# Capítulo 5

# Probabilidade Condicional (grupo 2)

Veremos a seguir exemplos de situações onde a probabilidade de um evento é modificada pela informação de que um outro evento ocorreu, levando-nos a definir *probabilidades condicionais.*

**Exemplo 1.** Em uma urna há duas moedas aparentemente iguais. Uma delas é uma moeda comum, com uma cara e uma coroa. A outra, no entanto, é uma moeda falsa, com duas caras. Suponhamos que uma dessas moedas seja sorteada e lançada.

a) Qual é a probabilidade de que a moeda lançada seja a comum?

**Solução**. A resposta é 1/2, já que ambas as moedas têm a mesma chance de serem sorteadas.

b) Qual é a probabilidade de que saia uma cara?

**Solução**. Há quatro possíveis resultados para o sorteio da moeda e o resultado do lançamento, todos com a mesma probabilidade:

- a moeda sorteada é a comum e o resultado é cara

- a moeda sorteada é a comum e o resultado é coroa
- a moeda sorteada é a falsa e o resultado é cara
- a moeda sorteada é a falsa e o resultado também é cara, mas saindo a outra face

Como em 3 dos 4 casos acima o resultado é cara, a probabilidade de sair cara é $\frac{3}{4}$.

c) Se o resultado do lançamento é cara, qual é a probabilidade de que a moeda sorteada tenha sido a comum?

**Solução**. No item a) verificamos que a probabilidade de sair cara é 1/2. Mas a situação é diferente agora: temos uma informação adicional, a de que, após o lançamento da moeda, o resultado foi cara. Com esta informação, podemos rever o cálculo da probabilidade da moeda honesta ter sido sorteada. Dos quatro resultados possíveis para o experimento, listados acima, o segundo deve ser excluído. Restam, assim, três possibilidades igualmente prováveis. Delas, apenas na primeira a moeda sorteada é a comum. Logo, com a informação de que o laçamento resultou em cara, a probabilidade de que a moeda sorteada tenha sido a comum se reduziu a 1/3.

A probabilidade que calculamos no exemplo anterior é uma *probabilidade condicional*. De um modo geral, a probabilidade condicional de um evento $A$, na certeza da ocorrência de um evento $B$ (de probabilidade não nula) é denotada por $P(A|B)$ e definida como

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

No caso do exemplo anterior, chamemos de $A$ o evento "sortear a moeda comum", e de $B$ o evento "obter resultado cara". O evento $A \cap B$ é "sortear a moeda comum e tirar cara". Temos $P(A \cap B) =$

$1/4$, $P(B) = 3/4$ e, assim, $P(A|B) = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$, como encontramos anteriormente.

**Exemplo 2**. Uma carta é sorteada de um baralho comum, que possui 13 cartas (A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K) de cada naipe (ouros, copas, paus e espadas).

a) Qual é a probabilidade de que a carta sorteada seja um A?

**Solução**. Como o baralho tem $13 \times 4 = 52$ cartas e 4 delas são ases, a probabilidade de tirar um A é $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

b) Sabendo que a carta sorteada é de copas, qual é a probabilidade de que ela seja um A?

**Solução**. O fato de que a carta sorteada é de copas restringe os casos possíveis às 13 cartas de copas, das quais exatamente uma é A. Logo, a probabilidade de ser sorteado um A, dado que a carta sorteada é de copas, permanece igual a $\frac{1}{13}$. Mais formalmente, designando por $A$ o evento "sortear A"e, por $B$, "sortear copas", o evento $A \cap B$ é "sortear o A de copas"e a probabilidade pedida é $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/52}{13/52} = \frac{1}{13}$.

O exemplo acima ilustra uma situação importante: aquela na qual a probabilidade condicional de $A$ na certeza de $B$ é igual à probabilidade de $A$ (ou seja a ocorrência de $B$ não influi na probabilidade de ocorrência de $A$). Esta condição implica em $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(B)$, ou seja, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Dizemos, então, que dois eventos $A$ e $B$ tais que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ são *independentes*.

**Exemplo 3**. Um sistema de segurança tem dois dispositivos que funcionam de modo independente e que tem probabilidades iguais a 0,2 e 0,3 de falharem. Qual é a probabilidade de que pelo menos um dos dois componentes não falhe?

**Solução**. Como os componentes funcionam independentemente, os eventos $A$ = "o primeiro dispositivo falha" e $B$ = "o segundo dispositivo falha" são independentes. Logo, o evento $A \cap B$ = "ambos falham" tem probabilidade $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06$ e, assim, a probabilidade de que pelo menos um não falhe é igual a $1 - 0,06 = 0,94$.

