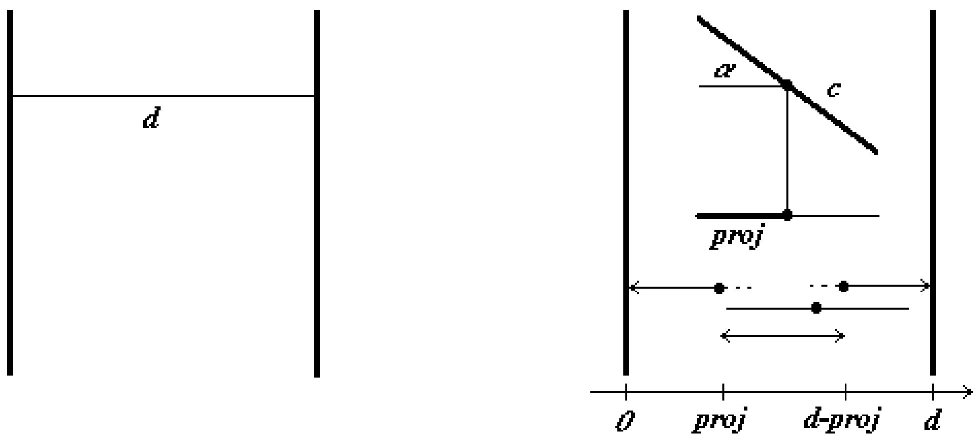
Como o determinara o valor de π jogando varetas ao chão

por
Dr. Milton Procópio de Borba

Se jogarmos inúmeras **vezes** uma vareta num piso com listras eqüidistantes, poderemos encontrar o valor aproximado de π, através da porcentagem de vezes que a vareta **parou** sobre uma das listras.

Desde quando fazia um curso de graduação, eu já conhecia esta curiosidade. Um dos meus professores comentou, justificando que "a probabilidade de uma vareta cair sobre uma das linhas eqüidistantes traçadas no chão pode ser calculada por uma integral, cujo valor é uma expressão contendo π".

Sempre que tive a oportunidade, comentava isto com meus colegas e alunos, mas não sabia exatamente qual a relação necessária entre o total de tentativas (**vezes**), o total de acertos (**parou**), o cumprimento da vareta (***c***) e distância entre as linhas paralelas (***d***).

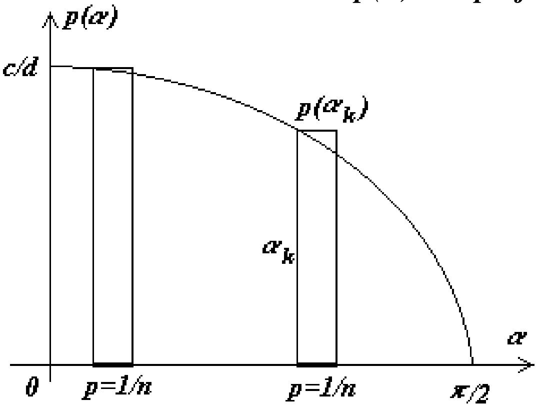


Recentemente, numa viagem de ônibus, eu estava preparando alguma curiosidade matemática para falar na turma do Projeto Magister, quando finalmente me restou tempo e oportunidade para estudar melhor o problema.

Para cada $\alpha \in (0\ ,\ \pi/2)$, a vareta não toca nenhuma linha se o centro da vareta cair num ponto do trecho ***(proj , d-proj)***, assinalado por ←→, na figura acima. A vareta tocará uma linha se o seu centro cair ou no trecho ***(0 , proj)***, assinalado por ←, ou no outro trecho ***(d-proj , d)***, assinalado por →.

