

## 6 Retas

### 6.1 OBJETIVOS DO CAPÍTULO

Ao final deste capítulo o estudante deverá ser capaz de:

#### Retas

1. Reconhecer equações da reta: geral, paramétrica, simétricas, e reduzidas;
2. Determinar equações da reta que passam: por um ponto, por dois pontos e por três pontos alinhados;
3. Reconhecer equações de retas paralelas aos eixos coordenados;
4. Calcular o ângulo entre duas retas;
5. Resolver problemas que envolvam paralelismo e ortogonalidade e coplanaridade de retas;
6. Identificar as posições relativas entre duas retas;
7. Resolver problemas que envolvam interseção de retas;
8. Reconhecer equações de retas paralelas aos eixos coordenados;

**Exercícios para entregar no dia da prova valendo até dois pontos para quem não tirar dez na prova e acertar pelo menos três questões na prova, um ponto para quem acertar duas questões e meio ponto para quem acertar apenas uma questão.**

1. Classifique as equações das retas abaixo e obtenha, diretamente das equações, um ponto e um vetor diretor.

$$\text{a) } \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 + t \\ z = 4 + t \end{cases}$$

$$\text{b) } \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+5}{1}$$

$$\text{c) } \begin{cases} y = 3x + 1 \\ z = x - 2 \end{cases}$$

$$\text{d) } \frac{1-x}{8} = \frac{2y+4}{3} = \frac{z-1}{2}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x = \frac{5}{2} - 3z \\ y = 2 - \frac{z}{2} \end{cases}$$

2. Dados  $A(2, 2, 5)$ ,  $\vec{u} = (1, -1, 3)$ ,  $\vec{v} = (2, 2, 3)$ , escreva equações paramétricas da reta por  $A$ , paralela ao vetor  $\vec{v} - \vec{u}$ ;
3. Dadas as retas  $r : (x, y, z) = (1, 0, 0) + t(m + 1, 0, 2)$ ,  $s : (x, y, z) = (2, 2, 1) + t(1, m, n)$  e  $t : x + 1 = y - 2 = \frac{z-3}{2}$  calcule  $m$  e  $n$  sabendo que  $t$  é ortogonal às outras duas.
4. Mostre que a reta  $t$ , que passa pelos pontos  $A(2, 2, 0)$  e  $B(1, 0, -2)$ , forma ângulos congruentes (isto é, de mesma medida) com as retas  $r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$  e  $s : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{2} = 1 - z$ .
5. Sendo  $A(1, 0, 0)$  um ponto, encontre um ponto  $P$  da reta  $r$  de equações paramétricas  $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$  tal que o cosseno do ângulo entre as retas  $r$  e o vetor  $\overrightarrow{AP}$  seja  $\sqrt{\frac{2}{3}}$ .
6. Estudar a posição relativa das retas. Se as retas forem concorrentes, determine o ponto de interseção.
- a)  $r : \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 3 \\ z = -\frac{5}{2}t \end{cases}$   $s : \begin{cases} \frac{x-4}{6} = \frac{z-1}{5} \\ y = 7 \end{cases}$
- b)  $r : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -10 + 5t \\ z = 9 - 3t \end{cases}$   $s : \begin{cases} x = -3 \\ z = 4 \end{cases}$
- c)  $r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$   $s : \begin{cases} x - 1 = y - 1 = z \end{cases}$
7. Considere o paralelograma formado pelos pontos  $A(1, -2, 3)$ ,  $B(4, 3, -1)$ ,  $C(5, 7, -3)$  e  $D(2, 2, 1)$ . Encontrar as equações paramétricas da reta paralela ao lado  $\overline{AB}$  que passa pela interseção das diagonais.

