MATEMÁTICA BÁSICA

Prof. Dr Rogério de Aguiar
Chefe do Departamento de Matemática
CCT - UDESC - JOINVILLE
Email: dma2ra@joinville.udesc.br
Home Page: www.joinville.udesc.br/dmat/rogerio

Julho de 2007

Sumário

1 Teoria dos Conjuntos **3**
- 1.1 Definição de conjunto . . . 3
- 1.2 Operações entre conjuntos . . . 4
- 1.3 Propriedades . . . 5
- 1.4 Exercicios Resolvidos . . . 5

2 Números **6**
- 2.1 Conjuntos Numéricos . . . 6
  - 2.1.1 Naturais . . . 6
  - 2.1.2 Inteiros . . . 6
  - 2.1.3 Racionais . . . 6
  - 2.1.4 Irracionais . . . 7
  - 2.1.5 Reais . . . 7
- 2.2 Ordenação dos números reais . . . 7
  - 2.2.1 Propriedades das desigualdades . . . 8
- 2.3 Intervalos . . . 8
- 2.4 Exercicios Resolvidos . . . 9
- 2.5 Exercícios de Fixação . . . 9

3 Módulo **10**
- 3.1 Introdução . . . 10
- 3.2 Propriedades do módulo . . . 10
- 3.3 Inequações modulares . . . 10
- 3.4 Exercícios resolvidos . . . 11
- 3.5 Exercícios de Fixação . . . 11

4 Expressões Algébricas **12**
- 4.1 Introdução . . . 12
- 4.2 Exercícios Resolvidos 1 . . . 13
- 4.3 Produtos Notáveis: . . . 13
- 4.4 Exercícios Resolvidos 2 . . . 13
- 4.5 Exercícios de Fixação . . . 14

5 Funções **16**
5.1 Introdução . . . 16
5.2 Sistema Cartesiano Ortogonal . . . 18
5.3 Função Afim . . . 19
5.4 Função Modular . . . 22
5.5 Função quadrática . . . 22
5.6 Função Raiz n-ésima de x . . . 25
5.7 Função Exponencial . . . 27
5.8 Função Logarítmica . . . 29
5.9 Tipos importantes de funções . . . 31
5.10 Construção de Gráficos . . . 33
5.11 Exercícios Resolvidos . . . 35
5.12 Exercícios de Fixação . . . 35

6 Geometria Plana **38**
6.1 Reta . . . 38
6.2 Exercicios Resolvidos 1 . . . 40
6.3 Distância . . . 40
6.4 Exercicios Resolvidos 2 . . . 40
6.5 Circunferência . . . 40
6.6 Exercícios Resolvidos 3 . . . 41
6.7 Exercícios de Fixação . . . 41

7 Trigonometria **43**
7.1 Ângulos e Arcos . . . 43
7.2 Trigonometria Básica no Triângulo Retângulo . . . 45
7.3 Relações Trigonométricas: . . . 45
7.4 Trigonometria Básica no Triângulo Qualquer . . . 47
7.5 Ciclo Trigonométrico . . . 48
7.6 Funções Trigonométricas . . . 50
7.7 Identidades trigonométricas . . . 51
7.8 Exercícios de Fixação . . . 52

8 Revisão Geral **55**

9 Respostas **59**
9.1 Do Capítulo 1, Teoria de Conjuntos . . . 59
9.2 Do Capítulo 2, Números . . . 59
9.3 Do Capítulo 3, Módulo . . . 60
9.4 Do Capítulo 4, Expressões Algébricas . . . 62
9.5 Do Capítulo 5, Funções . . . 64
9.6 Do Capítulo 6, Geometria Plana . . . 72
9.7 Do Capitulo 7, Trigonometria . . . 74
9.8 Do Capítulo 8, Revisão Geral . . . 81

Capítulo 1

Teoria dos Conjuntos

1.1 Definição de conjunto

Conjunto: representa uma coleção de objetos:

Ex. 1: O conjunto de todos os brasileiros.

Ex. 2 : O conjunto de todos os números reais tal que x^2-4=0.

Notação: Em geral, um conjunto é denotado por uma letra maiúscula do alfabeto: **A, B, C, ..., Z.**

Elemento: É um dos componentes de um conjunto. Em geral, um elemento de um conjunto é denotado por uma letra minúscula do alfabeto: **a, b, c, ..,z**

Pertinência: É a característica associada a um elemento que faz parte de um conjunto.

Símbolo de pertinência: Se um elemento pertence a um conjunto utilizamos o símbolo $\in$ que se lê: "pertence". Se um elemento não pertence a um conjunto utilizamos o simbolo $\notin$ que se lê "não pertence". Exemplo $1 \in \mathbb{N}$ e $-1 \notin \mathbb{N}$

Algumas notações para conjuntos

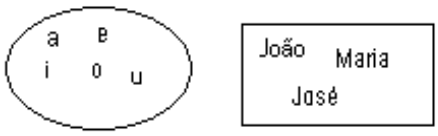
Apresentação: Os elementos do conjunto estão dentro de duas chaves {}

$A = \{a, e, i, o, u\}$, $M = \{João, Maria, José\}$

Descrição: O conjunto é descrito por uma ou mais propriedades.

$A = \{x \diagup x$ é uma vogal$\}$, $M = \{x \diagup x$ é uma pessoa da família de Maria$\}$

Diagrama de Venn-Euler: Os conjuntos são mostrados graficamente.



Alguns conjuntos especiais

Conjunto vazio: É um conjunto que não possui elementos. É representado por {} ou por $\varnothing$. O conjunto vazio está contido em todos os conjuntos.

Conjunto universo: É um conjunto que contém todos os elementos do contexto no qual estamos trabalhando e também contém todos os conjuntos desse contexto. O conjunto universo é representado por uma letra U. Na sequência não mais usaremos o conjunto universo.

Subconjuntos

Dados os conjuntos A e B, diz-se que A está contido em B, denotado por $A \subset B$, se todos os elementos de A também estão em B. O conjunto A é denominado subconjunto de B.

1.2 Operações entre conjuntos

União de conjuntos

A união dos conjuntos A e B é o conjunto de todos os elementos que pertencem ao conjunto A ou ao conjunto B.

$$A \cup B = \{x / x \in A \ ou \ x \in B\}$$

Exemplo: Se $A = \{a, e, i, o\}$ e $B = \{3, 4\}$ então $A \cup B = \{a, e, i, o, 3, 4\}$.

Propriedades

a) $A \cup A = A$
b) $A \cup \varnothing = A$
c) $A \cup B = B \cup A$
d) $A \cup U = U$ (onde U é o conjunto universo)

Interseção de conjuntos

A interseção dos conjuntos A e B é o conjunto de todos os elementos que pertencem ao conjunto A e ao conjunto B.

$$A \cap B = \{x / x \in A \ e \ x \in B\}$$

Exemplo: Se $A = \{a, e, i, o, u\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$ então $A \cap B = \varnothing$.

Quando a interseção de dois conjuntos A e B é o conjunto vazio, dizemos que estes conjuntos são disjuntos.

Propriedades

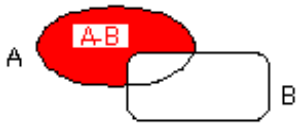
a) $A \cap A = A$
b) $A \cap \varnothing = \varnothing$
c) $A \cap B = B \cap A$
d) $A \cap U = A$ (onde U é o conjunto universo)

Diferença de conjuntos

A diferença entre os conjuntos A e B é o conjunto de todos os elementos que pertencem ao conjunto A e não pertencem ao conjunto B.

$$A - B = \{x / x \in A \ e \ x \notin B\}$$

Do ponto de vista gráfico, a diferença pode ser vista como:



Propriedades

a) $A - \varnothing = A$ c) $A - A = \varnothing$

b) $\varnothing - A = \varnothing$ d) $A - B \neq B - A$ (a diferença não é comutativa)

Complemento de um conjunto

O complemento do conjunto B contido no conjunto A, denotado por $C_A B$, é a diferença entre os conjuntos A e B, ou seja, é o conjunto de todos os elementos que pertencem ao conjunto A e não pertencem ao conjunto B.

$$C_A B = A - B = \{x \ / x \in A \ \ e \quad x \notin B\}$$

1.3 Propriedades

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow$ Propriedade distributiva

b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \Rightarrow$ Propriedade distributiva

c) $A \cap (A \cup B) = A \Rightarrow$ Lei da absorção

d) $A \cup (A \cap B) = A \Rightarrow$ Lei da absorção

1.4 Exercicios Resolvidos

a) Em uma cidade existem dois clubes A e B, que têm juntos 6000 sócios. O clube A tem 4000 sócios e os dois clubes têm 500 sócios comuns. Quantos sócios têm o clube B? Quantos são os sócios do clube B que não são sócios do clube A?

b) Seja $A = \{a, b, c, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{d, e, f, 3, 7, 8\}$. Determinar $A - B, A \cap B, A \cup B, B - A$

c) Em uma cidade existem tres cavalos X, Y, Z que participam de um páreo em uma corrida de cavalos. X e Y têm 400 apostadores em comum. Os cavalos Y e Z têm 300 apostadores em comum. Os cavalos X e Z não têm apostadores em comum. X e Y têm juntos 9000 apostadores e Y e Z têm juntos 8000 apostadores. Sabendo que Z tem 3000 apostadores determinar o número de apostadores dos cavalos X e Y.

Capítulo 2

Números

2.1 Conjuntos Numéricos

2.1.1 Naturais

Definimos o conjunto do números naturais por, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5...\}$

Convém destacar um subconjunto: $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\} = \{1, 2, 3, 4, 5...\}$

2.1.2 Inteiros

Definimos o conjunto do números inteiros por, $\mathbb{Z} = \{... - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...\}$

No conjunto dos inteiros destacamos os seguintes subconjuntos:

$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\} = \{... - 3, -2, -1, 1, 2, 3...\}$

$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4...\}$ (inteiros não negativos)

$\mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, -3, -4...\}$ (inteiros não positivos)

$\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, 4...\}$(inteiros positivos)

$\mathbb{Z}_-^* = \{-1, -2, -3, -4...\}$(inteiros negativos)

2.1.3 Racionais

$$\mathbb{Q} = \{x \ / \ x = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}.$$

Obs: Um número racional pode aparecer em forma de dízima periódica, isto é, um numeral decimal, com a parte decimal formada por infinitos algarismos que se repetem periodicamente, como por exemplo: $4,5555$ (período 5) , $10,878787$ (período 87) e $9,8545454...$ (período 54, parte não periódica 8)

No conjunto dos racionais adotamos as seguintes definições:

a) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow ad = bc$

b) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

c) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

No conjunto dos racionais destacamos os seguintes subconjuntos:

$\mathbb{Q}_+ = \{x \in \mathbb{Q} / x \geq 0\}$(racionais não negativos)

$\mathbb{Q}_- = \{x \in \mathbb{Q} / x \leq 0\}$(racionais não negativos)
$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$(racionais não nulos)

2.1.4 Irracionais

É todo número decimal não-exato e não periódico, bem como toda raiz não-exata. Ou seja todo número que não pode ser expresso como o quociente de dois números racionais.

- raiz quadrada de dois $= 1,414...$;
- raiz quadrada de três$= 1,73...$;
- número pi$= 3,141516$

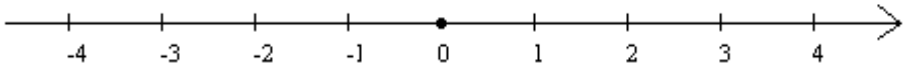
Notação: Denotaremos o conjunto dos irracionais por $\mathbf{I}$

2.1.5 Reais

Definimos o conjunto dos números reais como a união entre os conjuntos dos racionais e irracionais.: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbf{I}$

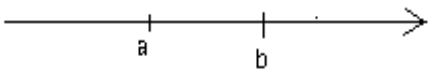
Diante do exposto acima concluímos que
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbf{I} \subset \mathbb{R}$ e $\mathbb{Q} \cap \mathbf{I} = \varnothing$
No conjunto dos reais destacamos os seguintes subconjuntos:
$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ (reais não nulos)
$\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x > 0\}$ (reais positivos)
$\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x < 0\}$ (reais negativos)

Existe uma correspondência biunívoca entre os números reais e os pontos de um eixo ordenado



2.2 Ordenação dos números reais

Na reta real os números estão ordenados, um número a é menor que qualquer número colocado à sua direita.



Exprimimos este fato da seguinte maneira: a é menor que b, ou equivalentemente, que b é maior que a.

Se a e b são números reais então dizemos que $a > b$ (a é maior que b), se $a - b$ é um número positivo. A este fato damos o nome de desigualdade. Outros tipos de desigualdade são $a < b, a \leq b, a \geq b$.

2.2.1 Propriedades das desigualdades

a) Se $a > b$ e $b > c$ então $a > c$, Ex: $10 > 0 > -10 \Rightarrow 10 > -10$

b) Se $a > b$ então $a \pm c > b \pm c$, Ex: $10 \pm 5 > -10 \pm 5 \Rightarrow 15 > -5$ e $5 > -15$

c) Se $a > b$ e $c > 0$ então $ac > bc$, Ex: $10.5 > -10.5 \Rightarrow 50 > -50$

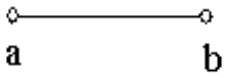
d) Se $a > b$ e $c < 0$ então $ac < bc$, Ex: $10. - 3 < -10. - 3 \Rightarrow -30 < 30$

2.3 Intervalos

Sendo a e b dois números reais, com $a < b$, temos os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$ chamados intervalos.

Intervalo aberto:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \diagup a < x < b\}$$



Intervalo fechado:

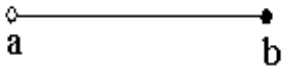
$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \diagup a \leq x \leq b\}$$

Intervalo semi-aberto à direita:

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \diagup a \leq x < b\}$$

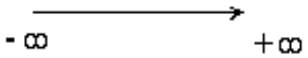
Intervalo semi-aberto à esqueda:

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \diagup a < x \leq b\}$$



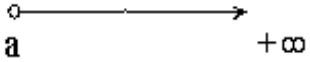
Intervalo infinitos

$$(-\infty, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \diagup -\infty < x < +\infty\} = \mathbb{R}$$

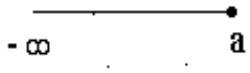


$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \diagup a \leq x < +\infty\}$$

$$(-a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \diagup a < x < +\infty\}$$



$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ -\infty < x \leq a\}$



$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ -\infty < x < a\}$

2.4 Exercicios Resolvidos

1) Usando a notação de conjunto escrever os intervalos
a) $(-3, 6)$ b) $(\pi, 6]$ c) $\left[\sqrt{2}, \sqrt{3}\right]$ d) $[-1, 0)$ e) $(-\infty, 0)$
2) Se $A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 2 < x < 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} / 3 \leq x < 8\}$ determinar
a) $A \cap B$ b) $A - B$ c) $B - A$
3) Representar os seguintes intervalos:
a) $[-1, 1]$ b) $[0, 10)$ c) $(-3, 1]$ d) $(4, 6)$ e) $(5, +\infty)$
4) Resolver graficamente
a) $(\pi, 6] \cup [-1, 1)$ b) $\left[\sqrt{2}, \sqrt{3}\right] \cap \left[\frac{1}{2}, 3\right]$
5) Resolver as inequações
a) $3 + 7x \leq 2x + 9$ b) $7 \leq 2 - 5x < 9$
c) $x^2 - 3x < 10$ d) $\frac{2x-5}{x-2} < 1$

2.5 Exercícios de Fixação

01) Quais das alternativas abaixo é falsa
a) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ b) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ c) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{N} = \mathbb{R}$ d) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{R} \neq \varnothing$
02) Escrever usando o sinal de desigualdade
a) a é um número positivo b) b é um número negativo c) a é maior que b
03) Representar na reta real os seguintes intervalos
a) $[-10, 11]$ b) $[0, 3)$ c) $(-3, 0]$ d) $(3, 7)$ e) $(0, +\infty)$
04) Representar graficamente os intervalos dados pelas desigualdades
a) $2 \leq x \leq 7$ b) $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{5}$ c) $0 \leq x < 2$ d) $-\infty < x < -1$
05) Determinar graficamente
a) $(5, 7] \cap [6, 9]$ b) $(-\infty, 7] \cap [8, 10]$ c) $(-3, 0] \cup (0, 8)$ d) $(0, 7] - (5, 7)$
06) Sejam $M = \{x \in \mathbb{R} / 2 \leq x < 10\}$, $N = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 3 < x < 8\}$ e $P = \{x \in \mathbb{R} / 2 \leq x \leq 9\}$. Determinar o conjunto $P - (M - N)$.
07) Resolva as inequações e exprima a solução em termos de intervalos quando possível:
a) $2x + 5 < 3x - 7$ b) $x - 8 < 5x + 3$
c) $-2 \leq \frac{2x-3}{5} < 7$ d) $\frac{x+1}{2x-3} > 2$

Capítulo 3

Módulo

3.1 Introdução

Definição: O módulo , ou valor absoluto, de um número real "x" é denotado por $|x|$ e definido por

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Exemplos $|9| = 9, \quad \left|-\frac{1}{5}\right| = \frac{1}{5}, \quad |0| = 0$

Da definição de módulo podemos concluir que o módulo de um número é sempre um número não negativo, ou seja, $|x| \geq 0$.