De um comprimento total (***d***) de possibilidades de onde pode parar o centro da vareta, só interessam dois trechos, ambos de comprimento igual a ***proj* = *(c/2)cos*α**. Com isto, para cada α, a probabilidade da vareta parar sobre uma linha é:

$$p(\alpha) = 2.\ proj/d = (c/d)\cos\alpha$$



$\propto$	$p(\propto)$
0	c/d
$\pi/6$	0,866c/d
$\pi/4$	0,47c/d
$\pi/3$	0,5c/d
$\pi/2$	0

Se dividirmos o intervalo $(0\ ,\ \pi/2)$ em ***n*** intervalos, a probabilidade de se formar um ângulo α_k em um destes intervalos é de ***1/n***. Assim, usando $p(A \cap B) = p(A).p(B)$, a probabilidade da vareta parar numa linha é aproximadamente:

$$p \approx (1/n).p(\alpha_1) + (1/n).p(\alpha_2) + \ldots + (1/n).p(\alpha_n)$$

Com $\Delta\alpha = \pi/2n$, ficamos com $p \approx (2/\pi).[p(\alpha_1) + p(\alpha_2) + \ldots + p(\alpha_n)].\ \Delta\alpha$.

Na verdade, $p = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} p(\alpha)d\alpha = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \dfrac{c.\cos\alpha}{d}d\alpha = \dfrac{2c}{\pi d}$

Experimentalmente, essa probabilidade seria o limite da razão entre os acertos (**<u>parou</u>**), e o total (**<u>vezes</u>**), quando o número ***v*** de **<u>vezes</u>** tende ao infinito, ou seja:

$$p = \lim_{v\to\infty}\frac{parou}{vezes} = \frac{2c}{\pi d} \Rightarrow \pi = \frac{2c}{d}.\lim_{v\to\infty}\frac{vezes}{parou}$$

Para **<u>vezes</u>** bem grande, temos que $\boxed{\pi \approx \dfrac{2c}{d}.\dfrac{vezes}{parou}}$

Para "comprovar" o resultado, ao voltar para casa, simulei a experiência no computador, através de um programa em linguagem Pascal. O programa escolhe aleatoriamente uma posição ***pos*** entre ***0*** e ***d*** e um ângulo α entre ***0*** e ***90º***, calcula a projeção ***proj*** de meia vareta (perpendicular às listras) e verifica se o valor ***pos-proj*** ≤ 0 ou então se ***pos+proj*** $\geq d$, isto é, se a vareta parou sobre alguma listra. A cada quantidade ***quant***, o programa calcula porcentagem de acertos, o valor de pi segundo a equação apresentada, escreve os resultados e continua a simulação.

A listagem do programa está baixo, com ***quant*** = *1000*, **c** = *3* e **d** = *5*.

```
program pi_random;

Uses crt;

Var pg:integer;
   alfa,pos,proj,c,d:real;
   vezes,nao,parou,quant,cont:longint;

begin
clrscr;
nao:=0;   parou:=0;   quant:=1000;    c:=3;    d:=5;
writeln('Comprimento da vareta: ',c:2:3, '  e Distância entre as faixas: ',d:2:3);
writeln;
randomize;  vezes:=0;  pg:=1;
repeat
  for cont := 1 to 20*quant*pg do begin
     vezes:=vezes+1;
     pos:= d*Random(10000)/10000;
     alfa:= Random(9000)/100;
     proj:=0.5*c*cos(alfa*pi/180);
     if (pos-proj>=0) and (pos+proj<d) then  nao:=nao+1
        else parou:=parou+1;
     if vezes mod quant = 0 then  begin
        write('Em ',vezes,' temos ',parou,' acertos  ==> ', 100*(parou/vezes):3:2,' %.');
        writeln('  Assim, pi --> ',2*(c/d)*(vezes/parou):2:4);
     end;
  end;
  writeln;
  write('Comprimento da vareta: ',c:2:3, '  e Distância entre as faixas: ',d:2:3);
  write('  Mais pgs.?'); read(pg);
until pg=0;
end.
```

O resultado da simulação foi:

