(t)] = F'(s) = \mathcal{L}[(-t)\ f(t)]$$

e que em geral:

$$F^{(n)}(s) = \mathcal{L}[(-t)^n f(t)]$$

o que significa que a n-ésima derivada da transformada de Laplace de f em relação à variável s, é igual à transformada de Laplace da função $(-t)^n f(t)$, isto é:

$$\frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[(-t)^n f(t)]$$

Se, em particular, tomarmos $f(t) = y'(t)$, teremos:

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}[y'(t)] = \mathcal{L}[-t\ y'(t)]$$

que pode ser escrito na forma:

$$\mathcal{L}[t\ y'(t)] = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[y']$$

e como $\mathcal{L}[y'] = sY(s) - y(0)$, então

$$\mathcal{L}[t\ y'(t)] = -\frac{d}{ds}[sY(s) - y(0)] = -sY'(s) - Y(s)$$

Resumindo, temos para a primeira derivada:

$$\mathcal{L}[t\ y'(t)] = -s\ Y'(s) - Y(s)$$

Repetindo o processo para a função $f(t) = y''(t)$, temos:

$$\mathcal{L}[t\ y''(t)] = -s^2\ Y'(s) - 2s\ Y(s) + y(0)$$

Exemplo: Para resolver o Problema com Valor Inicial com uma EDO linear com coeficientes **variáveis**:

$$y'' + ty' - 2y = 7, \qquad y'(0) = 0, \qquad y(0) = 0$$

aplicaremos a transformada de Laplace a ambos os membros da igualdade para obter

$$\mathcal{L}[y'' + ty' - 2y] = \mathcal{L}[4]$$

Como

$$\mathcal{L}[y''(t)] = s^2\ Y(s) - s\ y(0) - y'(0) = s^2\ Y(s)$$

$$\mathcal{L}[t\ y'] = -s\ Y'(s) - Y(s)$$
$$\mathcal{L}[4] = \frac{4}{s}$$

então

$$Y'(s) + \frac{3-s^2}{s} Y(s) = -\frac{4}{s^2}$$

e resolvendo esta Equação Diferencial Ordinária Linear, teremos:

$$Y(s) = \frac{4}{s^3} + C\frac{1}{s^3}\exp(\frac{s^2}{2})$$

e obtendo a transformada inversa de Laplace desta função com $C = 0$, temos a solução:

$$y(t) = 2t^2$$

22 Transformada de Laplace de uma função periódica

Consideremos uma função periódica de período $p > 0$, isto é, uma função tal que $f(t+p) = f(t)$ para todo $t > 0$. Como a transformada de Laplace de f é dada por:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

então, decompondo esta integral em infinitas integrais realizadas sobre os sub-intervalos de comprimento p, obteremos

$$F(s) = (\int_0^p + \int_p^{2p} + \int_{2p}^{3p} + \int_{3p}^{4p} + ...)f(t)e^{-st}dt$$

que pode ser escrito em uma forma sintética

$$F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{kp}^{(k+1)p} f(t)e^{-st}dt$$

Em cada integral dada acima, temos que $kp \leq t \leq (k+1)p$. Realizando uma mudança de variável $t = v + kp$, teremos que $dt = dv$ e dessa forma a variável v estará no domínio $0 \leq v \leq p$.

$$F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{0}^{p} f(v + kp)\ e^{-s(v+kp)}dv$$

Como f é p-periódica, $f(v) = f(v + kp)$ para todo $v \geq 0$ e assim

$$F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{0}^{p} f(v)\ e^{-sv}e^{-skp}dv$$

que também pode ser posto na forma

$$F(s) = \left[\sum_{k=0}^{\infty} e^{-skp}\right] \int_{0}^{p} f(v)e^{-sv}dv$$

e como a expressão dentro dos colchetes é uma série geométrica de razão $e^{-skp} < 1$, segue que:

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-sp}} \int_{0}^{p} f(v)e^{-sv}dv$$

Exemplo: Seja $f(t) = \sin(t)$ para $t \in [0, 2\pi]$. Então

$$\mathcal{L}[u(t)f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \int_{0}^{2\pi} \sin(v)e^{-sv}dv$$

Exemplo: Seja $f(t) = t$ para $0 < t < 6$ e $f(t+6) = f(t)$ para todo $t \geq 0$. Assim

$$\mathcal{L}[u(t)f(t)] = \frac{1}{1-e^{-6s}} \int_0^6 ve^{-sv}dv$$

23 A função Gama e a Transformada de Laplace

A função gama, denotada por $\Gamma = \Gamma(z)$, é definida por:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}dt$$

Se na integral acima tomarmos $t = sv$, poderemos escrever

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-sv}(sv)^{z-1}sdv = s^z \int_0^\infty v^{z-1}e^{-sv}dv$$

Tomando em particular, $z = n$, observamos que esta última integral é a transformada de Laplace de $f(v) = v^{n-1}$ e segue que

$$\Gamma(n) = s^n \mathcal{L}[v^{n-1}]$$

Acontece que para cada n natural, temos que

$$\mathcal{L}[v^{n-1}] = \frac{(n-1)!}{s^n}$$

logo

$$\Gamma(n) = s^n \frac{(n-1)!}{s^n}$$

Assim, para todo n natural, podemos tomar a função gama como

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

A função $\Gamma = \Gamma(z)$ é usada como extensão da função fatorial válida para todo número natural e tal extensão vale para todo número real onde esta integral converge.

Uma situação muito difícil de ser demonstrada no âmbito do Ensino Básico é que $0! = 1$, mas pela identificação da função Γ com a função fatorial, podemos mostrar que

$$0! = \Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{1-1} dt = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$$

Para a função $f(t) = t^{n-1}$, a transformada de Laplace é dada por

$$\mathcal{L}[t^{n-1}] = \frac{(n-1)!}{s^n} = \frac{\Gamma(n)}{s^n}$$

logo

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$$

A propriedade $\mathcal{L}[tf(t)] = -F'(s)$ aplicada à função $f(t) = t^{n-1}$ fornece

$$\mathcal{L}[t^n] = \mathcal{L}[t\ t^{n-1}] = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[t^{n-1}] = -\frac{d}{ds}\frac{\Gamma(n)}{s^n} = \frac{n\Gamma(n)}{s^{n+1}}$$

assim, a função $\Gamma = \Gamma(n)$ pode ser definida recursivamente para cada n natural, pelas duas relações

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n), \qquad \Gamma(1) = 1$$

Na verdade, em estudos mais avançados, a função $\Gamma = \Gamma(x)$ pode ser definida para todo $x \in \mathbb{R}$, exceto para os x que são números inteiros não positivos, isto é, $x \notin \{0, -1, -2, -3, ...\}$.

Referências bibliográficas

[1] Ditkine,V e Proudnikov,A., Transformations Intégrales et Calcul Opérationnel, Éditions MIR, (1978), Moscou

[2] Hille, Einar, Analysis, vol.1 e 2. Blaisdell Publ. Co., (1966), Waltham, Mass., USA.

[3] Kaplan, Wilfred, Cálculo Avançado, vol.1 e 2. Edgard Blücher Editora e EDUSP, (1972), São Paulo, Brasil.

[4] Quevedo, Carlos P., Circuitos Elétricos, LTC Editora, (1988), Rio de Janeiro, Brasil.

[5] Moore, Douglas, Heaviside Operational Calculus, American Elsevier Publ. Co., (1971), New York.

[6] Spiegel, Murray, Análise de Fourier, Coleção Schaum, McGraw-Hill do Brasil, (1976), São Paulo, Brasil.