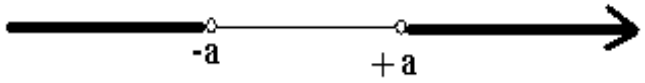
3.2 Propriedades do módulo

i) $|x| = |-x|$; ii) $|x.y| = |x|\,|y|$; iii) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ iv) $|x| \geq 0$ v) $|x+y| \leq |x| + |y|$

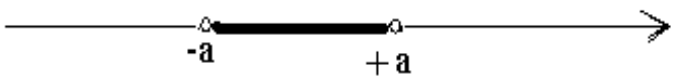
3.3 Inequações modulares

Notemos que se $a > 0$ valem as seguintes conclusões

$|x| > a$ se e somente se $x < a$ ou $x > a$



$|x| < a$ se e somente se $-a < x < a$



3.4 Exercícios resolvidos

1) Completar as implicações abaixo

a) Se $|x| = 5$ então $x =$ b) Se $|x| = 0$ então $x =$

c) Se $|x| < 3$ então $< x <$ 3

d) Se $|x| > 7$ então $x >$ ou $x <$

2) Representar na reta real os pontos que satisfazem as seguintes relações

a) $|x| = 3$ b) $|x| < 3$ c) $|x| > 1$ $|x - 3| = 5$

3) Resolver as inequações

a) $|x - 3| < 4$ b) $\frac{1}{|2x-3|} > 5$ c) $|3x - 4| > 2$

d) $|3x - 2| = |5x + 4|$ e) $|x + 4| \geq 2$

3.5 Exercícios de Fixação

1) Reescreva sem usar o símbolo de valor absoluto

a) $(-5)\,|3 - 6|$ b) $\frac{|-6|}{2}$ c) $|-7| + |4|$ d) $|4 - \pi|$

2) Complete as afirmações

a) se $x < 3$ então $|x + 3| =$

b) se $x > 5$ então $|5 - x| =$

3) Resolver as equações em $\mathbb{R}$

a) $|5x - 3| = 12$

b) $|2x - 3| = |7x - 5|$

c) $\left|\frac{x+2}{x-2}\right| = 5$

d) $|3x + 2| = 5 - x$

e) $2x - 7 = |x| + 1$

4) Resolva a desigualdade e exprima a solução em termos de intervalos, quando possível

a) $|x + 3| < 0,01$

b) $|2x + 5| < 4$

c) $|3x - 7| \geq 5$

d) $|-11 - 7x| > 6$

e) $3 \leq |x - 2| \leq 7$

f) $\frac{2}{|x+3|} < 1$

g) $|x + 4| \leq |2x - 6|$

h) $\left|\frac{7-2x}{5+3x}\right| \leq \frac{1}{2}$

i) $|x - 1| + |x + 2| \geq 4$

j) $\left|\frac{5}{2x-1}\right| \geq \left|\frac{1}{x-2}\right|$

k) $\frac{1}{|x+1||x-3|} \geq \frac{1}{5}$

Capítulo 4

Expressões Algébricas

4.1 Introdução

As expressões algébricas são expressões matemáticas que apresentam letras e podem conter números. São também denominadas expressões literais. As letras nas expressões são chamadas variáveis o que significa que o valor de cada letra pode ser substituída por um valor numérico.

Para resolver ou simplificar uma expressão algébrica devemos utilizar as propriedades da potenciação e radiciação, fatoração e os produtos notáveis.

Como as propriedades mais utilizadas são as propriedades da potenciação damos a seguir a lista dessas propriedades

Propriedades	*Alguns Exemplos*
$x^o = 1 (x \text{ não nulo})$	$5^o = 1$
$x^m x^n = x^{m+n}$	$6^2 6^3 = 6^{2+3} = 6^5 = 7776$
$x^m y^m = (xy)^m$	$7^3 5^3 = (35)^3 = 42\,875$
$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$	$\frac{7^6}{7^2} = 7^4 = 2401$
$\frac{x^m}{y^m} = \left(\frac{x}{y}\right)^m$	$5^2 \div 3^2 = (\frac{5}{3})^2$
$(x^m)^n = x^{mn}$	$(5^3)^2 = 5^6 = 15625$
$x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{1}{n}}$	$6^{\frac{3}{2}} = \left(6^3\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{216} = 6\sqrt{6}$
$x^{-m} = \frac{1}{x^m}$	$3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$
$x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{x^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{(x^m)^{\frac{1}{n}}}$	$\frac{1}{6^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{6\sqrt{6}}$

Podemos escrever a potenciação como uma radiciação da seguinte forma

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \qquad \text{e} \qquad x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

Dada uma expressão algébrica qualquer, podemos transformá-la, se possível, no produto de duas ou mais outras expressões algébricas. A este procedimento damos o nome de fatoração.

Fator comum: A expressão $ax + bx$ tem como fator comum o x, neste caso podemos colocar o x em evidência e obter $ax + bx = (a + b)x$

Agrupamento: Podemos utilizar a fatoração diversas vezes na mesma expressão: Exemplo

$$ax + bx + ay + by = (a + b)x + (a + b)y = (a + b)(x + y)$$

4.2 Exercícios Resolvidos 1

1) $10m + 10n$
2) $6xy^5 + 12x^2y^2$
3) $4bx - 32b + 4by$
4) $4x + 4z - bx - bz$
5) $x + x^2 + x^3 + 1$

4.3 Produtos Notáveis:

Os produtos notáveis são aqueles produtos entre expressões algébrica que são freqüentemente usados e para evitar a multiplicação de termo a termo, existem algumas fórmulas que convém serem memorizadas:

1) Soma pela diferença: quadrado do primeiro menos o quadrado do segundo.

$$(a + b).(a - b) = a^2 - b^2$$

2) Quadrado da soma: quadrado do primeiro, mais duas vezes o primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

3) Quadrado da diferença: quadrado do primeiro, menos duas vezes o primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Existem outras outras fórmulas como por exemplo

$$\begin{aligned} (a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a - b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{aligned}$$

4.4 Exercícios Resolvidos 2

1) Reescreva usando produtos notáveis:
a) $(a + 2)(a - 2)$
b) $(xy + 3z)(xy - 3z)$
c) $(x^2 - 4y)(x^2 + 4y)$
e) $(x + 3)^2$

f) $(2a-5)^2$
g) $(2xy+4)^2$
i) $(x+4)^3$
j) $(2a+b)^3$
l) $(a-1)^3$
m) Calcule 41.39 usando um produto notável.
n) Calcule 101.99 usando um produto notável.

4.5 Exercícios de Fixação

1) A soma de dois números é igual a 10 e a soma dos seus cubos é igual a 100. Qual o valor do produto desses números?

2) Calcule o valor de M na expressão abaixo, para: $a = -700, b = -33, x = 23,48$ e $y = 9,14345$.

$$M = \frac{(ax+by)^2 + (ay-bx)^2}{(ay+bx)^2 + (ax-by)^2}$$

1) Desenvolva:
a) $(3x+y)^2$
b) $(\frac{1}{2}+x^2)^2$
c) $((\frac{2x}{3})+4y^3)^2$
d) $(2x+3y)^3$
e) $(x^4+(\frac{1}{x^2}))^3$
2) Efetue as multiplicações:
a) $(x-2)(x-3)$
b) $(x+5)(x-4)$
3) Simplifique as expressões:
a) $(x+y)^2 - x^2 - y^2$
b) $(x+2)(x-7)+(x-5)(x+3)$
c) $(2x-y)^2 - 4x(x-y)$
4) Simplifique as frações algébricas
a) $\frac{x^2-x}{x-1}$
b) $\frac{x+2}{x^2+4x+4}$
c) $\frac{a^2-9}{a-3}$
d) $\frac{x-y}{x^2-y^2}$
e) $\frac{x^2+6x+9}{3x+9}$
f) $\frac{6xy-3x^2}{4y^2-2xy}$
g) $\frac{ax+ay}{x^2+2xy+y^2}$
h) $\frac{x^2-4}{x+2}$
i) $\frac{ax^2-ay^2}{x^2-2xy+y^2}$

5) Simplifique a expressão

$$\frac{y+z}{(x-y)(x-z)} + \frac{x+z}{(y-x)((y-z)} + \frac{x+y}{(z-x)(z-y)}$$

6) Desenvolver as expressões e simplificar se possível
a) $(2a-3b)^2 =$
b) $(a-b)^2 + (a+b)^2 =$
c) $(a-b)^2 - (a+b)^2 =$
d) $(3z-y)^2 - (z-2y)^2 =$
e) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2) =$

7) A expressão que deve ser somada a $4x^2y^2 + 10xy$ para obter o quadrado de $4x - 2xy$ é:

8) Calcular $678959^2 - 678958^2$

9) Simplicar a expressão, considerando que $a \neq \pm b$

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2} \div \frac{a-b}{a+b}$$

10) Se $m+n+p=6$, $mnp=2$ e $mn+mp+np=1$ então o valor de

$$\frac{m^2+n^2+p^2}{mnp}$$

é:

11) Calcule o valor da expressão

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+xz}$$

quando $xyz=1$

Capítulo 5

Funções

5.1 Introdução

Definição: Dados dois conjuntos A e B e uma relação f de A em B, dizemos que f é uma função ou aplicação se, e somente se, para todo elemento x de A existe, em correspondência, um único elemento y de B tal que o par (x,y) pertença a relação f. Uma função geralmente é dada por uma expressão que estabelece a correspondência entre os conjuntos A e B.

Qualquer função possui sempre os seguintes três elementos básicos:

a) Um conjunto de "saída"chamado Domínio

b) Um conjunto de "chegada"chamado Contradomíno

c)) Uma lei ou regra que permite associar os elementos do Domínio com o s elementos do contradomínio

Notação: Se A é o domíno, B o contradomínio e f é uma função de A em B, denotamos

$$\begin{array}{rcl} f & : & A \to B \\ & & x \to f(x) \end{array}$$

Domínio: O Domínio da função é o conjunto dos pontos para os quais faz sentido a aplicação da regra de correspondência entre os conjuntos A e B. Nesse estudo inicial de funções usaremos sempre como domínio um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ e o contradomínio será sempre $B = \mathbb{R}$. Notação: O domínio de uma funação f será denotado por $Dom(f)$

Imagem: A imagem de uma função $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, é definido como sendo o conjunto dos pontos $y \in \mathbb{R}$ tais que existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Observe que a imagem de uma função f está contida no contradmínio da função f. Denotamos o conjunto imagem da função f por $\mathrm{Im}(f)$.

Gráfico: O gráfico de uma função é um subconjunto do produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Definimos o gráfico de uma função, denotado por Graf(f), o seguinte conjunto $Graf(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ / \ y = f(x)\}$. O gráfico de uma função f pode ser visualizado geometricamente usando-se o sistema cartesiano ortogonal onde podem ser vistos o conjunto de pontos da forma $(x, f(x))$

Função Crescente e Decrescente: Uma função é chamada de função crescente se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$. Uma função é chamada de função decrescente se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Exemplo: Considere a função f cuja regra é dada por $f(x) = \sqrt{x-1}$. Neste caso a expressão $\sqrt{x-1}$ só tem sentido para $x \geq 1$, portando o domínio da função, denotado por $D(f)$, é $D(f) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 1\}$. Logo podemos escrever

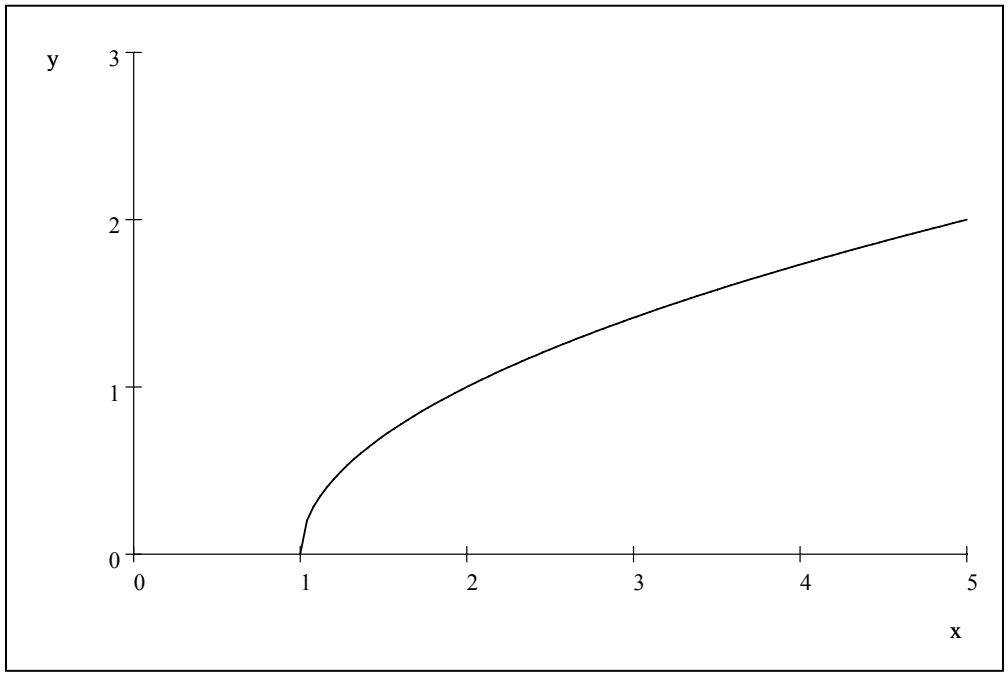
$$\begin{array}{rcl} f & : & [1, +\infty) \to \mathbb{R} \\ & & x \to f(x) = \sqrt{x-1} \end{array}$$

Como $x \geq 1 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x-1} \geq 0 \Rightarrow \text{Im}(f) = \mathbb{R}_+$.

Como $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \Longrightarrow \sqrt{x_1 - 1} < \sqrt{x_2 - 1}$ (Note que isto vale porque $x_1 - 1 \geq 0$ e $x_2 - 1 \geq 0$) portanto $f(x_1) < f(x_2)$.

Logo f é uma função crescente.

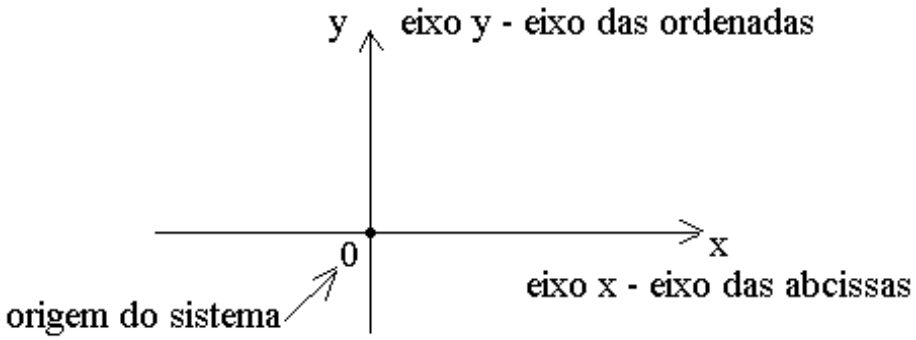
Gráfico de $f(x) = \sqrt{x-1}$



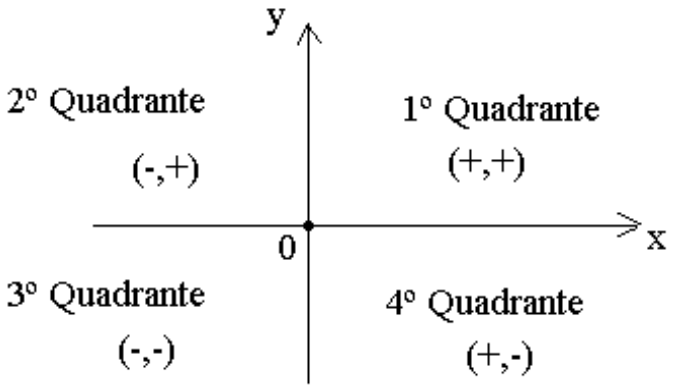
5.2 Sistema Cartesiano Ortogonal

Na conceituação de *abcissa* de um ponto, baseamo-nos na correspondência biunívoca entre os pontos de um eixo e os números reais. Analogamente, o conceito de *sistema cartesiano* surgiu para estabelecer-se uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano e o conjunto dos pares ordenados de números reais

Plano Cartesiano com identificação dos eixos



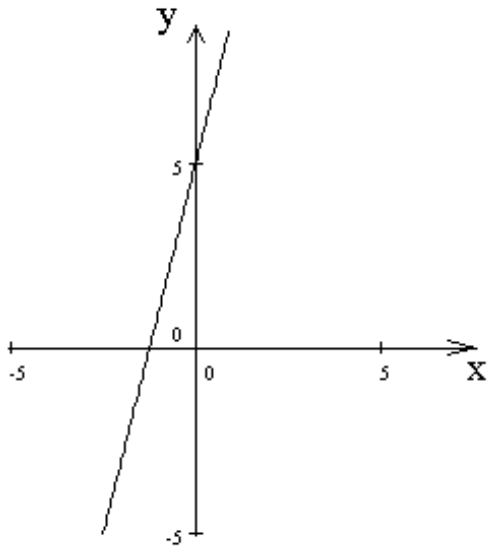
Plano Cartesiano com identificação dos quadrantes



5.3 Função Afim

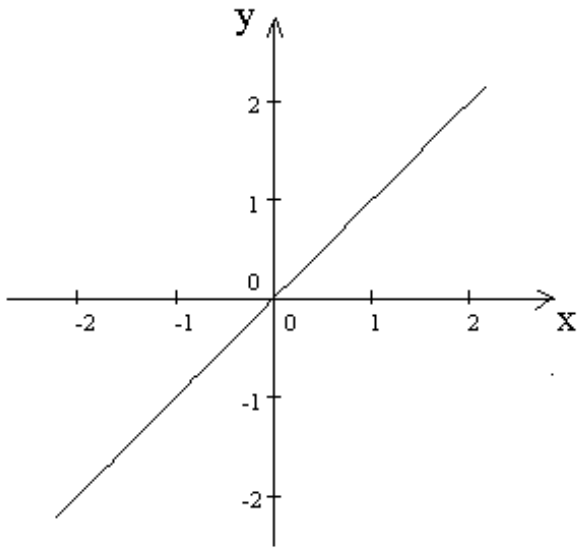
Função afim: Sejam a e b números reais, sendo a não nulo. Uma função afim é uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que a cada $x \in \mathbb{R}$ associa $f(x) = ax + b$. O gráfico de uma função afim é uma reta. O número a representa o coeficiente angular da reta e o número b representa o coeficiente linear. Se $a > 0$ a função afim é crecente e se $a < 0$ a função afim é decrescente

Exemplo : $f(x) = 4x + 5$



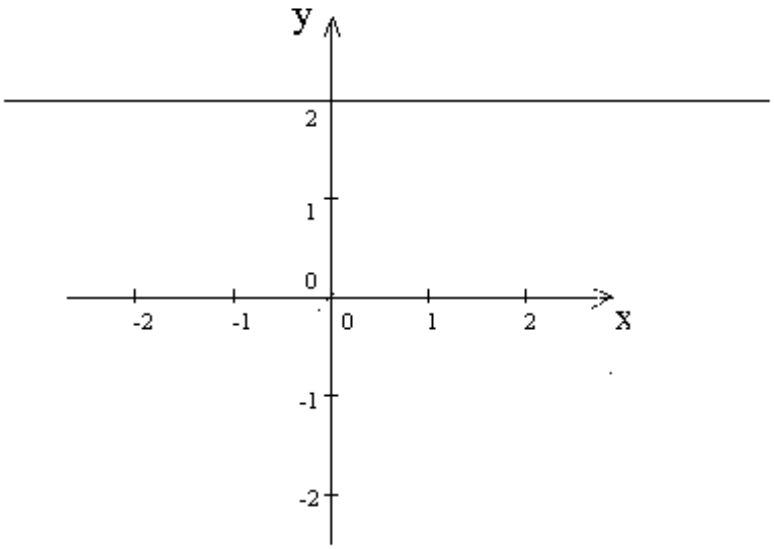
Função linear: Sejam a um número real, sendo a não nulo. Uma função linear é uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que para cada $x \in \mathbb{R}$ associa $f(x) = ax$. Este é um caso particular da função afim, neste caso o coeficiente linear é zero, ou seja, o gráfico da função linear sempre passa pela origem