8. Considere o triângulo de vértices  $A(2, 3, -1)$ ,  $B(3, 1, -2)$  e  $C(-1, 0, 2)$  Encontre as equações paramétricas da reta suporte da altura do triângulo em relação ao lado  $\overline{AB}$ .
9. Considere o triângulo de vértices  $A(2, 3, -1)$ ,  $B(3, 1, -2)$  e  $C(-1, 0, 2)$  Encontre as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto  $B$  e perpendicular à reta suporte da altura do triângulo em relação ao lado  $\overline{AC}$ .
10. Considere o triângulo de vértices  $A(2, 3, -1)$ ,  $B(3, 1, -2)$  e  $C(-1, 0, 2)$  Encontre as equações paramétricas da reta que passa pelo baricentro desse triângulo e é paralela ao lado  $\overline{AB}$ .
11. Encontre a equação simétrica da reta suporte da mediatriz do triângulo  $A(2, 3, -1)$ ,  $B(3, 1, -2)$  e  $C(-1, 0, 2)$  em relação ao lado  $\overline{BC}$ .
12. Encontrar as equações reduzidas da reta que passa pelo ponto de interseção das diagonais do paralelograma formado pelos pontos  $A(1, -2, 3)$ ,  $B(4, 3, -1)$ ,  $C(5, 7, -3)$  e  $D(2, 2, 1)$  e é simultaneamente perpendicular às duas diagonais.
13. Encontre a equação simétrica da reta que passa pelos pontos  $A(1, -2, 3)$  e  $B(2, 2, 1)$ .
14. Encontre as equações reduzidas da reta que passa pelos pontos  $A(1, 4, -3)$ ,  $B(2, 1, 3)$  e  $C(4, -1, 7)$ .
15. Encontre as equações reduzidas da reta que passa pelos pontos  $A(1, 4, -3)$ ,  $B(2, 1, 3)$  e  $C(4, -1, 7)$  e é perpendicular ao eixo  $x$ .
16. Encontre a equação da reta simultaneamente ortogonal aos lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ , do triângulo de vértices  $A(2, 3, -1)$ ,  $B(3, 1, -2)$  e  $C(-1, 0, 2)$  e passa pelo ponto  $B$ .
17. Encontre a equação paramétrica da reta que passa pelo ponto  $A(2, 3, -1)$  e forma um ângulo de  $60^\circ$  com o vetor  $\overrightarrow{A(2, 3, -1)B(3, 1, -2)}$ .
18. Sejam  $A(0, 4, 0)$ ,  $B(3, 0, 0)$ ,  $C$  e  $D$  vértices de um quadrado. Admitindo que o ângulo  $C$  é oposto ao ângulo  $A$ , encontre as equações das retas diagonais desse quadrado e o ponto de interseção dessas retas no primeiro quadrante.

19. Determinar as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto  $A(1, 2, 5)$  e é, simultaneamente, ortogonal às retas de equações  $\frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-3}{-2}$  e  $\begin{cases} y = 3x - 1 \\ z = -x + 4 \end{cases}$ .
20. Determine as equações reduzidas da reta que passa pelo ponto  $A(1, 2, 20)$  e é perpendicular à reta que suporta a mediana relativa ao lado  $BC$  do triângulo  $A(0, 0, 6)$ ,  $B(6, 0, 0)$  e  $C(0, 6, 0)$ .
21. Determine o valor de  $m$  para que os pontos  $A(3, m, 1)$ ,  $B(1, 1, -1)$  e  $C(-2, 10, -4)$  sejam colineares.
22. Verifique se as retas  $r$  e  $s$  de equações respectivamente

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-1}{4} \text{ e } \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 - t \\ z = 7 - 2t \end{cases}$$

são coplanares.

23. Encontre o ponto de interseção das retas de equações

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-5}{4} \text{ e } \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 - t \\ z = 7 - 2t \end{cases}$$

24. Dadas as retas  $r : \begin{cases} x = 1 + t(\alpha + 1) \\ y = 0 \\ z = 2t \end{cases}$  e  $s : \begin{cases} y = \alpha x - 2\alpha + 2 \\ z = \beta x - 2\beta + 1 \end{cases}$

$t : \frac{x+1}{2} = y - 2 = \frac{z-3}{-2}$  determinar  $\alpha$  e  $\beta$  sabendo que a reta  $t$  é ortogonal às outras duas.

25. Determinar as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto  $A(2, 0, -1)$  e é simultaneamente ortogonal às retas  $r : \begin{cases} x - 2 = \frac{z-2}{2} \\ x = 2 \end{cases}$  e  $s : \begin{cases} x = 5t \\ y = 6 \end{cases}$ .
26. Encontrar as equações das retas supertes das alturas do triângulo de vértices  $A(1, 0, 1)$ ,  $B(4, 2, 1)$  e  $C(1, 2, 0)$  e o ponto de interseção dessas retas.