

5 Vetores

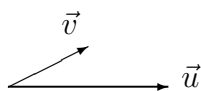
5.1 OBJETIVOS DO CAPÍTULO

Ao final deste capítulo o estudante deverá ser capaz de:

- 1 - Reconhecer segmentos orientados e equipolentes;
- 2 - Definir vetor;
- 3 - Realizar operações com vetores representados por segmentos equipolentes;
- 4 - Representar combinações lineares de vetores;
- 5 - Representar graficamente e analiticamente vetores e combinações lineares no plano e no espaço tridimensional;
- 6 - Representar graficamente vetores definidos por dois pontos no plano e no espaço tridimensional;
- 7 - Realizar operações com vetores representados analiticamente;
- 8 - Resolver problemas envolvendo as condições de paralelismo de vetores;
- 9 - Resolver problemas envolvendo o produto escalar e suas propriedades;
- 10 - Resolver problemas envolvendo o produto vetorial e suas propriedades;
- 11 - Resolver problemas envolvendo o produto misto e suas propriedades;
- 12 - Resolver problemas envolvendo o duplo produto vetorial e suas propriedades;

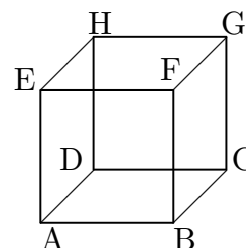
Exercícios para entregar no dia da prova valendo até dois pontos para quem não tirar dez na prova e acertar pelo menos três questões na prova, um ponto para quem acertar duas questões e meio ponto para quem acertar apenas uma questão.

1. Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ da figura, mostrar num gráfico, um representante do vetor:
 - a) $\vec{u} - \vec{v}$
 - b) $\vec{v} - 2\vec{u}$
 - c) $\vec{u} - 3\vec{v}$

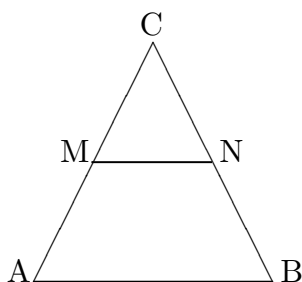


2. Na figura abaixo, representa-se um cubo. Desenhe a flecha de origem H que representa

- a) $(E - F) + (B - D) + (C - D)$;
 b) $-(G - B) + (B - A)$.



3. Sabendo que o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é de 60° , determinar o ângulo formado pelos vetores $-\vec{u}$ e $2\vec{v}$.
4. Dados os vetores $\vec{u} = (4, 1)$ e $\vec{v} = (2, 6)$, calcular $\vec{u} + \vec{v}$ e $2\vec{u}$. Fazer a representação geométrica desses vetores.
5. Demonstre a propriedade $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (comutativa).
6. Dados os vetores $\vec{u} = (3, -1)$ e $\vec{v} = (-1, 2)$, determinar o vetor $\vec{w}$ tal que $4(\vec{u} - \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} - 2\vec{w}$.
7. Dados os pontos $A(2, -1)$, $B(-1, 3)$ e $C(4, -2)$, determinar $D(x, y)$ de modo que $\vec{CD} = 3\vec{AB}$.
8. Dados os vetores $\vec{u} = (-2, 3, -4)$ e $\vec{v} = (-4, 3, -8)$, verificar se são paralelos.
9. Determinar a e b de modo que sejam colineares os pontos $A(3, a, b)$, $B(1, 5, 1)$ e $C(-3, 13, 7)$.
10. Dar as expressões das coordenadas do ponto médio do segmento da reta de extremidades $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$.
11. Na figura abaixo tem-se $CM = \frac{CA}{3}$, $CN = \frac{CB}{3}$. Prove que os segmentos MN e AB são paralelos, e que o comprimento do primeiro é $\frac{1}{3}$ do comprimento do segundo.



12. Dados os vetores $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ e $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j}$. Determine $\vec{a} \cdot \vec{b}$.
13. Dados os vetores $\vec{u} = (4, \alpha, -1)$ e $\vec{v} = (\alpha, 2, 3)$ e os pontos $A(4, -1, 2)$ e $B(3, 2, -1)$, determinar o valor de α tal que $\vec{AB} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 5$.
14. Determine o módulo do vetor $\vec{v}$ do exercício 13.
15. Determine o versor do vetor $\vec{v}$ do exercício 13.
16. Sabendo que a distância entre os pontos $A(-1, 2, 3)$ e $B(1, -1, m)$ é 7, calcular m .
17. Determinar α para que o vetor $\vec{u} = (\frac{\sqrt{11}}{4}, -\frac{1}{2}, \alpha)$ seja unitário.
18. Provar que $|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$.
19. Determinar os ângulos do triângulo de vértices $A(2, 1, 3)$, $B(1, 0, -1)$ e $C(-1, 2, 1)$.
20. Provar que os pontos $A(5, 1, 5)$, $B(4, 3, 2)$ e $C(-3, -2, 1)$ são vértices de um triângulo retângulo.
21. Os ângulos diretores de um vetor podem ser de 45° , 60° e 90° ?
22. Qual o comprimento do vetor projeção de $\vec{u} = (3, 5, 2)$ sobre o eixo dos y ?
23. Calcule m para que $\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v}$, sendo $\vec{u} = (m, 2, 0)$ e $\vec{v} = (2, m, 0)$ na base ortonormal.
24. Se $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ e $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{k}$, determine $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{v} \times \vec{u}$.
25. Calcular a área do triângulo de vértices $A(2, 3, -1)$, $B(3, 1, -2)$ e $C(-1, 0, 2)$.
26. Calcular a área do paralelogramo que tem um vértice no ponto $A(3, 2, 1)$ e uma diagonal de extremidades $B(1, 1, -1)$ e $C(0, 1, 2)$.
27. Mostre que se $3\vec{u} - 2\vec{v} + 17\vec{w} = \vec{0}$ então $3\vec{u} \times \vec{v} = 17\vec{v} \times \vec{w}$.
28. Dados os vetores $\vec{u} = (2, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, -1, 0)$ e $\vec{w} = (-1, 2, 2)$, calcular $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ e $\vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v})$.
29. Verificar se são coplanares os pontos $A(2, 1, 3)$, $B(3, 2, 4)$, $C(-1, -1, -1)$ e $D(0, 1, -1)$.

30. Determinar o valor de k para que os seguintes vetores sejam coplanares: $\vec{a} = (2, k, 1)$, $\vec{b} = (1, 2, k)$ e $\vec{c} = (3, 0, -3)$.
31. Os vetores $\vec{a} = (3, -1, -3)$, $\vec{b} = (-1, 1, -4)$ e $\vec{c} = (m + 1, m, -1)$ determinam um paralelepípedo de volume 42. Calcular m .
32. Determinar $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$, sabendo que $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$, $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$ e $|\vec{w}| = \sqrt{5}$.
33. O vetor $\vec{v}$ é ortogonal aos vetores $\vec{a} = (1, 2, 0)$ e $\vec{b} = (1, 4, 3)$ e forma ângulo agudo com o eixo dos x . Determinar $\vec{v}$, sabendo que $|\vec{v}| = 14$.
34. Sendo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores do espaço, com $\vec{v} \neq \vec{0}$:
- a) determinar o número real r tal que $\vec{u} - r\vec{v}$ seja ortogonal a $\vec{v}$ e
 - b) mostrar que $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v}) = 2\vec{v} \times \vec{u}$.