Capítulo 3

Probabilidade (grupo 2)

Uma das principais aplicações das técnicas de contagem é a resolução de problemas simples de Probabilidade. O interesse dos matemáticos no estudo sistemático de probabilidades é relativamente recente e tem suas raízes no estudo dos jogos de azar. Um problema clássico, que tem origem em autores do século XV e que despertou o interesse de autores como Pascal e Fermat, é o

Problema dos pontos: *Dois jogadores apostaram* R$ *10,00 cada um em um jogo de cara-e-coroa, combinando que o primeiro a conseguir* 6 *vitórias ficaria com o dinheiro da aposta. O jogo, no entanto, precisa ser interrompido quando um dos jogadores tem* 5 *vitórias e o outro tem* 3*. Qual é a divisão justa da quantia apostada?*

(Para um "clásssico moderno", veja o exercício 9, que provocou grande discussão na Internet alguns anos atrás). Parece razoável que a quantia apostada seja dividida de forma proporcional à chance (ou probabilidade) de vitória de cada jogador. O cálculo destas probabilidades se baseia, como veremos mais adiante, na hipótese de que a moeda seja honesta, ou seja, de que haja iguais chances, em um lançamento, de sair cara ou coroa. Esta crença, por sua vez, corresponde à seguinte idéia intuitiva: em uma seqüência longa de lançamentos, esperamos observar, aproximadamente, o mesmo número de caras e coroas.

De modo mais geral, suponhamos que um determinado experimento tenha n resultados possíveis $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$; o conjunto Ω destes possíveis resultados é chamado de *espaço amostral*. Suponhamos, ainda, que julguemos que, ao repetir o experimento um grande número de vezes, esperemos que o resultado ω_i ocorra em uma certa fração p_i das realizações do experimento. Dizemos, então, que a probabilidade de se observar ω_i é igual a p_i. Evidentemente, devemos ter $p_i \geq 0$ para cada i e, além disso, $p_1 + \cdots + p_n = 1$. Uma vez estabelecidos os valores para as probabilidades de cada resultado possível, podemos definir a probabilidade de qualquer *evento* A (ou seja, de qualquer subconjunto de Ω) como a soma das probabilidades dos resultados em A

Mas como encontrar os valores das probabilidades p_i? No caso geral, estes valores são obtidos de forma experimental. Mas há certos casos em que é razoável supor que todos os resultados são igualmente prováveis e que, portanto, a probabilidade de cada um deles é igual a $1/n$. Por exemplo, ao lançar um dado perfeitamente cúbico não há nenhuma razão para esperar que uma face apareça com mais freqüência que qualquer das outras. Logo, a probabilidade associada a cada face é igual a $1/6$. Modelos probabilísticos que têm esta característica são chamados de *equiprováveis* e estão freqüentemente associados a jogos de azar. Nos modelos probabilísticos equiprováveis, a probabilidade associada a um evento A com p elementos é igual a $p \cdot \frac{1}{n} = \frac{p}{n}$. Muitas vezes se exprime este fato dizendo que a *probabilidade de um evento é igual à razão entre o número de casos favoráveis ao evento e o número de casos possíveis.*

Exemplo 1. Qual é a probabilidade de se obter um resultado maior que 4 ao se lançar um dado honesto?

Solução: O espaço amostral é $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, com todos os resultados tendo probabilidade $1/6$. Desejamos calcular a probabilidade do evento $A = \{5,6\}$, que é dada por $P(A) = 2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

Exemplo 2. Ao lançar um dado duas vezes, qual é a probabilidade de se obter soma 5?

Solução. O espaço amostral é formado por todos os pares de resultados possíveis. Como em cada lançamento há 6 possibilidades, o número de casos possíveis é $6 \times 6 = 36$, todos com a mesma probabilidade de ocorrência. Destes, aqueles em que a soma é 5 são $(1,4), (2,3), (3,2)$ e $(4,1)$. Logo, o número de casos favoráveis ao evento é 4 e sua probabilidade é $4/36 = 1/9$.

Exemplo 3. Em uma urna há 5 bolas vermelhas e 4 pretas, todas de mesmo tamanho e feitas do mesmo material. Retiramos duas bolas sucessivamente da urna, sem repô-las. Qual é a probabilidade de que sejam retiradas duas bolas vermelhas?