**Exemplo 4**. Uma questão de múltipla escolha tem 5 alternativas. Dos alunos de uma turma, 50% sabem resolver a questão, enquanto os demais "chutam" a resposta. Um aluno da turma é escolhido ao acaso.

a) Qual é a probabilidade de que ele tenha acertado a questão?

**Solução**. Neste caso, vamos utilizar probabilidades condicionais conhecidas para calcular a probabilidade de dois eventos ocorrerem simultaneamente. Observe que, da expressão $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ decorre $P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$. Se o aluno sabe resolver a questão, ele tem probabilidade 1 de acertá-la, enquanto, se ele não sabe, sua probabilidade de acerto é $1/5 = 0{,}2$. Portanto, $P(\text{acerta}|\text{sabe}) = 1$, enquanto $P(\text{acerta}|\text{não sabe}) = 0,2$. Podemos então obter as seguinte probabilidades:

$$P(\text{sabe e acerta}) = P(\text{sabe}) \cdot P(\text{acerta}|\text{sabe}) = (0,5) \cdot 1 = 0,5$$

$$\begin{aligned} P(\text{não sabe e acerta}) &= P(\text{não sabe}) \cdot P(\text{acerta}|\text{não sabe}) \\ &= 0,5 \cdot 0,2 = 0,1 \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} P(\text{acerta}) &= P(\text{sabe e acerta}) + P(\text{não sabe e acerta}) \\ &= 0,5 + 0,1 = 0,6. \end{aligned}$$

b) Dado que o aluno acertou a questão, qual é a probabilidade de que ele tenha "chutado"?

**Solução**. O que desejamos calcular é a probabilidade condicional de que o aluno não saiba resolver a questão, dado que ele a acertou. Temos:

$$P(\text{não sabe}|\text{acerta}) = \frac{P(\text{não sabe e acerta})}{P(\text{acerta})} = \frac{0,1}{0,6} = \frac{1}{6}$$

## Exercícios

1) Joga-se um dado viciado duas vezes. Determine a probabilidade condicional de obter 3 na primeira jogada sabendo que a soma dos resultados foi 7.

2) Um juiz de futebol meio trapalhão tem no bolso um cartão amarelo, um cartão vermelho e um cartão com uma face amarela e uma face vermelha. Depois de uma jogada violenta, o juiz mostra um cartão, retirado do bolso ao acaso, para um atleta. Se a face que o jogador vê é amarela, qual é a probabilidade da face voltada para o juiz ser vermelha?

3) Um exame de laboratório tem eficiência de 95 % para detectar uma doença quando ela de fato existe. Além disso, o teste aponta um resultado falso positivo para 1% das pessoas sadias testadas. Se 0,5% da população tem a doença, qual é a probabilidade de que uma pessoa, escolhida ao acaso, tenha a doença, sabendo que o seu exame foi positivo?

4) Quantas vezes, no mínimo, se deve lançar um dado para que a probabilidade de obter algum 6 seja superior a 0,9?

5) Em uma cidade, as pessoas falam a verdade com probabilidade 1/3. Suponha que $A$ faz uma afirmação e $D$ diz que $C$

diz que $B$ diz que $A$ falou a verdade. Qual é a probabilidade de que $A$ tenha falado a verdade?

6) $2^n$ jogadores de igual habilidade disputam um torneio. Eles são divididos em grupos de 2, ao acaso, e jogadores de um mesmo grupo jogam entre si. Os perdedores são eliminados e os vencedores são divididos novamente em grupos de 2 e assim por diante, até restar apenas um jogador, que é proclamado campeão.

   a) Qual é a probabilidade dos jogadores $A$ e $B$ se enfrentarem durante o torneio?

   b) Qual é a probabilidade do jogador $A$ jogar exatamente $k$ partidas?

7) Duas máquinas $A$ e $B$ produzem 3000 peças em um dia. A máquina $A$ produz 1000 peças, das quais 3% são defeituosas. A máquina $B$ produz as restantes 2000, das quais 1% são defeituosas. Da produção total de um dia, uma peça é escolhida ao acaso e, examinando-a, constata-se que ela é defeituosa. Qual é a probabilidade de que ela tenha sido produzida pela máquina $A$?

8) Um prisioneiro recebe 50 bolas brancas e 50 bolas pretas. O prisioneiro deve distribuir, do modo que preferir, as bolas em duas urnas, mas de modo que nenhuma das duas urnas fique vazia. As urnas serão embaralhadas e o prisioneiro deverá, de olhos fechados, escolher uma urna e, nesta urna, uma bola. Se a bola for branca, ele será libertado; caso contrário, ele será condenado. De que modo o prisioneiro deve distribuir as bolas nas urnas para que a probabilidade de ele ser libertado seja máxima? Qual é esta probabilidade?