Exemplo: $f(x) = x$

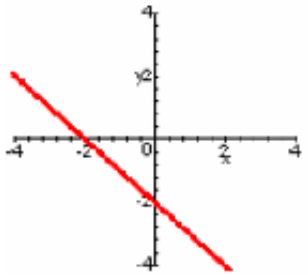
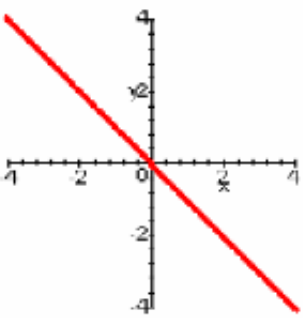
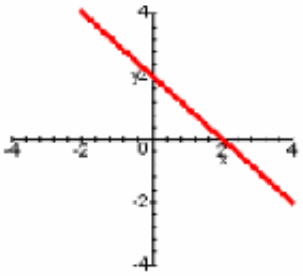
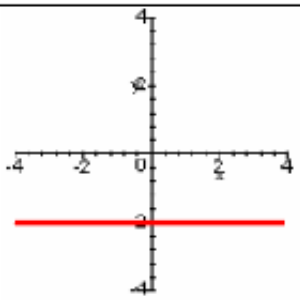
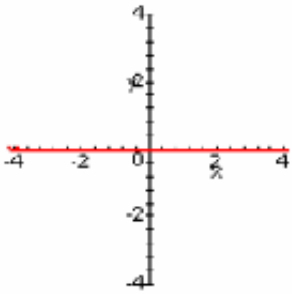
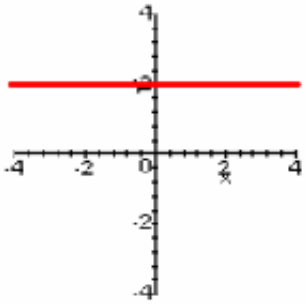
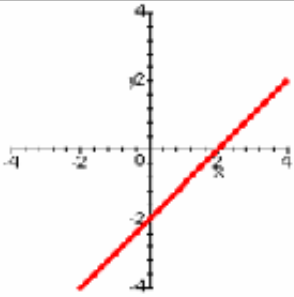
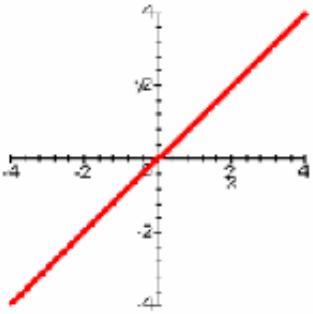
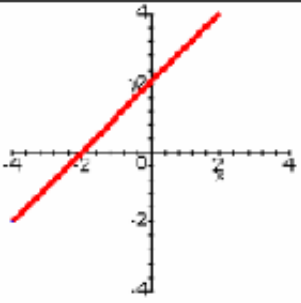


Função constante: Sejam a um número real, sendo a não nulo. Uma função linear é uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que para cada $x \in \mathbb{R}$ associa $f(x) = b$. Neste caso o coeficiente angular é zero, ou seja, o gráfico da função constate é sempre paralelo ao eixo x e cruza o eixo y no ponto $(0, b)$.

Exemplo: $f(x) = 2$



RESUMO: Função Afim $f(x) = ax + b$, a é o coeficiente angular e b é

a < 0			
a = 0			
a > 0			
	b < 0	b = 0	b > 0

5.4 Função Modular

Função Modular: Definimos função modular a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$

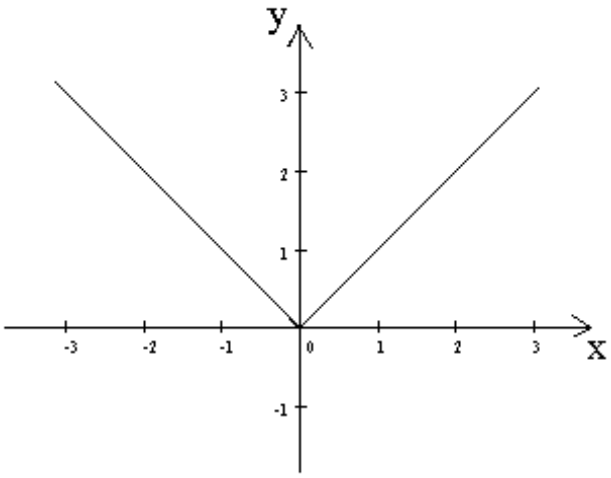
Da definição de módulo a função modular pode ser escrita como

$$f(x) = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

Observe que a função modular só assume valores positivos, ou seja, $f(x) = |x| \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Gráfico:

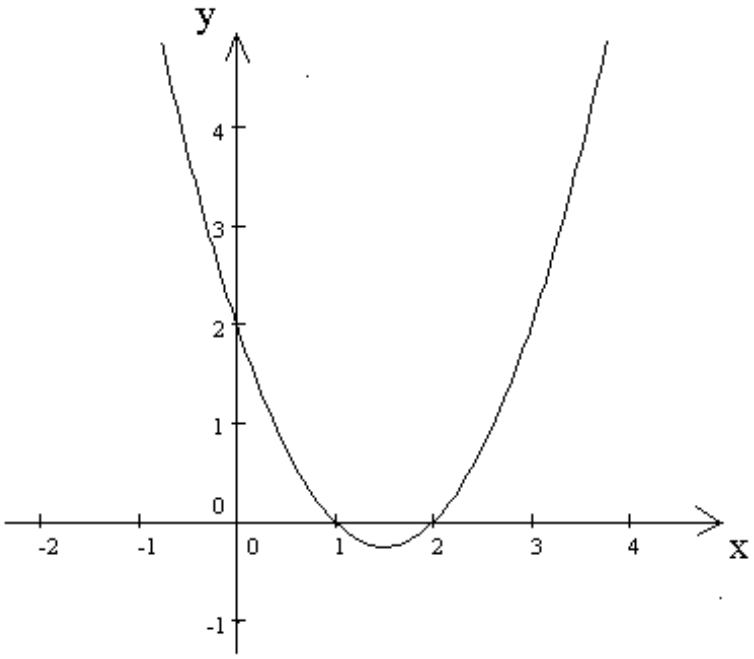
$y = |x|$



5.5 Função quadrática

Função quadrática: Sejam a,b e c números reais, sendo a não nulo. Uma função quadrática é uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que para cada $x \in \mathbb{R}$ associa $f(x) = ax^2 + bx + c$. O gráfico de uma função quadrática é uma parábola.

Exemplo: $f(x) = x^2 - 3x + 2$



Concavidade: No gráfico da párabola $f(x) = ax^2 + bx + c$:

i) Se $a > 0$ a parábola tem concavidade voltada para cima e

ii) Se $a < 0$ a concavidade é voltada para baixo.

Zeros: Os valores de x para os quais temos $f(x) = 0$ são chamados os zeros da função quadrática. Os zeros são as abcissas dos pontos onde o gráfico da parábola intercepta o eixo dos x. Para encontrarmos os zeros da função quadrática devemos resolver a equação $ax^2 + bx + c = 0$. Uma das formas mais comuns de resolver essa equação é usando a famosa fórmula de Baskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Fazendo $\Delta = b^2 - 4ac$, Δ é chamado de discriminante, podemos escrever a fórmula de Baskara da seguinte forma:

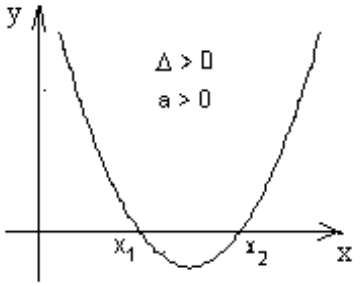
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

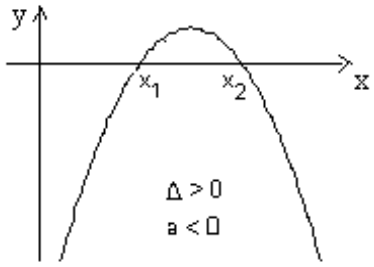
Se $\Delta > 0$ os zeros são reais e ddistintos. Se $\Delta < 0$ a equação não possui zeros reais e se $\Delta = 0$ a equação possui zeros reais e iguais

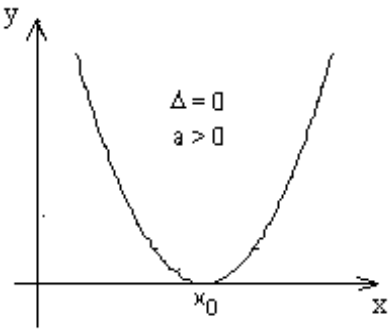
Vértices da parábola: As coordenadas dos vértices da parábola são dados por

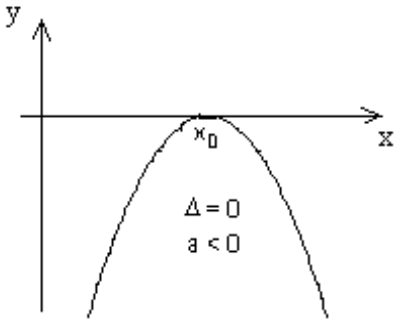
$$x_v = -\frac{b}{2a} \qquad \text{e} \qquad y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

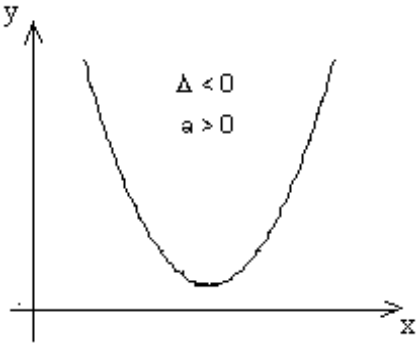
Gráficos: Portanto Dependendo do valor de Δ e do sinal de a temos os seguintes casos:

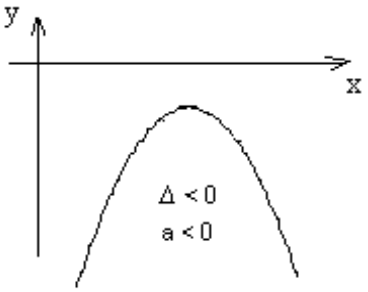












5.6 Função Raiz n-ésima de x

Definimos função raiz n-ésima de x a função $f : Domf(f) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

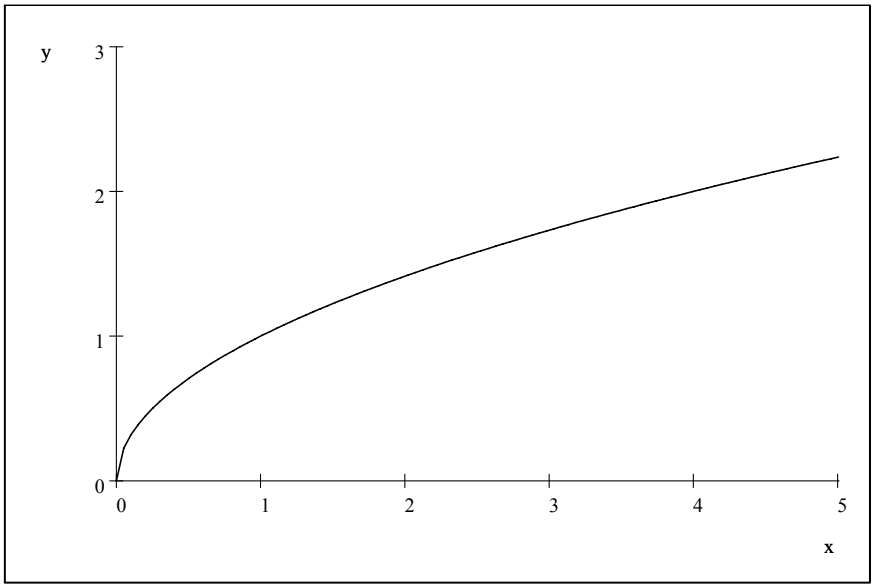
Se n é um número par então $Dom(f) = [0, +\infty)$ e $\text{Im}(f) = [0, +\infty)$

Se n é um número impar então $Dom(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$

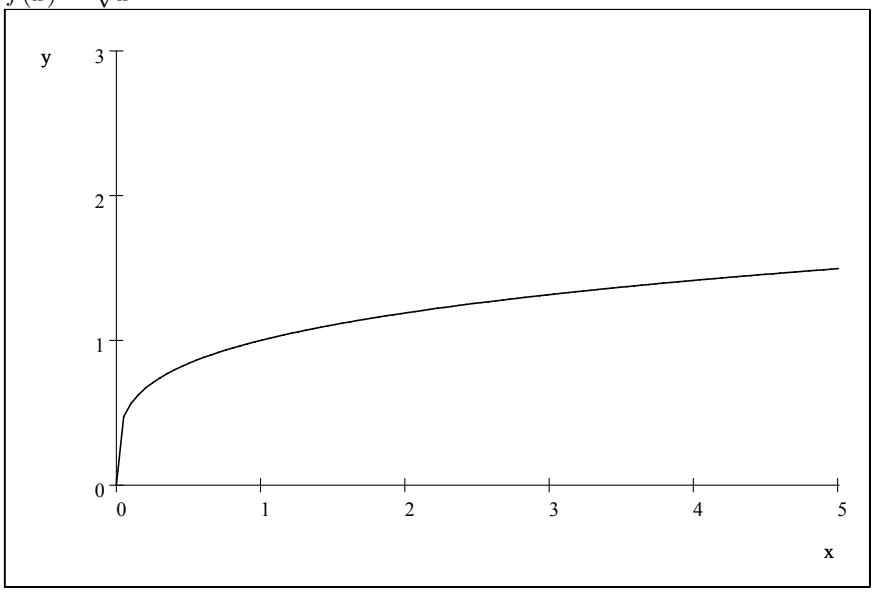
Exemplos

Função raiz quadrada de x

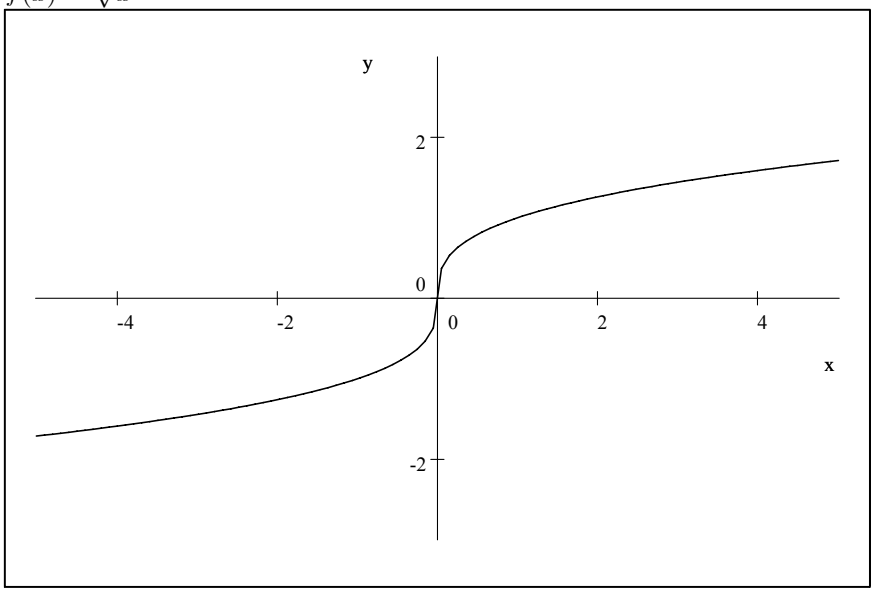
$, f(x) = \sqrt{x}$



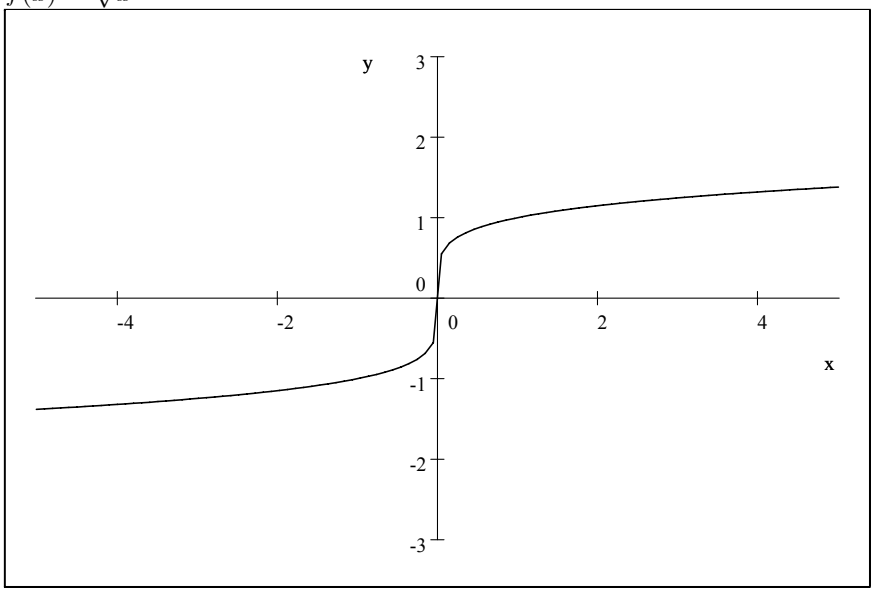
Função raiz quarta de x
$f(x) = \sqrt[4]{x}$



Função raiz cúbica de x
$f(x) = \sqrt[3]{x}$



Função raiz quinta de x
$f(x) = \sqrt[5]{x}$



5.7 Função Exponencial

Função Exponencial: Dado um número real $a > 0, a \neq 1$, definimos função exponencial de base a à função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a^x$.

Se $a > 1$ a função $f(x) = a^x$ é uma função crescente, ou seja, $x_1 < x_2$ se e somente se $f(x_1) < f(x_2)$. Isto quer dizer que se $x_1 < x_2$ então $a^{x_1} < a^{x_2}$.Se $a < 1$ a função $f(x) = a^x$ é uma função decrescente, ou seja, $x_1 < x_2$ se e somente se $f(x_1) > f(x_2)$. Isto quer dizer que se $x_1 < x_2$ então $a^{x_1} > a^{x_2}$.