Comprimento da vareta: 3.000 e Distância entre as faixas: 5.000

Em 1000 temos 409 acertos ==> 40.90 %. Assim, pi --> 2.9340
Em 2000 temos 801 acertos ==> 40.05 %. Assim, pi --> 2.9963
Em 3000 temos 1158 acertos ==> 38.60 %. Assim, pi --> 3.1088
Em 4000 temos 1523 acertos ==> 38.08 %. Assim, pi --> 3.1517
Em 5000 temos 1884 acertos ==> 37.68 %. Assim, pi --> 3.1847
Em 6000 temos 2240 acertos ==> 37.33 %. Assim, pi --> 3.2143
Em 7000 temos 2640 acertos ==> 37.71 %. Assim, pi --> 3.1818
Em 8000 temos 3012 acertos ==> 37.65 %. Assim, pi --> 3.1873
Em 9000 temos 3391 acertos ==> 37.68 %. Assim, pi --> 3.1849
Em 10000 temos 3785 acertos ==> 37.85 %. Assim, pi --> 3.1704
Em 11000 temos 4171 acertos ==> 37.92 %. Assim, pi --> 3.1647
Em 12000 temos 4565 acertos ==> 38.04 %. Assim, pi --> 3.1544
Em 13000 temos 4967 acertos ==> 38.21 %. Assim, pi --> **3.1407**
Em 14000 temos 5342 acertos ==> 38.16 %. Assim, pi --> **3.1449**
Em 15000 temos 5707 acertos ==> 38.05 %. Assim, pi --> 3.1540
Em 16000 temos 6076 acertos ==> 37.98 %. Assim, pi --> 3.1600
Em 17000 temos 6448 acertos ==> 37.93 %. Assim, pi --> 3.1638
Em 18000 temos 6846 acertos ==> 38.03 %. Assim, pi --> 3.1551
Em 19000 temos 7230 acertos ==> 38.05 %. Assim, pi --> 3.1535
Em 20000 temos 7618 acertos ==> 38.09 %. Assim, pi --> 3.1504

Comprimento da vareta: 3.000 e Distância entre as faixas: 5.000 Mais uma pg ?1
Em 21000 temos 8016 acertos ==> 38.17 %. Assim, pi --> **3.1437**
Em 22000 temos 8418 acertos ==> 38.26 %. Assim, pi --> 3.1361
Em 23000 temos 8772 acertos ==> 38.14 %. Assim, pi --> **3.1464**
Em 24000 temos 9169 acertos ==> 38.20 %. Assim, pi --> **<u>3.1410</u>**
Em 25000 temos 9538 acertos ==> 38.15 %. Assim, pi --> **3.1453**
Em 26000 temos 9924 acertos ==> 38.17 %. Assim, pi --> **3.1439**
Em 27000 temos 10306 acertos ==> 38.17 %. Assim, pi --> **3.1438**
Em 28000 temos 10693 acertos ==> 38.19 %. Assim, pi --> **<u>3.1422</u>**
Em 29000 temos 11097 acertos ==> 38.27 %. Assim, pi --> 3.1360
Em 30000 temos 11463 acertos ==> 38.21 %. Assim, pi --> **3.1405**
Em 31000 temos 11838 acertos ==> 38.19 %. Assim, pi --> **3.1424**
Em 32000 temos 12251 acertos ==> 38.28 %. Assim, pi --> 3.1344
Em 33000 temos 12652 acertos ==> 38.34 %. Assim, pi --> 3.1299
Em 34000 temos 13023 acertos ==> 38.30 %. Assim, pi --> 3.1329
Em 35000 temos 13398 acertos ==> 38.28 %. Assim, pi --> 3.1348
Em 36000 temos 13786 acertos ==> 38.29 %. Assim, pi --> 3.1336
Em 37000 temos 14153 acertos ==> 38.25 %. Assim, pi --> 3.1371
Em 38000 temos 14547 acertos ==> 38.28 %. Assim, pi --> 3.1347
Em 39000 temos 14931 acertos ==> 38.28 %. Assim, pi --> 3.1344
Em 40000 temos 15323 acertos ==> 38.31 %. Assim, pi --> 3.1325

Comprimento da vareta: 3.000 e Distância entre as faixas: 5.000 Mais pgs.?0