Solução: Precisamos, antes de mais nada, encontrar um espaço amostral apropriado para descrever os resultados dos experimentos. Como tudo o que observamos é a cor de cada bola retirada (as bolas de mesma cor são indistinguíveis entre si), poderíamos ser tentados a escolher o espaço amostral $\{vv, vp, pv, pp\}$, formado pelos pares de cores observadas. Esta escolha não está errada, mas não é conveniente para a solução do problema. O que ocorre é que o modelo probabilístico baseado neste espaço amostral não é equiprovável (é óbvio, por exemplo, que duas bolas vermelhas saiam com mais freqüência que duas bolas pretas, já que há mais bolas vermelhas). Para obter um espaço equiprovável, devemos considerar individualmente as 9 bolas presentes na urna. Ou seja, o espaço amostral é o conjunto de todos os pares de bolas distintas, que tem $9 \times 8 = 72$ elementos. Como todas as bolas são iguais (a menos da cor), todos estes pares têm a mesma probabilidade de sair. Para calcular o número destes pares em que ambas as bolas são vermelhas, devemos observar que a primeira bola vermelha pode ser escolhida de 5 modos, enquanto a segunda pode ser qualquer uma das 4 restantes. Logo, o número de casos favoráveis é igual a $5 \times 4 = 20$. Portanto, a probabilidade de que sejam retiradas duas bolas vermelhas é igual a $20/72 = 5/18$.

Exemplo 4. Pedro e João combinaram de lançar uma moeda 4 vezes. Pedro apostou que, nestes 4 lançamentos, não apareceriam 2 caras seguidas; João aceitou a aposta. Quem tem maior chance de ganhar a aposta?
Solução: O espaço amostral apropriado é formado por todas as seqüências possíveis de resultados. Como em cada lançamento sai cara (C) ou coroa (K), há 2 possibilidades; logo, o número total de possibilidades é igual a $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$. Todas estas seqüências têm a mesma probabilidade de ocorrência, já que o resultado de um lançamento não afeta os demais e há a mesma chance de sair cara ou coroa. Vamos verificar quais destas seqüências levam à vitória de Pedro.

- se só saírem coroas ($KKKK$), é claro que Pedro vence.
- se só sair uma cara ($CKKK, KCKK, KKCK, KKKC$), Pedro também vence
- com duas caras, Pedro vence nos casos $KCKC$, $CKCK$ e $CKKC$.
- quando saem três ou mais caras, Pedro perde.

Logo, o número de seqüências favoráveis a Pedro é igual a 8 e sua probabilidade de vitória é igual a $8/16 = 1/2$. Portanto, Pedro e João têm a mesma chance de vitória.

Exemplo 5. Qual é a forma justa de dividir os R$ 20,00 apostados no problema dos pontos?

Solução: O jogador I tem 5 vitórias, faltando apenas uma para vencer o jogo. O jogador II tem apenas 3 vitórias, necessitando de mais 3 para vencer. Portanto, para que II vença, ele tem que vencer três partidas seguidas. Há $2 \times 2 \times 2 = 8$ possibilidades para os resultados destas partidas e apenas um destes é favorável à vitória de II. Logo, II vence com probabilidade 1/8, enquanto a probabilidade de vitória de I é 7/8. Logo, I deve ficar com R$ 17,50 e II com R$ 2,50.

Uma possível objeção quanto à solução acima é o fato de construirmos nosso espaço amostral com base nas três partidas restantes, quando o jogo pode, na verdade, terminar em uma, duas ou três partidas. Fizemos isto para obter um espaço amostral para o qual o modelo é equiprovável. Note que usar este espaço amostral é equivalente a supor que, mesmo que I tenha vencido na primeira ou segunda partida, eles continuam a disputar, como "amistosos", as partidas seguintes. É claro que isto não modifica, em nada, as chances de vitória de cada jogador.

Vimos acima que a idéia intuitiva de probabilidade de um evento está ligada à freqüência observada deste evento quando o experimento é realizado um grande número de vezes. Esta relação pode ser estabelecida de modo preciso, através de um teorema conhecido como a Lei dos Grandes Números. Embora, por vezes, ela não seja muito bem entendida (veja, por exemplo, o exercício 7), a Lei dos Grandes Números é um instrumento fundamental para estabelecer uma via de mão dupla entre modelos probabilísticos teóricos e os experimentos aleatórios.

Consideremos, novamente, o exemplo 5. Uma forma de se ter uma idéia da resposta do problema seria utilizar uma simulação da situação pretendida. Esta simulação é repetida um grande número de vezes e, através da freqüência de vitórias de cada jogador, estimaríamos sua probabilidade de vitória. A simulação pode ser feita manualmente, usando uma moeda (é uma atividade apropriada para sala de aula: cada aluno repete o experimento algumas poucas vezes e, reunindo todos os resultados, temos uma quantidade razoável de repetições). É possível, também, fazer a simulação com auxílio de um computador, através da geração de números aleatórios. A tabela abaixo mostra o resultado obtido simulando 100 realizações do jogo.