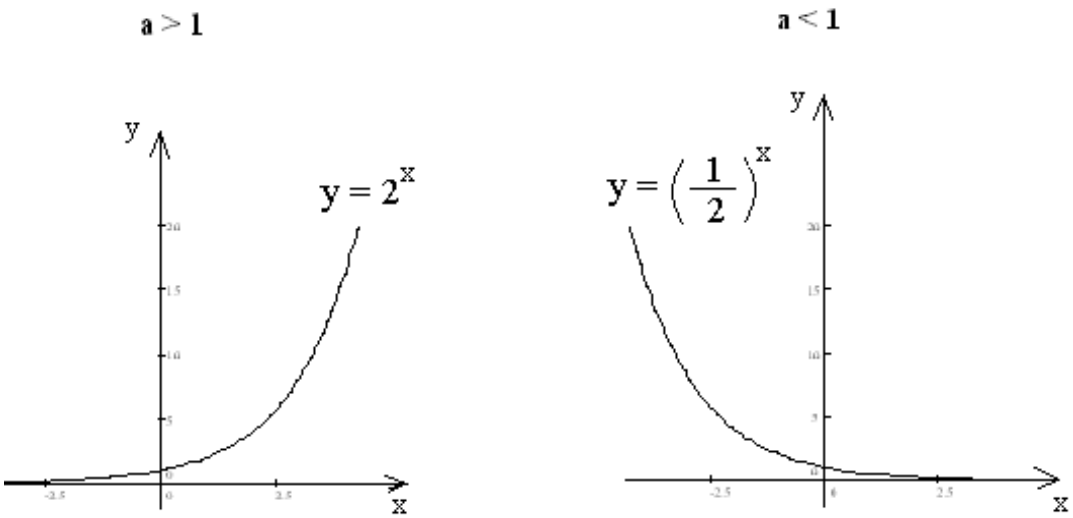
Observe que:

a) O domínio da função exponencial é $\mathbb{R}$

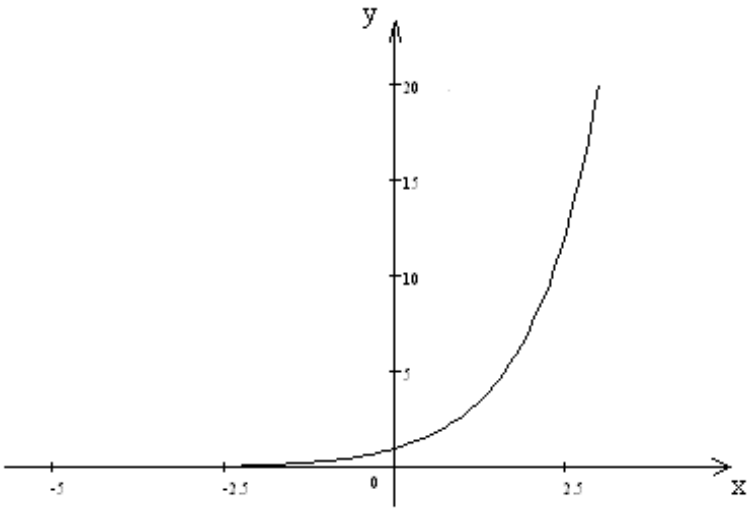
b) A função exponencial só assume valores positivos, isto é, $f(x) = a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$

c) O gráfico da função exponencial sempre passa pelo ponto $(0, 1)$.

Gráficos: Dependendo do valor de a temos as seguintes situações



Um caso particular da função exponencial e que é muito usado em aplicações práticas é a função exponencial de base $e = 2.7183..$ definida por $f(x) = e^x$. O gráfico de $y = e^x$ tem a seguinte forma:



5.8 Função Logarítmica

Logarítmo: Dado $a > 0$, $a \neq 1$, e um número real positivo b denominamos de logarítmo de b na base a ao expoente que se deve elevar à base a de modo que o resultado obtido seja igual a b. Matematicamente escrevemos

$$\log_a b = x \iff a^x = b$$

Propriedades dos logarítmos:

a) $\log_a 1 = 0$

b) $\log_a a = 1$

c) $\log_a a^m = m$

d) $\log_a b = \log_a c \Longleftrightarrow b = c$

e) $a^{\log_a b} = b$

f) $\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c$

g) $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

h) $\log_a b^m = m.\log_a b$

i) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

Função Logarítmica: Dado um número real a, $a > 0$ e $a \neq 1$, definimos função logarítmica à função $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_a x$.

Se $a > 1$ a função $f(x) = \log_a x$ é uma função crescente, ou seja, $x_1 < x_2$ se e somente se $f(x_1) < f(x_2)$. Isto quer dizer que se $x_1 < x_2$ então $\log_a x_1 < \log_a x_2$.

Se $0 < a < 1$ a função $f(x) = \log_a x$ é uma função decrescente, ou seja, $x_1 < x_2$ se e somente se $f(x_1) > f(x_2)$. Isto quer dizer que se $x_1 < x_2$ então $\log_a x_1 > \log_a x_2$.

Observe que:

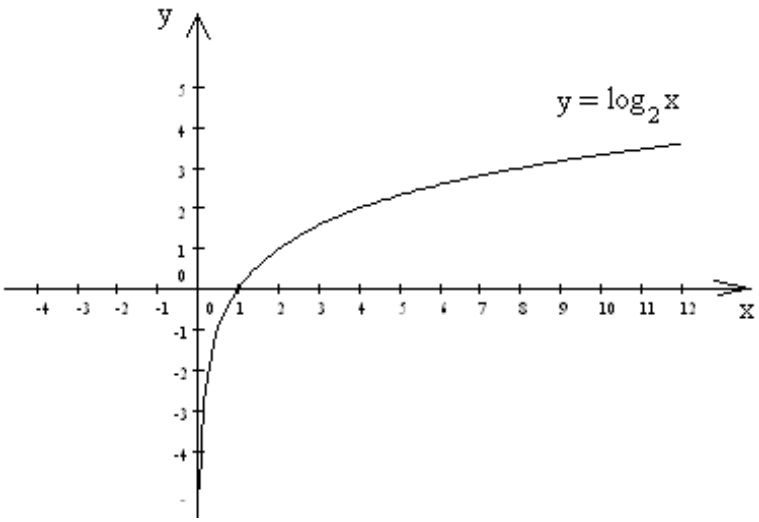
a) O domínio da função logarítmica é $\mathbb{R}_+^*$

b) A função logarítmica assume todos os valores reais

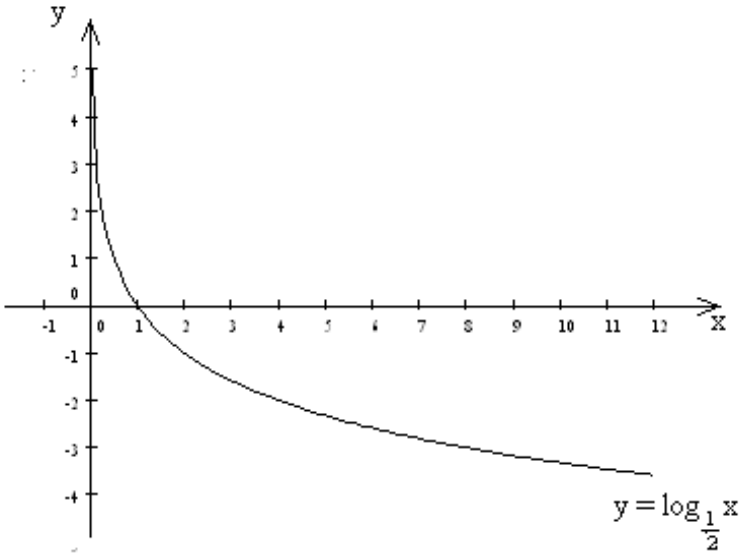
c) O gráfico da função logarítmica sempre passa pelo ponto $(1, 0)$.

Gráficos: Dependendo do valor de a temos as seguintes situações:

a > 1



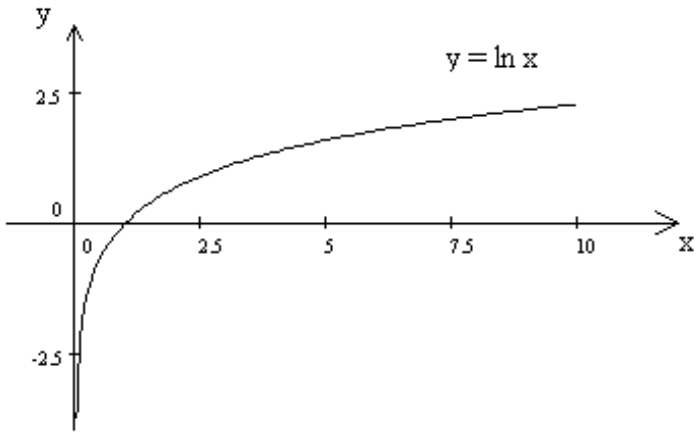
0 < a < 1



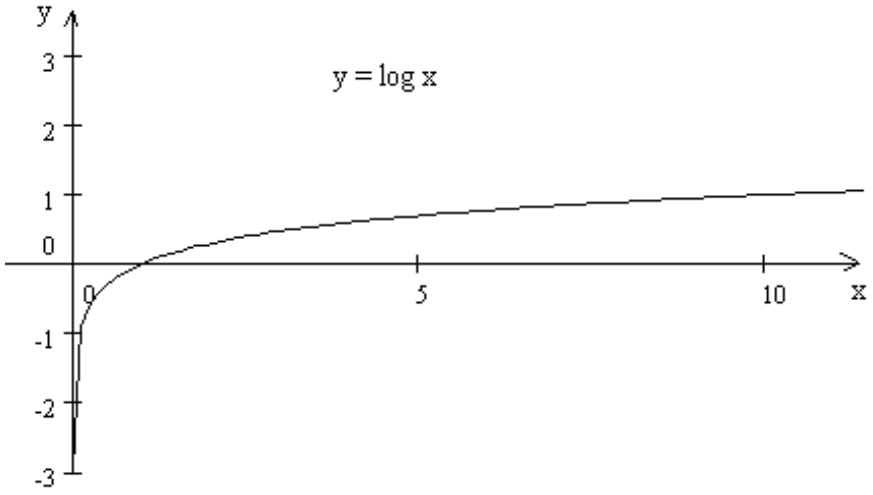
Um caso particular da função logarítmica e que é muito usado em aplicações práticas é a função logarítmica de base $e = 2.7183$ definida por $f(x) = \log_e x$.Para $\log_e x$ usamos a notação $\ln x$. Portanto $f(x) = \ln x = \log_e x$.

Quando a base do logarítmo é 10 não precisamos escrever a base, ou seja, para $\log_{10} x$ usamos a notação $\log x$. Portanto $f(x) = \log x = \log_{10} x$

O gráfico de $y = \ln x$ tem a seguinte forma:



O gráfico de $y = \log x$ tem a seguinte forma:



5.9 Tipos importantes de funções

Função par: Se $f(x) = f(x)$, para todo $x \in Dom(f)$ então dizemos que a função f é uma função par. (note que o gráfico é uma curva simétrica pelo eixo y).

Exemplos: $f(x) = x^2$ é uma função par pois $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

$g(x) = \cos(x)$ é uma função par, já que $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$

Função ímpar: Se $f(-x) = f(x)$, para todo $x \in Dom(f)$ então dizemos que a função f é uma

função ímpar. (note que o gráfico é uma curva simétrica pela origem).

Exemplos: $f(x) = x^3$ é uma função impar pois $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.

Função injetora: Se para quaisquer x_1 e x_2 no domínio de f, $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, então

dizemos que f é uma função injetora.

Exemplos: $f(x) = x^3$ é uma função injetora já que $x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1^3 \neq x_2^3 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

$f(x) = x^2$ não é injetora pois tomando $x_1 = 3$ e $x_2 = -3$ temos $x_1 \neq x_2$ mas $f(x_1) = 9$ e $f(x_2) = 9 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

Geometricamente, para uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se qualquer reta paralela ao eixo dos x cortar o gráfico de f´em apenas um ponto a função f é uma função injetora.

Função sobrejetora: é aquela em que sua imagem coincide com seu contra-domínio.

Função bijetora: é aquela que é ao mesmo tempo bijetora e sobrejetora.

Função composta: Sejam $g : A \to B$ e $f : \mathrm{Im}(g) \to C$. A função $f \circ g : A \to C$ dada por

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ é a função composta da função f com a função g.

Exemplos: $g(x) = x-3$ e $f(x) = |x|$ então $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-3) = |x-3|$

$h(x) = e^x$ e $v(x) = \sin x$ então $(v \circ h)(x) = v(h(x)) = v(e^x) = \sin(e^x)$

Observação: Note que em geral $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$.No exemplo acima $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(|x|) = |x| - 3$

$\Rightarrow (g \circ f)(x) = |x| - 3 \neq |x-3| = (f \circ g)(x)$

Função inversa: Seja $y = f(x)$ uma função onde $f : A \to B$. Se, para cada $y \in B$, existir exatamente um valor de $x \in A$ tal que $y = f(x)$, então podemos definir uma função $g : B \to A$ tal que $x = g(y)$. A função g definida desta maneira é chamada função inversa de f e denotada por f^{-1}.

Observação :a) Pela definição podemos concluir que para existir a função inversa a função f deve ser bijetora.

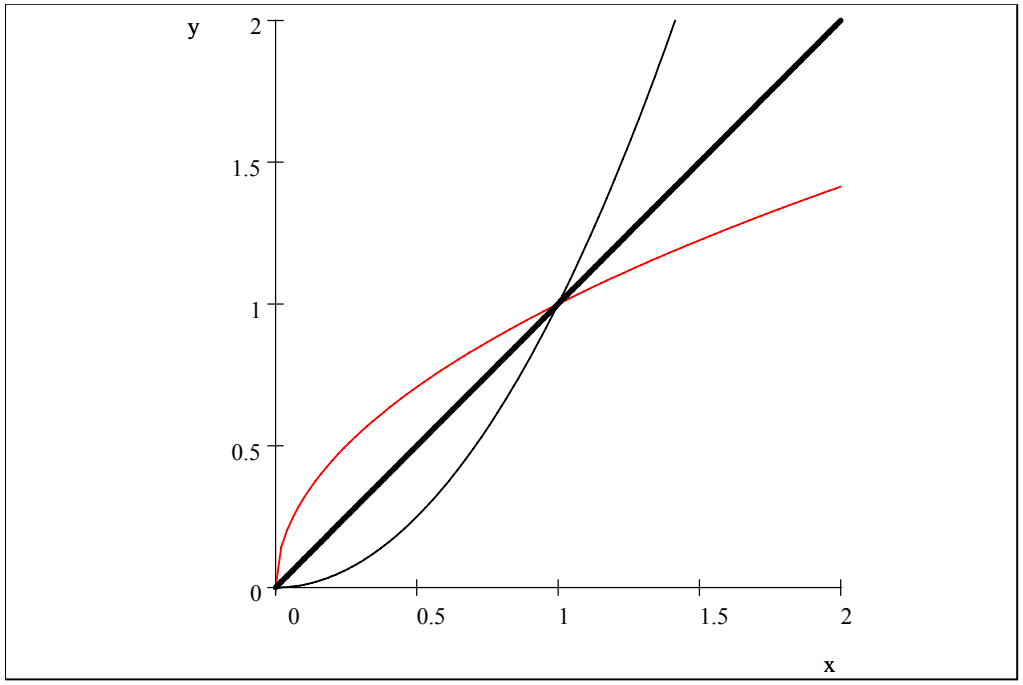
b) Se a função f possui uma inversa f^{-1} então $\left(f \circ f^{-1}\right)(y) = y$ e $\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x$

Exemplos: A função $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, definida por $f(x) = x^2$ tem como inversa a função $f^{-1} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ dada por $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3$ tem como inversa a função $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

Geometricamente o gráfico da função inversa f^{-1} e o gráfico da função f são simétricos em relação ao eixo Ox :

$f(x) = x^2$



5.10 Construção de Gráficos

Se c é um número real positivo então:

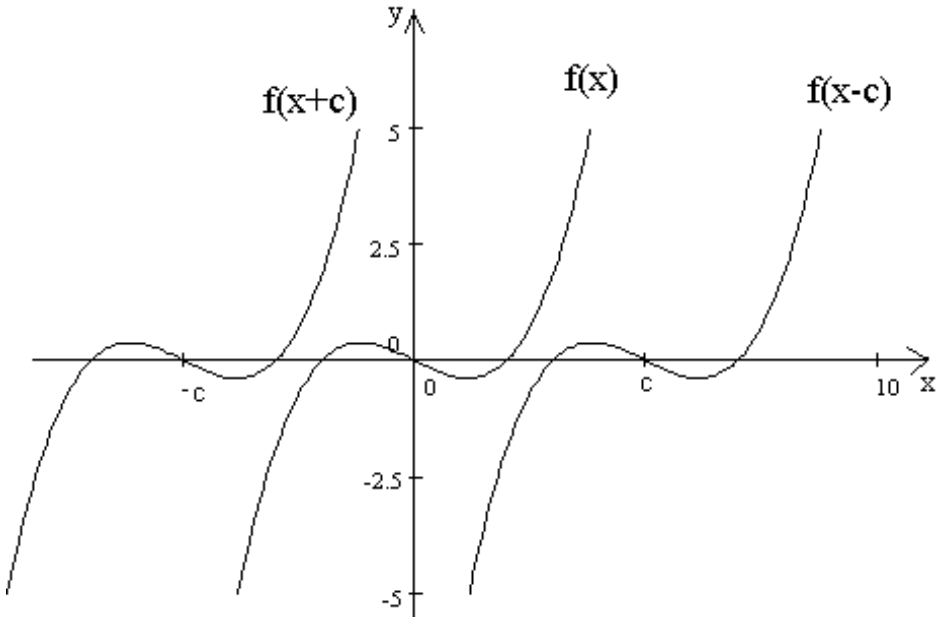
O gráfico de $f(x+c)$ é o gráfico de $f(x)$ deslocado c unidades para a esquerda.

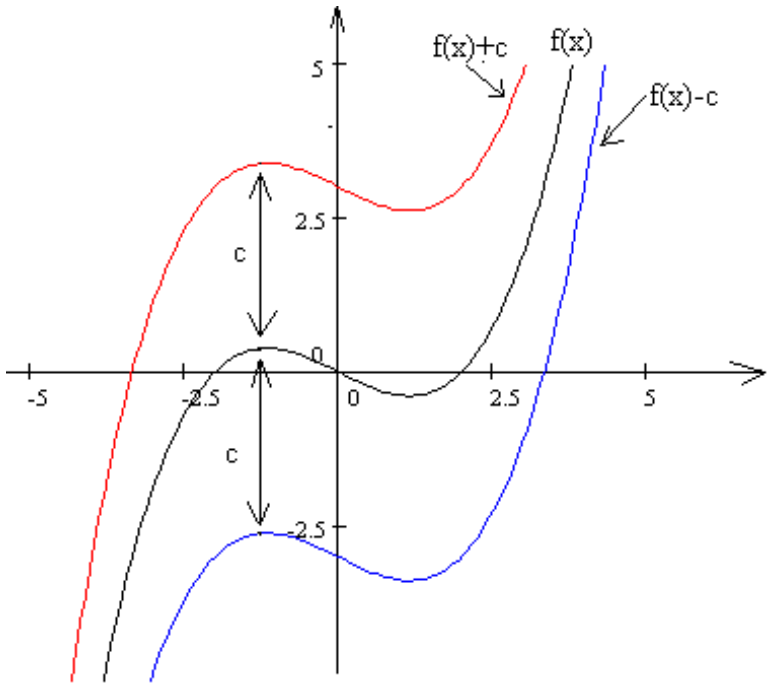
O gráfico de $f(x-c)$ é o gráfico de $f(x)$ deslocado c unidades para a direita.·

O gráfico de $f(x)+c$ é o gráfico de $f(x)$ deslocado c unidades para cima.

