

Geometria II

Prof. Milton P. Borba

Axiomas de Incidência e Ordem.

- I. Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém.
- II. Toda reta possui pelo menos dois pontos distintos.
- III. Existem pelo menos três pontos não colineares.
- IV. Se $A * B * C$ então A, B e C são colineares, distintos e $C * B * A$.
- V. Dados três pontos colineares e distintos, um e apenas um está entre outros dois.
- VI. Dados dois pontos A e C , existem pontos B e D tais que $A * B * C$ e $A * C * D$.
- VII. Toda reta determina exatamente dois semiplanos (convexos), cuja intersecção é a própria reta.

Teorema: Se $A * B * C$ e $A * C * D$ então $B * C * D$ e $A * B * D$.

Axiomas sobre Medição de Segmentos.

- VIII. Todo par de pontos é associado a um único número real não negativo denominado de distância.

A medida do segmento AB é a distância entre seus extremos A e B , denominada de $|AB|$

- IX. Se $A * B * C$ então $|AC| = |AB| + |BC|$.
- X. Existe uma correspondência biunívoca entre os pontos da reta e os números reais de forma que o valor absoluto da diferença entre os números associados é a distância entre os pontos correspondentes.

Proposição; A distância entre dois pontos é nula se, e somente se, dois pontos são coincidentes.

Exercícios

1. Explique o significado de cada um dos axiomas acima.
2. Defina o que é pontos serem colineares.
3. Mostre que, se três pontos forem não colineares, então são distintos.
4. Mostre que os axiomas II e III podem ser substituídos por
 - (Existência da reta) Existe pelo menos uma reta.
 - (distinção da reta) Dada uma reta, existe pelo menos dois pontos pertencentes à reta e um ponto não pertencente à reta.
5. Justifique que no exercício anterior, “um” pode ser substituído por “existe pelo menos dois”.
6. O conjunto que satisfaz os axiomas de incidência é denominado de plano de incidência. Mostre que o plano de incidência tem pelo menos três pontos e três retas. Dê exemplo do plano de incidência com exatamente três pontos e três retas.
7. Faça o desenho ilustrativo para cada um dos axiomas.
8. Defina formalmente o que é conjunto convexo e discuta o motivo pelo qual o semiplano deve ser considerado convexo.
9. Defina formalmente o que é “estar no mesmo lado”. Faça um desenho ilustrativo e mostre que, se A e B estão no mesmo lado (relativamente a uma reta dada) e B e C também estão no mesmo lado, então A e C estão no mesmo lado.
10. Defina formalmente o que é um segmento e uma semirreta. Mostre que reta não é um segmento, nem é uma semirreta.
11. Demonstre a Proposição.
12. Defina o “estar entre” dois pontos da reta usando o “estar entre” dois números reais (escreva formalmente a definição) e demonstre que os axiomas 5, 6 e 9 podem ser considerados como consequência desta definição.