I ganha na primeira partida	52 vezes
I ganha na segunda partida	20 vezes
I ganha na terceira partida	13 vezes
II ganha (na terceira partida)	15 vezes

Os resultados obtidos mostram, ao mesmo tempo, o poder e a limitação do método de simulação. Por um lado, permite estimar que II tem uma chance de vitória muito menor do que a de I. Na simulação que fizemos, II ganhou em apenas 15% das vezes (o que está razoavelmente próximo da probabilidade exata, que é $1/8 = 0,125$). Por outro lado, o valor obtido na simulação é sempre uma aproximação, cujo erro diminui com o número de repetições.

Exercícios

1) Dois dados são lançados e observa-se a soma de suas faces.

   a) Quais são os possíveis resultados para esta soma?

b) Estes resultados são equiprováveis? Caso contrário, que resultado é mais provável? Com que probabilidade? E o menos provável?

c) Qual é a probabilidade de cada resultado possível?

2) Uma moeda é lançada 3 vezes. Qual é a probabilidade de que saiam 2 caras?

3) Um casal decidiu que vai ter 4 filhos. O que é mais provável: que tenham dois casais ou três filhos de um sexo e um de outro?

4) Laura e Telma retiram um bilhete cada de uma urna em que há 100 bilhetes numerados de 1 a 100. Qual é a probabilidade de que o número retirado por Laura seja maior do que o de Telma? E se elas, depois de consultarem o número, devolvem o bilhete à urna?

5) Duas peças de um dominó comum são sorteadas. Qual é a probabilidade de que tenham um número em comum?

6) Ana, Joana e Carolina apostam em um jogo de cara-e-coroa. Ana vence na primeira vez que saírem duas caras seguidas; Joana vence na primeira vez que saírem duas coroas seguidas; Carolina vence quando sair uma cara seguida de uma coroa. Qual é a probabilidade que cada uma tem de vencer?

7) O trecho a seguir foi obtido em um site de Internet que se propõe a aumentar as chances de vitória no jogo da Sena (que consiste em sortear 6 dentre 60 dezenas). *"Quando afirmamos, por exemplo, que as dezenas atrasadas são importantes, é porque já observamos, em nossos estudos, que todas as dezenas são sorteadas a cada quarenta testes, portanto, seria útil você acompanhar e apostar em dezenas atrasadas; você estaria assim aumentando muito suas chances."* Você concorda

que apostar em uma dezena atrasada aumenta as chances de vitória na Sena?

8) Suponhamos que você tenha duas escolhas para apostar na Sena. O primeiro aposta nas dezenas $1-3-5-7-9-11$ e o segundo nas dezenas $8-17-31-45-49-55$. Qual você acha que tem maiores chances de ser vitorioso?

9) (O Problema do Bode) Este problema foi proposto em um programa de rádio nos Estados Unidos e causou um enorme debate na Internet.

   Em um programa de prêmios, o candidato tem diante de si três portas. Atrás de uma destas portas, há um grande prêmio; atrás das demais há um bode. O candidato escolhe inicialmente uma das portas. O apresentador (que sabe qual é a porta que contém o prêmio) abre uma das portas não indicadas pelo candidato, mostrando necessariamente um bode. A seguir ele pergunta se o candidato mantém sua escolha ou deseja trocar de porta. O candidato deve trocar ou não? (Uma forma de você guiar sua intuição consiste em simular o problema.).

10) Suponha que 16 seleções, entre as quais Brasil e Argentina, vão participar de um torneio. Serão formados quatro grupos de quatro seleções, através de sorteio. Qual é a probabilidade de que Brasil e Argentina fiquem no mesmo grupo?

11) A China tem um sério problema de controle de população. Várias políticas foram propostas (e algumas colocadas em efeito) visando proibir as famílias de terem mais de um filho. Algumas destas políticas, no entanto, tiveram conseqüências trágicas. Por exemplo, muitas famílias de camponeses abandonaram suas filhas recém-nascidas, para terem uma outra chance de ter um filho do sexo masculino. Por essa razão, leis

menos restritivas foram consideradas. Uma das leis propostas foi a de que as famílias teriam o direito a um segundo (e último) filho, caso o primeiro fosse do sexo feminino. Deseja-se saber que conseqüências isto traria para a composição da população, a longo prazo. Haveria uma maior proporção de mulheres? De homens?

a) Com auxílio de uma moeda, simule a prole de um conjunto de 10 famílias (jogue a moeda; se obtiver cara, é um menino, e a família pára por aí; se der coroa, é uma menina; jogue a moeda mais uma vez e veja se o segundo filho é menino ou menina).

b) Reúna os resultados obtidos pelos integrantes do grupo e produza estatísticas mostrando o número médio de crianças por família, a proporção de meninos e meninas na população e a proporção de famílias que têm um filho homem. O que estes resultados sugerem?

c) Qual é a probabilidade de que uma família tenha um filho do sexo masculino? Qual o número médio de filhos por família? Dentre todas as crianças nascidas, qual é a proporção de meninos e meninas?