O gráfico de $f(x)-c$ é o gráfico de $f(x)$ deslocado c unidades para baixo.

O gráfico de $|f(x)|$ é igual ao gráfico de $f(x)$ se x é positivo e é o gráfico de $f(x)$ refletido através do eixo Ox se x é negativo


y
f(x+c)
f(x)
f(x-c)
5
2.5
0
-2.5
-5
-c
0
c
10
x


f(x)+c
f(x)
f(x)-c
5
2.5
0
-2.5
c
c
-5
-2.5
0
2.5
5

5.11 Exercícios Resolvidos

1) Encontre os zeros da seguintes funções:

a) $f(x) = 2x^2 - 3x - 5$

b) $f(x) = -3x^2 + 2x$

c) $f(x) = (7x - 1)(2x - 3)$

2) Resolver as inequações:

a) $x^2 - 4x + 3 > 0$

b) $3x^2 - 4x < 0$

c) $-2x^2 + 7x - 3 \leq 0$

d) $x^2 + x + 1 > 0$

e) $-2x^2 + 5x - 4 \geq 0$

3) Resolver as inequações exponenciais

a) $4^x > \frac{1}{4}$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1}$

c) $3^{x^2} > 3^x$

4) Resolver as inequações logaritmicas

a) $\log_3(x^2 - x + 3) > 2$

b) $0 < \log_2(2x - 1) \leq 1$

c) $\log_{\frac{1}{2}}(x + 2) + \log_{\frac{1}{2}}(x - 3) > 2$

5) Determinar o domínio da função definida por $y = \sqrt{3^{x+2} - 3^{-x}}$

5.12 Exercícios de Fixação

1) Sendo $f(x) = 3x - 1$

a) Calcular $f(0)$

b) Calcular $f(-\frac{1}{3})$

c) Para que valor de x, temos $f(x) = 0$.

d) Sendo $f(x) = ax + b$ uma função afim e sendo p e q números reais e distintos, calcular $f(p), f(q)$ e mostrar que $\frac{f(p)-f(q)}{p-q} = a$

2) Resolver as inequações

a) $(2x - 3)(x - 1) > 0$

b) $(x - 2)(3x + 1) < 0$

c) $x^2 \geq 5$

d) $x^2 + 1 < 2x^2 - 3 \leq -5x$

e) $0 < x^2 + x + 1 < 1$

f) $4 < x^2 - 12 \leq 4x$

g) $2x + 1 \leq x^2 < 2x + 3$

h) $-1 \leq x^2 - 3 \leq 1$

i) $\left(x^2 + 4x + 3\right)(2x + 5) < 0$

j) $\left|2x^2 + 3x + 3\right| \leq 3$

k) $x^3 - x^2 - x - 2 > 0$

3) Resolver as inequações quocientes

a) $\frac{x^2+x-6}{2x^2+3x-2} \geq 0$

b) $\frac{(x-2)^4}{x^2-2x-15} \leq 0$

c) $\frac{-6x^2-x+2}{6x^2-5x+1} > 0$

d) $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} \leq 0$

e) $\frac{x-1}{x-2} < \frac{x-3}{x-4}$

f) $\frac{2}{2x+3} \geq \frac{2}{x-5}$

g) $\frac{x-2}{3x+5} \leq 4$

h) $\frac{x+1}{2x-3} > 2$

i) $\frac{x+1}{2-x} < \frac{x}{3+x}$

4) Resolver as equações exponenciais

a) $2^{x-3} + 2^{x-1} + 2^x = 52$

b) $\left(\sqrt[3]{2^{x+4}}\right)^{x-2} = 1$

5) Resolver as inequações exponenciais

a) $\left(\sqrt{3}\right)^{2x+4} > \left(\sqrt{3}\right)^{3x}$

b) $5^{x^2-8x-20} < 1$

c) $(0,3)^{4x^2-2x-2} \geq (0,3)^{2x-3}$

6) Resolver as inequações logarítmicas

a) $\log_2(x-2) - \log_{\frac{1}{2}}(x-3) < 1 \Longrightarrow S = \{x \in \mathbb{R} / 3 < x < 4\}$

b) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - \frac{3}{2}) \geq 1 \Longrightarrow S = \left\{x \in \mathbb{R} / -\sqrt{2} \leq x < -\sqrt{\frac{3}{2}} \text{ ou } \sqrt{\frac{3}{2}} < x < \sqrt{2}\right\}$

c) $x^{(\log_a x)+1} > a^2 x$ para $0 < a < 1$.

d) Dar o domínio da função $f(x) = \sqrt{\log(x^2 - 2x)}$

7) Se uma bola é atirada para cima com uma velocidade inicial de 32 m/s, então, após t segundos, a distância s acima do ponto de partida, em metros, é dada por $s = 32t - 16t^2$. Em que instante a bola estará no ponto mais alto e qual será esta altura? (Faça um esboço do gráfico da equação).

8) A energia potencial elástica W armazenada numa mola esticada é dada pela expressão $W = \frac{1}{2}kx^2$ onde k é a constante elástica da mola e x é o quanto a mola está alongada

Para uma constante elástica igual a 10 unidades

i) Qual o número que exprime o valor de sua energia potencial W, para um alongamento de 2 unidades

ii) De quanto está esticada a mola quando sua energia potencial é de 80 unidades.

9) Desenhar o gráfico das seguintes funções

i) $f(x) = |x|$

ii) $f(x) = \sqrt{x}$

iii) $f(x) = |2x - 6|$

iv) $f(x) = \left|x^2 + x - 6\right|$

10) Especifique o domínio e faça um esboço do gráfico de cada uma das funções:

a) $y = \log_{10}(x + 5)$

b) $y = -\ln x$

c) $y = \ln(-x)$

d) $y = \ln|x|$

11) Resolva cada equação em x

a) $\ln x = -1$

b) $\ln(2x-1) = 3$

c) $e^{3x-4} = 2$

d) $e^{ax} = Ce^{bx}$, onde C é uma constante e $a \neq b$

$\ln(\ln x) = 1$

12) Se a população de bactérias começa com 100 e dobra a cada três horas, então o número de bactérias após t horas é $n = f(t) = 100.2^{\frac{t}{3}}$:

a) Encontre a função inversa de f e explique seu significado.

b) Quando a população atingirá 50.000 bactérias?

13) Após acionado o Flash de uma câmera, a bateria imediatamente começa a recarregar o capacitor do flash, o qual armazena uma carga elétrica dada por $Q(t) = Q_0(1 - e^{-\frac{t}{a})}$ (A capacidade máxima de carga é Q_0, e t é medido em segundos.)

a) Encontre a função inversa de Q e explique seu significado.

b) Quanto tempo levará para o capacitor recarregar 90% da capacidade se $a = 2$?

14) Se $f(x) = \ln x$ e $g(x) = x^2 - 9$, encontre as funções $f \circ g, g \circ f, f \circ f, g \circ g$

15) Expresse a função $F(x) = \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ como uma composta de três funções.

16) Faça o gráfico da função $y = \frac{1}{x}$

17) A função de Heaviside H é definida por $H(t) = \begin{cases} 0, \text{ se } t < 0 \\ 1, \text{ se } t \geq 0 \end{cases}$. Essa função é usada no estudo de circuitos elétricos para representar o surgimento repentino de corrente elétrica, ou voltagem, quando uma chave é instantaneamente ligada:

a) Faça o gráfico da função de heaviside

b) Faça um esboço da função rampa $y = tH(t)$

Capítulo 6

Geometria Plana

6.1 Reta

A toda reta r do plano cartesiano está associada uma equação da forma $ax + by + c = 0$, onde a, b, c são números reais, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ e o ponto (x, y) representa um ponto genérico de r

A equação da reta pode se apresentar de várias outras formas

1) Sejam $Q(x_1, y_1), R(x_2, y_2), Q \neq R$ e r a reta definida por Q e R (graficamente isto quer dizer que a reta passa pelos pontos Q e R). Se $P(x, y)$ é um ponto pertencente a reta r, então os pontos P, Q e R são colineares. A condição de colinearidade dos tres pontos no plano é dada por:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Calculando o determinante obtemos

$$x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0$$

$$y(x_2 - x_1) = -x(y_1 - y_2) - (x_1y_2 - x_2y_1)$$

$$y = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}x + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{(x_2 - x_1)}$$

2) Fazendo $m = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$ (m é o coeficiente angular da reta) e $q = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{(x_2 - x_1)}$ (q é o coeficiente linear da reta) podemos escrever a equação da reta na forma

$$y = mx + q$$

3) Se m é o coeficiente angular da reta e a reta passa pelo ponto $R(x_2, y_2)$ temos

$$\begin{aligned} y &= mx + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{(x_2 - x_1)} \\ y &= mx + \frac{x_2y_1 - x_1y_2 - y_2x_2 + y_2x_2}{(x_2 - x_1)} \\ y &= mx + \frac{-(y_2 - y_1)x_2 + (x_2 - x_1)y_2}{(x_2 - x_1)} \end{aligned}$$

$$y - y_2 = m(x - x_2)$$

4) Considere uma reta r que intercepta os eixos nos pontos $Q(0, q)$ e $P(p, 0)$ distintos. A equação dessa reta é

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & q & 1 \\ p & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow qx + py - pq = 0$$

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

5) Se na equação $y = mx + q$ fazemos $x = f(t)$, onde f é uma função afim, então $y = mf(t) + q$, onde $t \in \mathbb{R}$ é um parâmetro. Chamando $g(t) = mf(t) + q$ temos que $y = g(t)$. Portanto as coordenadas x e y de um ponto da reta podem ser dadas em função de parâmetro real t :

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}, f(t) \text{ e } g(t) \text{ são funções afins}$$

Resumo:

$$\begin{aligned} \text{Forma Geral:} \quad & ax + by + c = 0 \\ \text{Se a reta passa por } Q(x_1, y_1), R(x_2, y_2), Q \neq R: \quad & \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ \text{Forma reduzida} \quad : \quad & y = mx + q \\ \text{Equação da reta dados um ponto e uma direção:} \quad & y - y_0 = m(x - x_0) \\ \text{Forma Segmentária} \quad : \quad & \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Forma Paramétrica} : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, \quad \begin{matrix} t \in \mathbb{R}, \\ f(t) \text{ e } g(t) \text{ são funções afins} \end{matrix}$$

Condição de Paralelismo: Duas retas são paralelas quando $m_1 = m_2$

Condição de perpendicularismo: Duas retas são perpendiculares quando: $m_1 = -\frac{1}{m_2}$

6.2 Exercicios Resolvidos 1

1) Encontre a equação reduzida da reta que passa pelos pontos $A(1,-1)$ e $B(-1,5)$.

2) Trace a reta que passa pelos pontos $A(1,1)$ e $B(-2,2)$.

3) Obter a reta que s passa por $P(3,-2)$ e é perpendicular a reta r: $3x + 14y - 17 = 0$.

6.3 Distância

Distância entre dois pontos no plano: A distância entre os pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ em um plano cartesiano é dada por:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Fórmula do ponto médio: Dados os pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ no plano seja $M(x, y)$ o ponto médio do segmento que une os pontos P_1 e P_2 então $x = \frac{1}{2}(x_1+x_2)$ e $y = \frac{1}{2}(y_1+y_2)$, ou seja, o ponto médio é $M\left((\frac{1}{2}(x_1 + x_2), \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\right)$.

6.4 Exercicios Resolvidos 2

1) Calcular a distância entre os pontos $A(-3,7)$ e $B(5,1)$.

2) Determinar as coordenadas do ponto médio do segmento que une os pontos $A(1,2)$ e $B(9,14)$.

6.5 Circunferência

Forma Padrão

Se $C(x_0, y_0)$ é um ponto fixo do plano, então a circunferência de raio r e centro em C é o conjunto dos pontos $P(x, y)$ do plano cuja distância de $C(x_0, y_0)$ é r. Assim um ponto $P(x, y)$ estará situado nesta circunferência se $d(P, C) = r$, ou seja

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r$$

ou

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

que é a forma padrão da equação da circunferência de raio r e centro $C(x_0, y_0)$. Se o centro da circunferência for a origem do sistema cartesiano temos:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Forma geral

Uma equação completa do segundo grau é do tipo $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$. Ela representa uma circunferência se tivermos:

$1^o)$ $A = B \neq 0$ $\quad$ $2^o)$ $C = 0$ $\quad$ $3^o)$ $D^2 + E^2 - 4AF > 0$. Neste caso

$$\text{O centro é } C = \left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2A}\right) \text{ e o raio é } r = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}}$$

$$\text{Se } D^2 + E^2 - 4AF = 0 \text{ temos um ponto}$$

$$\text{Se } D^2 + E^2 - 4AF < 0 \text{ temos uma circunferência imaginária}$$

Conclusão: A forma geral da circuferência é $Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$ com $D^2 + E^2 - 4AF > 0$.

6.6 Exercícios Resolvidos 3

1) Obter a equação da circunferência de centro $C(1, -2)$ que passa pelo ponto $P(4, 2)$.

2) Quais das equações abaixo representam uma circunferência:

a) $2x^2 + 2y^2 + xy - 1$.

b) $x^2 + y^2 + 2x + 3y + 4 = 0$.

c) $2x^2 + 2y^2 - 3x - 3y + 2 = 0$.

d) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = 0$.

3) Representar graficamente os conjuntos:

a) $A = \left\{(x, y) \ / \ x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 \leq 0\right\}$.

b) $B = \left\{(x, y) \ / \ x = 2 - \sqrt{9 - y^2}\right\}$.

6.7 Exercícios de Fixação

1) Encontre a distância entre A e B e determine o ponto médio deste segmento de reta

a) $A(2, 5)$ e $B(-1, 1)$.

b) $A(7, 1)$ e $B(1, 9)$.

2) Prove que é isósceles o triângulo de vértices $V_1(5, -2), V_2(6, 5)$ e $V_3(2, 2)$.

3) Prove que os pontos $P(0, -2), Q(-4, 8)$ e $R(3, 1)$ estão sobre um círculo de centro $C(-2, 3)$.

4) Prove que a distância d do ponto $P(x_0, y_0)$ à reta $Ax + By + c = 0$ é:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

6) Obter o ponto de interseção das retas $3x + 4y - 12 = 0$ e $2x - 4y + 7 = 0$.

7) Mostrar que as retas *r:* $2x + 3 = 0$ e *s:* $y - 11 = 0$ são perpendiculares.

8) Calcular a distância entre as retas *r:* $7x+24y-1 = 0$ e *s:* $7x+24y+49 = 0$.

9) Encontre o centro e o raio de cada circunferência

a) $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 20 = 0$.

b) $4x^2 + 4y^2 - 8x + 12y + 1 = 0$.

c) $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$.

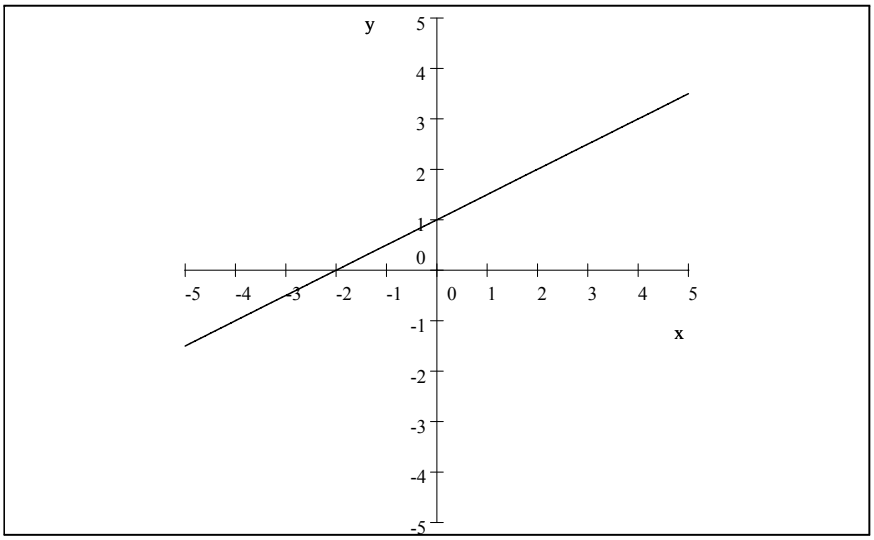
d) $3x^2 + 3y^2 - 7y = 0$.

10) Obter a interseção das circunferências: $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ e $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 13 = 0$.

11) Obter a equação da reta que passa pelas interseções das circunferências $x^2 + y^2 + 3x - y = 0$ e $3x^2 + 3y^2 + 2x + y = 0$.

12) Considere a função cujo gráfico é dado pela figura a seguir

$y = \frac{1}{2}x + 1$



a) Determine a expressão análitica da função f

b) Seja $g(x) = |f(x)|$, desenhe o gráfico de $g(x)$

c) Seja $h(x) = g(x - 1)$, desenhe o gráfico de $h(x)$

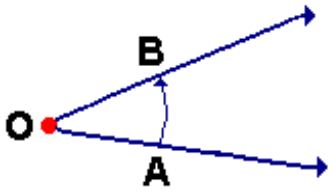
d) Seja $l(x) = (h \circ g)(x)$, desenhe o gráfico de $l(x)$

Capítulo 7

Trigonometria

7.1 Ângulos e Arcos

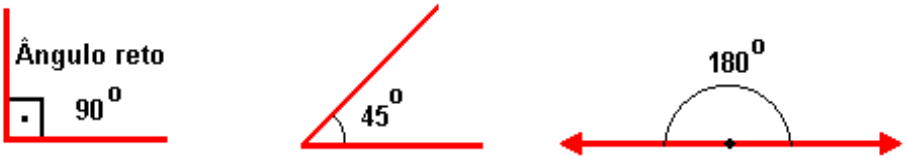
Ângulo: Ângulo é o espaço contido entre dois segmentos de reta orientados (ou duas semi-retas orientadas) a partir de um ponto comum.



O Grau

Definimos como 1 grau, que denotamos por 1°, o arco equivalente a 1/360 da circunferência, isto é, em uma circunferência cabem 360°.

Exemplos:



O grau comporta ainda os submúltiplos, minuto(') e segundo("), de forma que:

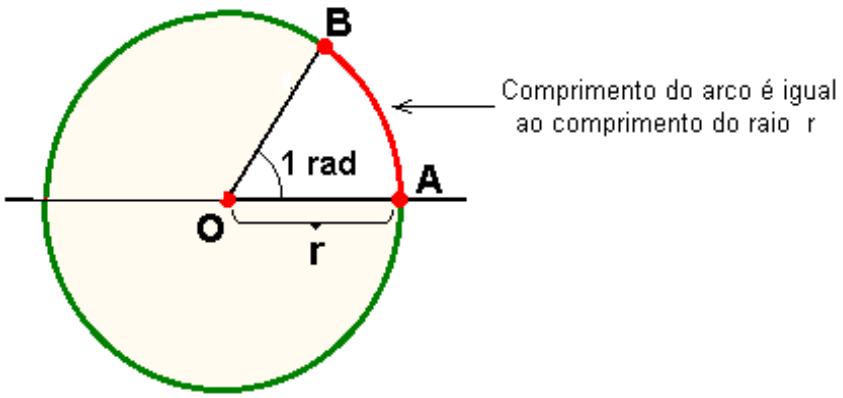
1^o =60' e 1'=60"

O Grado

É a medida de um arco igual a 1/400 do arco completo da circunferência na qual estamos medindo o arco.

O Radiano

Definimos 1 radiano como o arco cujo comprimento é igual ao raio da circunferência onde tal arco foi determinado.



Lembramos que o comprimento de uma circunferência de raio r é dado por $2\pi r$. Utilizando a relação apresentada acima, para calcularmos em radianos a medida a de um arco de uma volta, fazemos:

Dado um arco cujo comprimento é L unidades de comprimento, dizemos que sua medida, em radianos, é igual a $\frac{L}{r}$. Assim, se a circunferência do arco considerado tem raio unitário, a medida do arco, em radianos, é numericamente igual ao comprimento do arco.

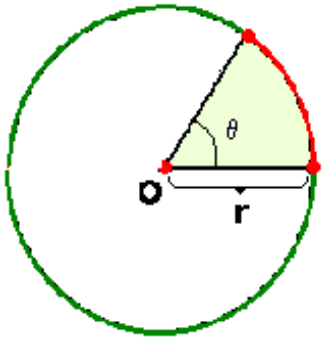
Comprimento de um arco

Sabemos que a medida de um arco em radianos é o número que indica quantas vezes um arco, de comprimento igual ao raio, cabe no arco medido, isto é:

$$\alpha = \frac{L}{r} \implies L = \alpha.r$$

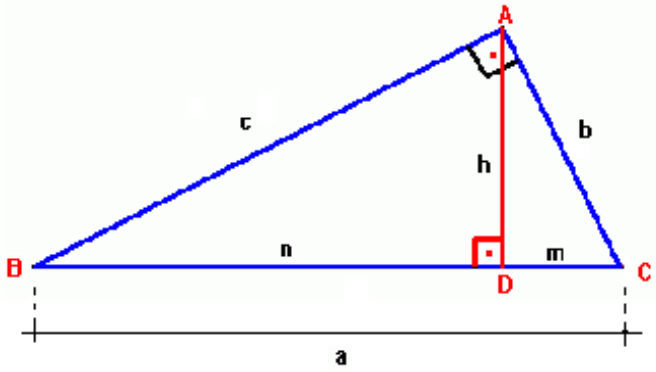
Área do setor circular

A área sombreada abaixo e chamada de setor circular. É evidente qaue as razões das áreas do círculo e do setor circular são as mesmas que as razões entre os respectivos ângulos centrais. Assim, se os ângulos centrais estiverem em radianos, temos



$$\frac{A}{\pi r^2} = \frac{\theta}{2\pi} \Longrightarrow A = \frac{r^2\theta}{2}$$

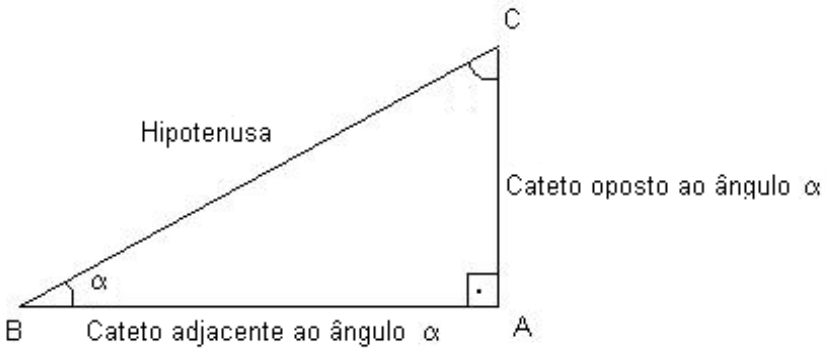
7.2 Trigonometria Básica no Triângulo Retângulo



1)	$a = m + n$	4)	$b^2 = a.m$
2)	$h^2 = m.n$	5)	$c^2 = a.n$
3)	$a.h = b.c$	6)	$a^2 = b^2 + c^2$

Exemplo: Em um triângulo retângulo as medidas dos catetos sâo 8 cm e 6 cm. Determine a altura do triângulo relativamente à hipotenusa.

7.3 Relações Trigonométricas:



Razão seno: O seno de um ângulo agudo em um triângulo retângulo é definido por:

$$\text{seno } \alpha = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$$

Razão cosseno: O seno de um ângulo agudo em um triângulo retângulo é definido por:

$$\text{cosseno } \alpha = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}$$

Razão tangente: A tangente de um ângulo agudo em um triângulo retângulo é definido por:

$$\text{tangente } \alpha = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$$

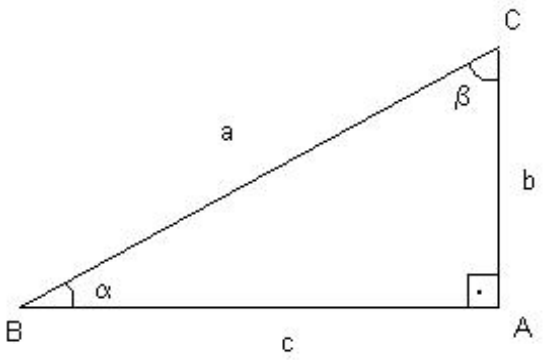
A partir destas definições são definidas também

$$\text{cotangente } \alpha = \frac{1}{\text{tangente } \alpha}$$

$$\text{secante } \alpha = \frac{1}{\text{cosseno } \alpha}$$

$$\text{cossecante } \alpha = \frac{1}{\text{seno } \alpha}$$

Sejam α e β ângulos tais que $\alpha + \beta = 90°$ conforme a figura



então valem as relações

$$\begin{array}{ll} \sin\alpha = \frac{b}{a} & \sin\beta = \frac{c}{a} \\ \cos\alpha = \frac{c}{a} & \cos\beta = \frac{b}{a} \\ \tan\alpha = \frac{b}{c} & \tan\beta = \frac{c}{b} \end{array}$$

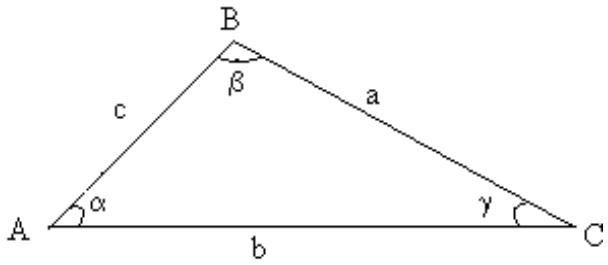
Exemplo: Mostre que vale a relação $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo: Obtenha o comprimento d da diagonal do quadrado em função do lado L.

Exemplo: Calcule a área de um exágono inscrito em circunferência de raio r.

7.4 Trigonometria Básica no Triângulo Qualquer

Considere o triângulo qualquer conforme a figura:



Lei dos senos

Se os lados de um triângulo tiverem comprimentos a, b e c e se α for o ângulo entre os lados b e c, β entre os lados c e a, γ entre os lados a e b então vale a relação

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Observação: Usa-se a lei dos senos quando são conhecidos dois ângulos e um lado

Lei dos Cossenos

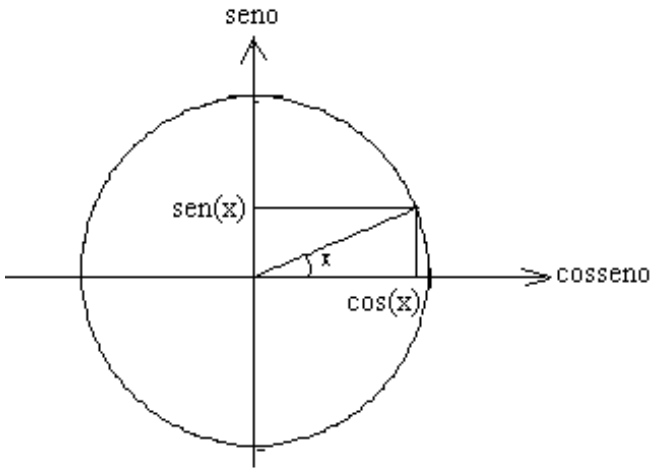
Se os lados de um triângulo tiverem comprimentos a, b e c e se θ for o ângulo entre os lados com comprimento a e b, então

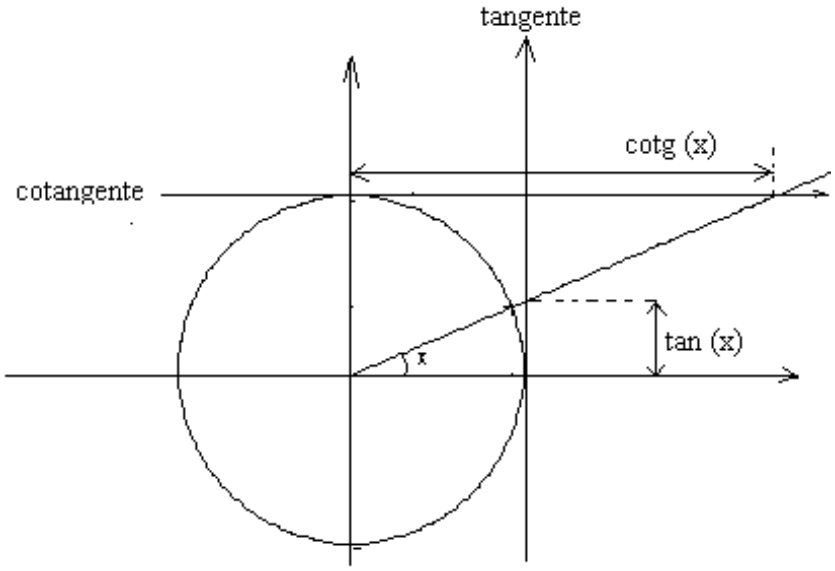
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos\theta$$

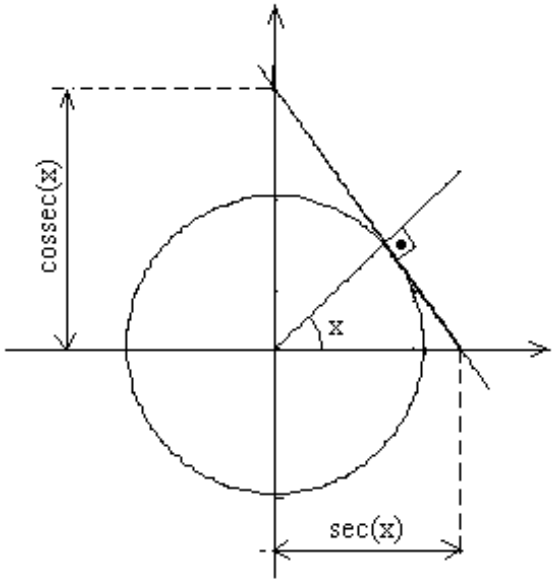
Observação: Usa-se a lei dos cossenos quando são são conhecidos dois lados e o ângulo formado por eles

7.5 Ciclo Trigonométrico

As razões seno, cosseno, tangente e as demais razões dependem apenas do ângulo que é considerado pois no triângulo retângulo existe a proporcionalidade entre os seus lados quando consideramos um ângulo fixo. Como o cálculo das razões trigonométricas não depende do tamamho da hipotenusa podemos determinar todas as razões considerando o comprimento da hipotenusa igual a 1 (é claro que para cada ângulo e triângulo retângulo com hipotenusa igual a um teremos catetos diferentes) e isto pode ser visualizado mais facilmente no ciclo trigonométrico, que uma circunferência de raio um, onde para cada ângulo medido no sentido anti-horário determinamos as razões para cada triângulo retângulo com hipotenusa de comprimento igual a um.

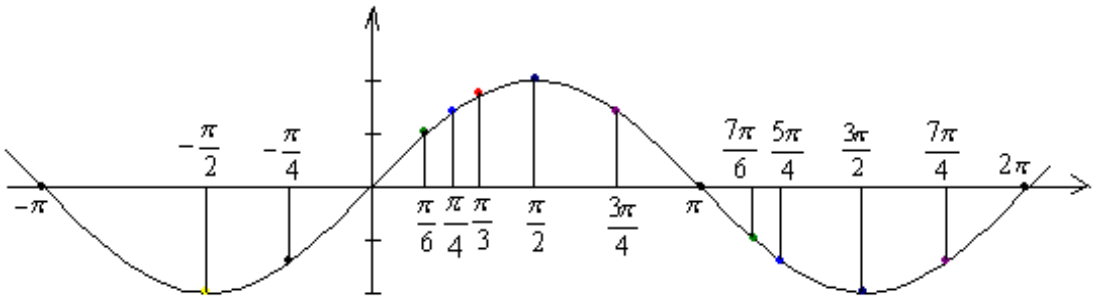



tangente
cotg (x)
cotangente
tan (x)
x

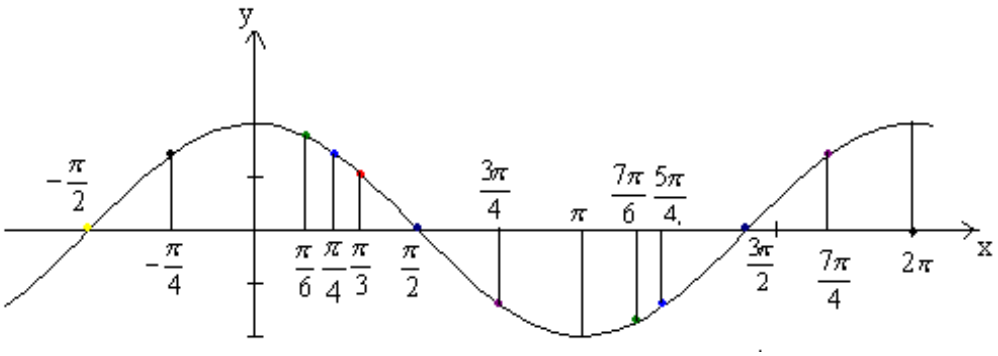

cossec(x)
x
sec(x)

7.6 Funções Trigonométricas

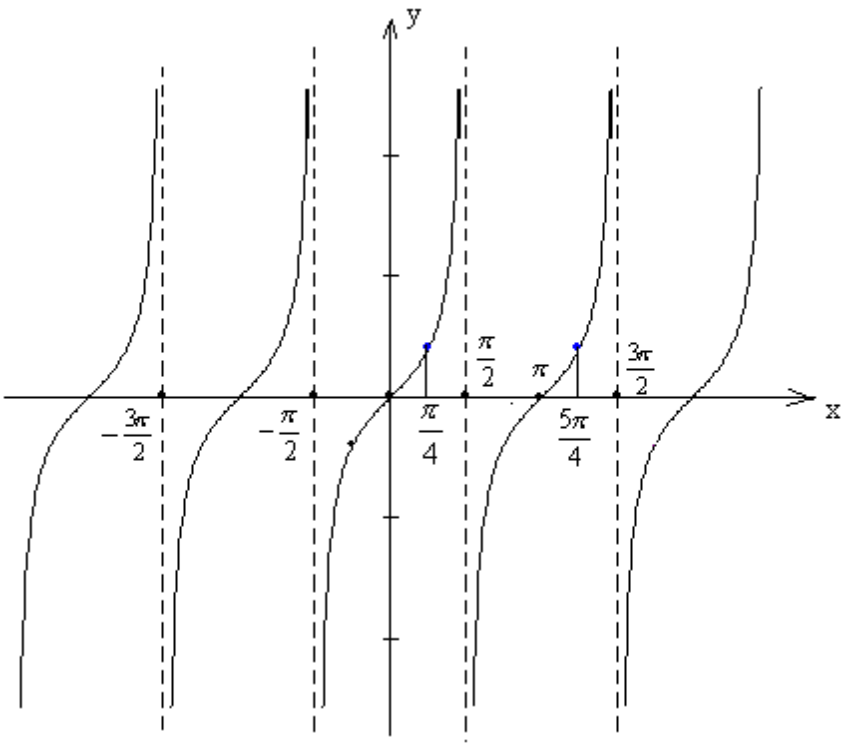
Função Seno: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = sen(x),\ Dom(f) = \mathbb{R},\ Im(f) = [-1, 1]$



Função Cosseno: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos(x),\ Dom(f) = \mathbb{R},\ Im(f) = [-1, 1]$



Função tangente: $f : \mathbb{R} - \left\{\frac{n\pi}{2} / n \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \tan(x),\ Dom(f) = \left\{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\right\},\ Im(f) = \mathbb{R}$



7.7 Identidades trigonométricas

Identidades fundamentais:

$$\begin{array}{lll} \sin^2 x + \cos^2 x = 1 & \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} & \sec x = \frac{1}{\cos x} \\ \sec^2 x = 1 + \tan^2 x & \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} & \csc x = \frac{1}{\sin x} \\ \csc^2 x = 1 + \cot^2 x & \cot x = \frac{1}{\tan x} & \frac{\sec x}{\csc x} = \tan x \end{array}$$

Valores das razões mais empregados em aplicações práticas

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$

Outras Identidades Trigonométricas

$a)$ $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta.$ $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$ $\sin(-\theta)=-\sin\theta.$

$b)$ $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta.$ $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta.$ $\cos(-\theta)=\cos\theta$

$c)$ $\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta.$ $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$ $\tan(-\theta)=-\tan\theta.$

$d)$ $\sin\theta=\sin(\theta+2\pi)$ $\sin\theta=\sin(\theta-2\pi).$ $\sin(\theta+2\pi)=\sin(\theta-2\pi)$

$e)$ $\cos\theta=\cos(\theta+2\pi)$ $\cos\theta=\cos(\theta-2\pi).$ $\cos(\theta+2\pi)=\cos(\theta-2\pi).$

$f)$ $\tan\theta=\tan(\theta+2\pi) = \tan(\theta-2\pi)=\tan(\theta+\pi)$ $\tan\theta=\tan(\theta-\pi).$

$g)$ $\sin\theta=\sin(\theta\pm2n\pi), n=0,1,2,$

$h)$ $\cos\theta=\cos(\theta\pm2n\pi), n=0,1,2,$

$i)$ $\tan\theta=\tan(\theta\pm n\pi), n=0,1,2,...$

Ângulos Complementares

$j)$ $\sin\theta=\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)$

$k)$ $\cos\theta=\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)$

$l)$ $\tan\theta=\frac{\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)}{\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)} = = \cot(\frac{\pi}{2}-\theta)$

$m)$ $\cot\theta=\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)$

Fórmulas de adição e subtração:

$a)$ $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha.\cos\beta+\sin\beta.\cos\alpha$

$b)$ $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha.\cos\beta-\sin\beta.\cos\alpha$

$c)$ $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha.\cos\beta-\sin\alpha.\sin\beta$

$d)$ $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha.\cos\beta+\sin\alpha.\sin\beta$

$e)$ $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta}$

$f)$ $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha.\tan\beta}$

Fórmulas de ângulo duplo:

$a)$ $\sin2\Phi=2.\sin\Phi.\cos\Phi$

$b)$ $\cos2\Phi=\cos^2\Phi-\sin^2\Phi$

$c)$ $\tan2\Phi=\frac{2.\tan\Phi}{1-\tan^2\Phi}$

Fórmulas do ângulo metade:

$a)$ $\sin^2\frac{\varphi}{2}=\frac{1-\cos\varphi}{2}$

$b)$ $\cos^2\frac{\varphi}{2}=\frac{1+\cos\varphi}{2}$

Formulas de produto em soma:

$a)$ $\sin\alpha.\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)]$

$b)$ $\sin\alpha.\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$

$c)$ $\cos\alpha.\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$

Fórmulas de soma em produto:

$a)$ $\sin\alpha+\sin\beta=2.\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$b)$ $\cos\alpha+\cos\beta=2.\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$c)$ $\sin\alpha-\sin\beta=2.\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$d)$ $\cos\alpha-\cos\beta=-2.\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

7.8 Exercícios de Fixação

1) Exprimir em radianos

a) 36° b) 135° c) 300°

2) Exprimir em graus

a) $\frac{\pi}{6}$ rad b) $\frac{\pi}{4}$ rad c) $\frac{\pi}{3}$ rad d) $\frac{7\pi}{4}$ rad

3) Quanto mede, em radianos,

a) um arco de $22°30'$ b) um arco de $56°15'$

4) Mostre que um arco de 1 rad mede aproximadamente $57°$

5) Um móvel faz um percurso de meio quilômetro sobre uma circunferência de diâmetro 200 metros. Qual a medida do ângulo central correspondente ao percurso?

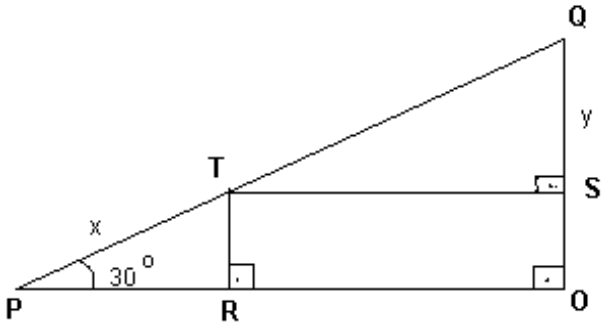
6) Calcular o menor ângulo entre os ponteiros de um relógio nos seguintes instantes

a) 10h 30min b) 2h 15 min c) 13h 35 min

7) Determine a fórmula para a área A de um setor circular em termos de seu raio e do comprimento de arco L

8) Determine a área lateral S de um cone circular reto de raio r e de geratriz L

9) Encontre os valores de x e y na figura abaixo:



Dados: $PQ = 10m, \quad TR = 2,3m, \quad PT = x, \quad QS = y$

10) Encontre os valores de $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha$ onde α é o menor dos ângulos de um triângulo retângulo de catetos 3 e 1.

11) Um carro sobe uma via em forma de plano inclindado, com inclinação de $20°$ em relação à horizontal. Em que altura, em relação à horizontal, o carro estará se percorrer 1 km na via. Dado: $\sin 20 = 0,34$

12) Se θ é um ângulo agudo, use identidades fundamentais para escrever a primeira expressão em função da segunda:

a) $\cot\theta; \sin\theta$

b) $\sec\theta; \sin\theta$

c) $\tan\theta; \cos\theta$

d) $\csc\theta; \cos\theta$

e) $\tan\theta; \sec\theta$

13) Fazendo a substituição trigonométrica $x = a\sin\theta$ para $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, escreva $\sqrt{a^2 - x^2}$ em termos de uma função trigonométrica de θ.

14) Usando a substituição indicada simplifique os radicais:

a) $\sqrt{16-x^2}; x = 4\sin\theta$ para $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

b) $\frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}; x = 3\sin\theta$ para $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

c) $\frac{x}{\sqrt{25+x^2}}; x = 5\tan\theta$ para $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

d) $\frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2}; x = 2\tan\theta$ para $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

e) $\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}; x = 3\sec\theta$ para $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

15) Determine os intervalos de crescimento e decrescimento para a função $f(x) = \cos x$ definida para $x \in [0, 2\pi]$

16) $\frac{1}{1+\sin^2} + \frac{1}{1+\cos^2 x} + \frac{1}{1+\sec^2 x} + \frac{1}{1+\cos\sec^2 x}$ é igual a:

17) Os valores que m pode assumir para que exista um arco x satisfazendo a igualdade $\sin x = m - 4$ são:

18) A expressão $\cos^2 x + \cos^2 x \tan^2 x + \tan^2 x$ é igual a:

19) Sabendo que $\sin x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ e que x está no segundo quadrante, então o valor de $\tan x$ é:

20) Determine as soluções das equações em $[0, 2\pi)$

a) $2\sin^2 u = 1 - \sin u$

b) $\cos\lambda - \sin\lambda = 1$

c) $2\tan\varpi - \sec^2\varpi = 0$

d) $\sin x + \cos x \cot x = \csc x$

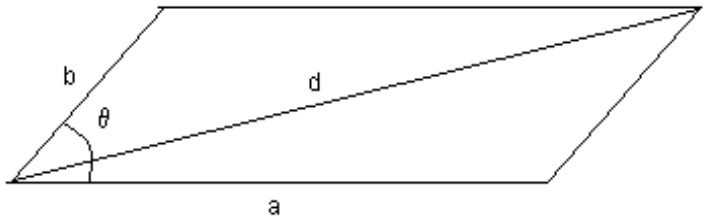
e) $\sin 2t + \sin t = 0$

f) $\cos\mu + \cos 2\mu = 0$

g) $\tan 2x = \tan x$

h) $\sin\frac{u}{2} + \cos u = 1$

21) Mostre que o comprimento da diagonal maior de um paralelogramo é $d = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}$



22) Desenhe o gráfico das seguintes funções:

a) $y = \sin(3x)$ b) $y = 1 - \sin x$

c) $y = |\cos x|$ d) $y = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

23) Dada a função $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \tan x$

a) Desenhe o gráfico de f

b) Determine a inversa de f e desenhe o seu gráfico

Capítulo 8

Revisão Geral

Lista de Exercícios de Matemática Básica

1. Resolva as inequações em $\mathbb{R}$

   (a) $1 - x - 2x^2 \geq 0$

   (b) $2x - 5 < \frac{1}{3} + \frac{3x}{4} + \frac{1-x}{3}$

   (c) $\frac{x+1}{2-x} < \frac{x}{3+x}$

   (d) $|5 - 6x| \geq 9$

   (e) $\left|\frac{x-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}\right| < 1$

   (f) $\frac{(x-4)^6}{(x-2)(x+1)} > 0$

   (g) $\frac{x^3+x^2-x-1}{x^2+x-2} < 0$

2. Resolva as equações em $\mathbb{R}$

   (a) $|5x - 3| = 12$

   (b) $(x - 3)(x + 1)(x + 4) = 0$

   (c) $\left|\frac{3x+8}{2x-3}\right| = 4$

   (d) $2x - 7 = |x| + 1$

3. Dados os conjuntos: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -10 < x < 8\}$, $B = (-3, 5]$ e $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$ determine:

   (a) $A \cup B \cup C$

   (b) $B \cap (A \cup C)$

   (c) $A \cup (B \cap C)$

   (d) $A - B$

(e) $C - (A \cap C)$

4. O consumo C de água em m^3, pela população de uma cidade em função do tempo t, em segundos, é dado pela equação $C = 2000t$.

   (a) Qual o consumo de água dessa população em 10 segundos?

   (b) Qual é o consumo de água dessa população em 10 horas?

   (c) Em quantos segundos essa população consome $48.000m^3$ de água?

5. Dada a função $f(x) = 3x + 4$ determine:

   (a) $f(-1)$

   (b) o valor de x tal que $f(x) = 10$

   (c) Faça a representação gráfica dessa função.

6. Determine os zeros das funções reais:

   (a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

   (b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$

   (c) $y = \frac{x+1}{2} - \frac{5x+3}{4}$

7. Determine o domínio das funções:

   (a) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

   (b) $g(x) = (x + 1)\sqrt{x - 4}$

   (c) $h(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-3}$

   (d) $l(x) = \ln(x + 5)$

8. Sabe-se que, sob um certo ângulo de tiro, a altura atingida por uma bala, em metros, em função do tempo, em segundos, é dada por $h(t) = -20t^2 + 200t$.

   (a) Qual a altura máxima atingida pela bala?

   (b) Em quanto tempo, após o tiro, a bala atinge a altura máxima?

   (c) faça uma representação gráfica dessa situação.

9. Em uma pista de atletismo circular com quatro raias, a medida do raio da circunferência até a metade da primeira raia (onde o atleta corre considerando a primeira raia, a raia mais interna) é 100 metros e a largura de cada raia é de 2 metros. Se todos os atletas corressem até completar uma volta inteira, quantos metros cada um dos atletas correria?

10. Um engenheiro deve medir a largura de um rio. Para isso, fixa um ponto A na margem em que se encontra e um ponto B na margem oposta. A seguir desloca-se $40m$ perpendicularmente à reta AB até o ponto C e mede o ângulo $\hat{ACB}$, obtendo 44^o. Qual é a largura do rio? (dados: $\sin 44 = 0,69$, $\cos 44 = 0,71$)

11. Calcule o valor da expressão: $E = \frac{\sin(\frac{11\pi}{2}) - \sin(\frac{9\pi}{2})}{\cos 48\pi - \cos 33\pi}$

12. Resolver a equação $\sec^2 x + \tan x = 1$ para $0 \leq x \leq 2\pi$

13. Determine o valor de x sabendo que$(\ \log_x b)\,(\log_b c)\,(\log_c d)\,(\log_d 729) = 6$

14. Resolva o sistema de equações $\begin{cases} 2\log_2\ x + \log_2\ y = 5 \\ \log_2\ x - 2\log_2\ y = -1 \end{cases}$

15. Determine o conjunto solução do sistema de equações $\begin{cases} 2^{2x+y} = 4 \\ 2^{x-y} = 2^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$

16. Determinar a solução da equação exponencial : $5^{x+2} - 9 \cdot 5^x = 2^{x+9} + 113 \cdot 2^x$

17. Determine a equação da reta que é tangente à parábola de equação $y = 2x^2 + 3$ e que é paralela à reta de equação $y = 8x + 3$. Resposta: $y = 8x - 5$.

18. Para que valores de a e b a parábola $y = ax^2 + b$ tangencia a reta $y = x$. Resposta: $ab = \frac{1}{4}$.

19. Resolva cada equação em x.

    (a) $\ln x + \ln x^2 = -1$

    (b) $\ln(2x - 1) - \ln(\frac{x+2}{e^3}) = 3$

    (c) $e^{3x-2} = 4$

    (d) $e^{ax} = Ce^{bx}$, onde C é uma constante e $a \neq b$

    (e) $\ln(\ \ln(\ln x^2) = 1$.

20. Se a população de bactérias começa com 200 e dobra a cada 4 horas, então o número de bactérias após t horas é $n = f(t) = 200.2^{\frac{t}{4}}$:

    (a) Encontre a funçõa inversa e explique seu significado

    (b) Quando a população atingirá 200.000 bactérias?

21. Após acionado o Flash de uma câmera, a bateria imediatamente começa a recarregar o capacitor do flash, o qual armazena uma carga elétrica dada por $Q(t) = 10(1 - e^{-\frac{t}{4}})$

    (a) Encontre a função inversa e explique seu significado.

(b) Quanto tempo levará para o capacitor recarregar 50% da sua capacidade?

22. Se $f(x) = \ln x$ e $g(x) = x$, encontre as funções $f \circ g, g \circ f, f \circ f, g \circ g$.

23. Expresse a função $F(x) = \frac{1}{\sqrt{x+e^x}}$ como uma composta de três funções.

24. Faça o gráfico da função $y = \frac{1}{x-2}$

25. A função de Heaviside H é definida por $H(t) = \begin{cases} 0, \text{ se } t < 0 \\ 1, \text{ se } t \geq 0 \end{cases}$. Essa função é usada no estudo de circuitos elétricos para representar o surgimento repentino de corrente elétrica, ou voltagem, quando uma chave é instantaneamente ligada:

    (a) Faça o gráfico $g(x) = |H(x)|$

    (b) Faça um esboço da função $y = t^2 H(t)$.

26. Mostre que a função $f(x) = \cos(x)$ é uma função par e que $g(x) = \sin(x)$ é uma função impar

27. Mostre que $h(x) = \tan x$ é uma função impar

28. Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ determine duas funções g, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde g é par e h é impar tais que $f(x) = g(x) + h(x)$

29. Se f é uma função par e g é uma função impar o que podemos dizer a respeito das funções:

    (a) $l(x) = f(x) + g(x)$

    (b) $h(x) = (f \circ g)(x)$

    (c) $m(x) = f(x).g(x)$

    (d) $v(x) = |f(x)|\,|g(x)|$

Capítulo 9

Respostas

9.1 Do Capítulo 1, Teoria de Conjuntos

Exercicios Resolvidos do Capítulo 1

a) Em uma cidade existem dois clubes A e B, que têm juntos 6000 sócios. O clube A tem 4000 sócios e os dois clubes têm 500 sócios comuns. Quantos sócios têm o clube B? Quantos são os sócios do clube B que não são sócios do clube A?

Solução $\#B = 2000$, $\#(A \cap B) = 500$, $\#(B - A) = 2000$

b) Seja $A = \{a, b, c, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{d, e, f, 3, 7, 8\}$. Determinar $A - B, A \cap B, A \cup B, B - A$

Solução: $A - B = \{a, b, c, 1, 2, 4, 5\}$, $A \cap B = \{3\}$, $A \cup B = \{a, b, c, 1, 2, 3, 4, 5, d, e, f, 7, 8\}$, $B - A = \{d, e, f, 7, 8\}$

c) Em uma cidade existem tres cavalos X, Y, Z que participam de um páreo em uma corrida de cavalos. X e Y têm 400 apostadores em comum. Os cavalos Y e Z têm 300 apostadores em comum. Os cavalos X e Z não têm apostadores em comum. X e Y têm juntos 9000 apostadores e Y e Z têm juntos 8000 apostadores. Sabendo que Z tem 3000 apostadores determinar o número de apostadores dos cavalos X e Y.

Solução: $X = 4100$ e $Y = 5300$

9.2 Do Capítulo 2, Números

Exercicios Resolvidos do Capítulo 2

1) Usando a notação de conjunto escrever os intervalos

a) $(-3, 6) \Rightarrow S = \left\{x \in \mathbb{R} / x \leq \frac{-11}{4}\right\}$

b) $(\pi, 6] \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} / \pi < x \leq 6\}$

c) $[\sqrt{2}, \sqrt{3}] \Rightarrow S = \left\{x \in \mathbb{R} / \sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{3}\right\}$

d) $[-1, 0) \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x < 0\}$

e) $(-\infty, 0) \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} / -\infty < x < 0\}$

2) Se $A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 2 < x < 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} / 3 \leq x < 8\}$ determinar

a) $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \diagup 3 \leq x < 5\}$

b) $A - B = \{x \in \mathbb{R} \diagup 2 < x < 3\}$

c) $B - A = \{x \in \mathbb{R} \diagup 5 \leq x < 8\}$

3) Representar os seguintes intervalos:

a) $[-1, 1]$ b) $[0, 10)$ c) $(-3, 1]$ d) $(4, 6)$ e) $(5, +\infty)$

4) Resolver graficamente

a) $(\pi, 6] \cup [-1, 1)$ b) $\left[\sqrt{2}, \sqrt{3}\right] \cap \left[\frac{1}{2}, 3\right]$

5) Resolver as inequações

a) $3 + 7x \leq 2x + 9 \Rightarrow S = \left\{x \in \mathbb{R} \diagup x \leq \frac{6}{5}\right\}$

b) $7 \leq 2 - 5x < 9 \Rightarrow S = \left\{x \in \mathbb{R} \diagup \frac{-7}{5} < x \leq -1\right\}$

c) $x^2 - 3x < 10 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} \diagup -2 < x < 5\}$

d) $\frac{2x-5}{x-2} < 1 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} \diagup 2 < x < 3\}$

Exercicios de Fixação do Capítulo 2

01) Quais das alternativas abaixo é falsa

a) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{N} \subset \mathbb{R} \Rightarrow V$

b) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{N} \subset \mathbb{R} \Rightarrow V$

c) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{N} = \mathbb{R} \Rightarrow F$

d) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{R} \neq \varnothing \Rightarrow V$

02) Escrever usando o sinal de desigualdade

a) a é um número positivo $\Rightarrow a \geq 0$

b) b é um número negativo $\Rightarrow b < 0$

c) a é maior que $b \Rightarrow a > b$

03) Representar na reta real os seguintes intervalos

a) $[-10, 11]$ b) $[0, 3)$ c) $(-3, 0]$ d) $(3, 7)$ e) $(0, +\infty)$

04) Representar graficamente os intervalos dados pelas desigualdades

a) $2 \leq x \leq 7$ b) $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{5}$ c) $0 \leq x < 2$ d) $-\infty < x < -1$

05) Determinar graficamente

a) $(5, 7] \cap [6, 9]$ b) $(-\infty, 7] \cap [8, 10]$ c) $(-3, 0] \cup (0, 8)$ d) $(0, 7] - (5, 7)$

06) Sejam $M = \{x \in \mathbb{R} \diagup 2 \leq x < 10\}$, $N = \{x \in \mathbb{R} \diagup 3 < x < 8\}$ e $P = \{x \in \mathbb{R} \diagup 2 \leq x \leq 9\}$. Determinar o conjunto $P - (M - N)$.

Solução: $P - (M - N) = (3, 8)$

07) Resolva as inequações e exprima a solução em termos de intervalos quando possível:

a) $2x + 5 < 3x - 7 \Rightarrow S = (12, +\infty)$

b) $x - 8 < 5x + 3 \Rightarrow S = \left(\frac{-11}{4}, \infty\right)$

c) $-2 \leq \frac{2x-3}{5} < 7 \Rightarrow S = [\frac{-7}{2}, 19)$

d) $\frac{x+1}{2x-3} > 2 \Rightarrow S = (\frac{3}{2}, \frac{7}{3})$

9.3 Do Capítulo 3, Módulo

Exercícios resolvidos do Capítulo 3

1) Completar as implicações abaixo

a) Se $|x| = 5$ então $x = 5$ ou $x = -5$

b) Se $|x| = 0$ então $x = 0$

c) Se $|x| < 3$ então $-3 < x < 3$

d) Se $|x| > 7$ então $\quad x > 7$ ou $x < -7$

2) Representar na reta real os pontos que satisfazem as seguintes relações

a) $|x| = 3$ $\qquad$ b) $|x| < 3$ $\quad$ c) $|x| > 1$ $\quad |x-3| = 5$

3) Resolver

a) $|x-3| < 4 \Rightarrow S = (-1, 7)$

b) $\frac{1}{|2x-3|} > 5 \Rightarrow S = \left(\frac{7}{5}, \frac{8}{5}\right) - \left\{\frac{3}{2}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{7}{5} < x < \frac{8}{5} \text{ e } x \neq \frac{3}{2}\right\}$

c) $|3x-4| > 2 \Rightarrow S = \left\{x \in \mathbb{R} / x < \frac{2}{3} \text{ ou } x > 2\right\}$

d) $|3x-2| = |5x+4| \Rightarrow x = -3$ ou $x = -\frac{1}{4}$

e) $|x+4| \geq 2 \Rightarrow S = (-\infty, -6) \cup (-2, +\infty)$

Exercícios de Fixação do Capítulo 3

1) Reescreva sem usar o símbolo de valor absoluto

a) $(-5)\,|3-6| = -15$

b) $\frac{|-6|}{2} = 3$

c) $|-7| + |4| = 11$

d) $\quad |4-\pi| = 4-\pi$

2) Use a definição de módulo para reescrever sem usar o símbolo de módulo

a) se $x < 3$ então $|x+3| = -x-3$

b) se $x > 5$ então $|5-x| = x-5$

3) Resolver as equações em $\mathbb{R}$

a) $|5x-3| = 12 \Rightarrow x = 3; x = \frac{9}{5}$

b) $|2x-3| = |7x-5| \Rightarrow x = \frac{2}{5}; x = \frac{8}{9}$

c) $\left|\frac{x+2}{x-2}\right| = 5 \Rightarrow x = 3; x = \frac{4}{3}$

d) $|3x+2| = 5-x \Rightarrow x = \frac{3}{4}; x = -\frac{7}{2}$

e) $2x-7 = |x|+1 \Rightarrow x = 8$

4) Resolva a desigualdade e exprima a solução em termos de intervalos, quando possível

a) $|x+3| < 0,01 \Rightarrow S = (-3.01, -2.99)$

b) $|2x+5| < 4 \Rightarrow S = \left(-\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

c) $|3x-7| \geq 5 \Rightarrow S = \left(-\infty, \frac{2}{3}\right] \cup [4, +\infty)$

d) $|-11-7x| > 6 \Rightarrow S = \left(-\infty, -\frac{17}{7}\right) \cup [-5, 7)$

e) $3 \leq |x-2| \leq 7 \Rightarrow S = [-5, -1] \cup [5, 9]$

f) $\quad \frac{2}{|x+3|} < 1 \Rightarrow S = (-\infty, -5) \cup (-1, +\infty)$

g) $|x+4| \leq |2x-6| \Rightarrow S = (-\infty, \frac{2}{3}] \cup [10, +\infty)$

h) $\left|\frac{7-2x}{5+3x}\right| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow S = \left[\frac{9}{7}, 19\right]$

i) $|x-1| + |x+2| \geq 4 \Rightarrow S = (-\infty, -\frac{5}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$

j) $\left|\frac{5}{2x-1}\right| \geq \left|\frac{1}{x-2}\right| \Rightarrow S = (-\infty, \frac{11}{7}) \cup (3, +\infty) - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

k) $\frac{1}{|x+1||x-3|} \geq \frac{1}{5} \Rightarrow S = [-2, 4] - \{-1, 3\}$

9.4 Do Capítulo 4, Expressões Algébricas

Exercicios Resolvidos 1 do Capítulo 4

1) $10m + 10n = 10(m + n)$

2) $6xy^5 + 12x^2y^2 = 6xy^2(2x + y^3)$

3) $4bx - 32b + 4by = 4b(x + y - 8)$

4) $4x + 4z - bx - bz = 4(x + z) - b(x + z)$

5) $x + x^2 + x^3 + 1 = \left(x^2 + 1\right)(x + 1)$

Exercicios Resolvidos 2 do Capítulo 4

1) Reescreva usando produtos notáveis:

a) $(a + 2)(a - 2) = a^2 - 4$

b) $(xy + 3z)(xy - 3z) = x^2y^2 - 9z^2$

c) $(x^2 - 4y)(x^2 + 4y) = x^4 - 16y^2$

e) $(x + 3)^2 = 6x + x^2 + 9$

f) $(2a - 5)^2 = 4a^2 - 20a + 25$

g) $(2xy + 4)^2 = 16xy + 4x^2y^2 + 16$

i) $(x + 4)^3 = x^3 + 12x^2 + 48x + 64$

j) $(2a + b)^3 = 8a^3 + b^3 + 6ab^2 + 12a^2b$

l) $(a - 1)^3 = 3a - 3a^2 + a^3 - 1$

m) Calcule 41.39 usando um produto notável: $(40 + 1)(40 - 1) = 40^2 - 1^2 = 1.599$

n) Calcule 101.99 usando um produto notável: $(100 + 1)(100 - 1) = 100^2 - 1 = 9999$.

Exercícios de Fixação do Capítulo 4

1) A soma de dois números é igual a 10 e a soma dos seus cubos é igual a 100. Qual o valor do produto desses números?

Sugestão Expandir $(a+b)^3$. Efetuar a multiplicação de $ab\,(a + b)$. Comparar os dois resultados e usar os dados do problema para calcular o valor de ab. Solução: $ab = 30$

2) Calcule o valor de M na expressão abaixo, para: $a = -700, b = -33, x = 23,48 e y = 9,14345$.

$$M = \frac{(ax + by)^2 + (ay - bx)^2}{(ay + bx)^2 + (ax - by)^2}$$

Sugestão: usar produtos notáveis para desenvolver os quadrados. Se você observar CUIDADOSAMENTE a expressão acima, verá que o numerador e o denominador da fração são IGUAIS, e, portanto, $M = 1$, INDEPENDENTE dos valores de a, b, x e y.

1) Desenvolva:

a) $(3x + y)^2 = 9x^2 + 6xy + y^2$

b) $(\frac{1}{2} + x^2)^2 = (\frac{1}{4}) + x^2 + x^4$

c) $((\frac{2x}{3}) + 4y^3)^2 = (\frac{4}{9})x^2 - (\frac{16}{3})xy^3 + 16y^6$

d) $(2x + 3y)^3 = 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$

e) $(x^4 + (\frac{1}{x^2}))^3 = x^{12} + 3x^6 + 3 + \frac{1}{x^6}$

2) Efetue as multiplicações:

a) $(x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$

b) $(x+5)(x-4) = x^2 + x - 20$

3) Simplifique as expressões:

a) $(x+y)^2 - x^2 - y^2 = 2xy$

b) $(x+2)(x-7) + (x-5)(x+3) = 2x^2 - 7x - 29$

c) $(2x-y)^2 - 4x(x-y) = y^2$

4) Simplifique as frações algébricas

a) $\frac{x^2-x}{x-1} = x$

b) $\frac{x+2}{x^2+4x+4} = \frac{1}{x+2}$

c) $\frac{a^2-9}{a-3} = a + 3d$

d) $\frac{x-y}{x^2-y^2} = \frac{x-y}{(x+y)(x-y)} = \frac{1}{x+y}$

e) $\frac{x^2+6x+9}{3x+9} = \frac{x}{3} + 1 = \frac{1}{3}x + 1$

f) $\frac{6xy-3x^2}{4y^2-2xy} = \frac{3x}{2y}$

g) $\frac{ax+ay}{x^2+2xy+y^2} = \frac{a}{x+y}$

h) $\frac{x^2-4}{x+2} = x - 2$

i) $\frac{ax^2-ay^2}{x^2-2xy+y^2} = \frac{a(x+y)}{(x-y)}$

5) Simplificando a expressão

$$\frac{y+z}{(x-y)(x-z)} + \frac{x+z}{(y-x)(y-z)} + \frac{x+y}{(z-x)(z-y)} = 0$$

6) Desenvolver as expressões e simplificar se possível

a) $(2a-3b)^2 = 4a^2 - 12ab + 9b^2$

b) $(a-b)^2 + (a+b)^2 = 2a^2 + 2b^2$

c) $(a-b)^2 - (a+b)^2 = -4ab$

d) $(3z-y)^2 - (z-2y)^2 = 8z^2 - 3y^2 - 2yz$

e) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2) = a^4 - b^4$

7) A expressão que deve ser somada a $4x^2y^2 + 10xy$ para obter o quadrado de $4x - 2xy$ é: $16x^2 - 16x^2y - 10xy$.

8) Calcular $678959^2 - 678958^2 = 1357\,917$.

Sugestao : Faça $x = 678959$ e use produtos notáveis.

9) Simplicar a expressão, considerando que $a \neq \pm b$

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2} \div \frac{a-b}{a+b} = \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2$$

10) Se $m+n+p = 6$, $mnp = 2$ e $mn + mp + np = 1$ então o valor de

$$\frac{m^2+n^2+p^2}{mnp}$$

é: 17

11) Calcule o valor da expressão

$$\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+xz}$$

quando $xyz=1$. Solução: O valor da expressão é 1.

9.5 Do Capítulo 5, Funções

Exercícios Resolvidos do Capítulo 5

1) Encontre os zeros da seguintes funções:

a) $f(x)=2x^2-3x-5 \Rightarrow 2x^2-3x-5=0$, Solução é: $-1, \frac{5}{2}$

b) $f(x)=-3x^2+2x \Rightarrow -3x^2+2x=0$, Solução é: $0, \frac{2}{3}$

c) $f(x)=(7x-1)(2x-3) \Rightarrow (7x-1)(2x-3)=0$, Solução é: $\frac{3}{2}, \frac{1}{7}$

2) Resolver as inequações:

a) $x^2-4x+3>0 \Rightarrow S=\{x\in\mathbb{R}/x<1 \text{ ou } x>3\}$

b) $3x^2-4x<0 \Rightarrow S=\left\{x\in\mathbb{R}/\ 0<x<\frac{4}{3}\right\}$

c) $-2x^2+7x-3\leq 0 \Rightarrow S=\left\{x\in\mathbb{R}/\ x\leq\frac{1}{2} \text{ ou } x\geq 3\right\}$

d) $x^2+x+1>0 \Rightarrow S=\mathbb{R}$

e) $-2x^2+5x-4\geq 0 \Rightarrow S=\varnothing$

3) Resolver as inequações exponenciais

a) $4^x>\frac{1}{4} \Rightarrow S=(-1,+\infty)$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}<\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} \Rightarrow S=(-\infty,1)$

c) $3^{x^2}>3^x \Rightarrow S=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

4) Resolver as inequações logaritmicas

a) $\log_3(x^2-x+3)>2 \Rightarrow S=\{x\in\mathbb{R}/x<-2 \text{ ou } x>3\}$

b) $0<\log_2(2x-1)\leq 1 \Rightarrow S=\left\{x\in\mathbb{R}/1<x<\frac{3}{2}\right\}$

c) $\log_{\frac{1}{2}}(x+2)+\log_{\frac{1}{2}}(x-3)>2 \Rightarrow S=\left\{x\in\mathbb{R}/3<x<\frac{1+\sqrt{26}}{2}\right\}$

5) Determinar o domínio da função definida por $y=\sqrt{3^{x+2}-3^{-x}}$

Solução: $Dom(y)=\{x\in\mathbb{R}/x\geq -1\}$

Exercícios de Fixação do Capítulo 5

1) Sendo $f(x)=3x-1 \Longrightarrow f(0)=-1; f(-\frac{1}{3})=-2$

c) para que valor de x, temos $f(x)=0$. Solução: $x=\frac{1}{3}$

d) Sendo $f(x)=ax+b$ uma função afim e sendo p e q números reais e distintos, calcular $f(p), f(q)$ e mostrar que $\frac{f(p)-f(q)}{p-q}=a$

Solução: Basta substituir p e q na função (no lugar de x) e efetuar os cálculos

2) Resolver as inequações

a) $(2x-3)(x-1)>0 \Rightarrow S=\left\{x\in\mathbb{R}/x<1 \text{ ou } x>\frac{3}{2}\right\}$

b) $(x-2)(3x+1)<0 \Rightarrow S=\left\{x\in\mathbb{R}/-\frac{1}{3}<x<2\right\}$

c) $x^2\geq 5 \Rightarrow S=\left\{x\in\mathbb{R}/x\leq-\sqrt{5} \text{ ou } x\geq\sqrt{5}\ \right\}$

d) $x^2+1<2x^2-3\leq -5x \Rightarrow S=\{x\in\mathbb{R}/-3\leq x<-2\}$

e) $0<x^2+x+1<1 \Rightarrow S=\{x\in\mathbb{R}/-1<x<0\}$

f) $4<x^2-12\leq 4x \Rightarrow S=\{x\in\mathbb{R}/4<x\leq 6\}$

g) $2x+1 \leq x^2 < 2x+3 \Rightarrow S = \left\{x \in \mathbb{R} / -1 < x \leq 1-\sqrt{2} \text{ ou } 1+\sqrt{2} \leq x < 3\right\}$
h) $-1 \leq x^2 - 3 \leq 1 \Rightarrow S = \left\{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x \leq -\sqrt{2} \text{ ou } \sqrt{2} \leq x \leq 2\right\}$
i) $\left(x^2+4x+3\right)(2x+5) < 0 \Rightarrow S = (-\infty,-1) \cup \left(-\frac{5}{2},-3\right)$
j) $\left|2x^2+3x+3\right| \leq 3 \Rightarrow S = \left[-\frac{3}{2},0\right]$
k) $x^3 - x^2 - x - 2 > 0 \Rightarrow S = (2,+\infty)$

3) Resolver as inequações quocientes
a) $\frac{x^2+x-6}{2x^2+3x-2} \geq 0 \Rightarrow S = \left\{x \in \mathbb{R} / x \leq -3 \text{ ou } -2 < x < \frac{1}{2} \text{ ou } x \geq 2\right\}$
b) $\frac{(x-2)^4}{x^2-2x-15} \leq 0 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} / -3 < x < 5\}$
c) $\frac{-6x^2-x+2}{6x^2-5x+1} > 0 \Rightarrow S = \left\{x \in \mathbb{R} / -\frac{2}{3} < x < \frac{1}{3}\right\}$
d) $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} \leq 0 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} / -1 < x < 1\}$
e) $\frac{x-1}{x-2} < \frac{x-3}{x-4} \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} / x < 2 \text{ ou } x > 4\}$
f) $\frac{2}{2x+3} \geq \frac{2}{x-5} \Rightarrow S = (-\infty,-8] \cup \left(-\frac{3}{2},5\right)$
g) $\frac{x-2}{3x+5} \leq 4 \Rightarrow S = (-\infty,-2] \cup \left(-\frac{5}{3},+\infty\right)$
h) $\frac{x+1}{2x-3} > 2 \Rightarrow S = \left(\frac{3}{2},\frac{7}{3}\right)$
i) $\frac{x+1}{2-x} < \frac{x}{3+x} \Rightarrow S = (-\infty,-3) \cup (2,+\infty)$

4) Resolver as equações exponenciais
a) $2^{x-3} + 2^{x-1} + 2^x = 52 \Rightarrow x = 5$
b) $\left(\sqrt[3]{2^{x+4}}\right)^{x-2} = 1 \Rightarrow x = -4$ e $x = 2$
5) Resolver as inequações exponenciais
a) $\left(\sqrt{3}\right)^{2x+4} > \left(\sqrt{3}\right)^{3x} \Rightarrow S = (-\infty,4)$
b) $5^{x^2-8x-20} < 1 \Rightarrow S = (-2,10)$
c) $(0,3)^{4x^2-2x-2} \geq (0,3)^{2x-3} \Rightarrow S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$
6) Resolver as inequações logarítmicas
a) $\log_2(x-2) - \log_{\frac{1}{2}}(x-3) < 1 \Longrightarrow S = \{x \in \mathbb{R} / 3 < x < 4\}$
b) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-\frac{3}{2}) \geq 1 \Longrightarrow S = \left\{x \in \mathbb{R} / -\sqrt{2} \leq x < -\sqrt{\frac{3}{2}} \text{ ou } \sqrt{\frac{3}{2}} < x < \sqrt{2}\right\}$
c) $x^{(\log_a x)+1} > a^2 x$ para $0 < a < 1 \Longrightarrow S = \left\{x \in \mathbb{R} / a^{-\sqrt{2}} < x < a^{\sqrt{2}}\right\}$
d) Dar o domínio da função $f(x) = \sqrt{\log(x^2-2x)}$
Solução: $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} / x \leq 1-\sqrt{2} \text{ ou } x \geq 1+\sqrt{2}\right\}$

7) Se uma bola é atirada para cima com uma velocidade inicial de 32 m/s, então, após t segundos, a distância s acima do ponto de partida, em metros, é dada por $s = 32t - 16t^2$. Em que instante a bola estará no ponto mais alto e qual será esta altura? Faça um esboço do gráfico da equação. Solução $t = 1$s e $s = 16$m

8) A energia potencial elástica W armazenada numa mola esticada é dada pela expressão $W = \frac{1}{2}kx^2$ onde k é a constante elástica da mola e x é o quanto a mola está alongada

Para uma constante elástica igual a 10 unidades

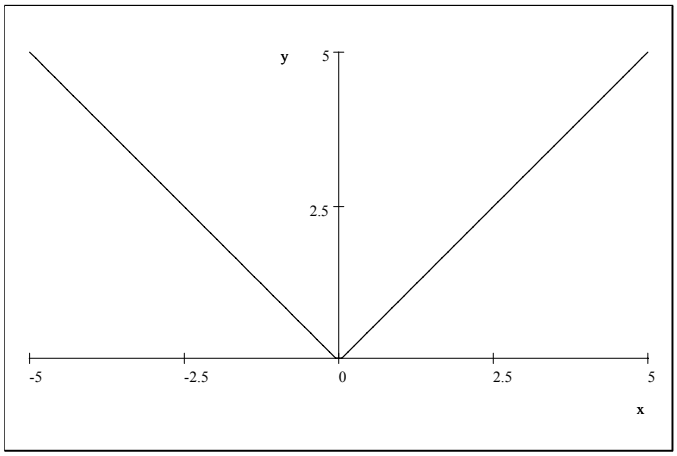
a) Qual o número que exprime o valor de sua energia potencial W, para um alongamento de 2 unidades

b) De quanto está esticada a mola quando sua energia potencial é de 80 unidades

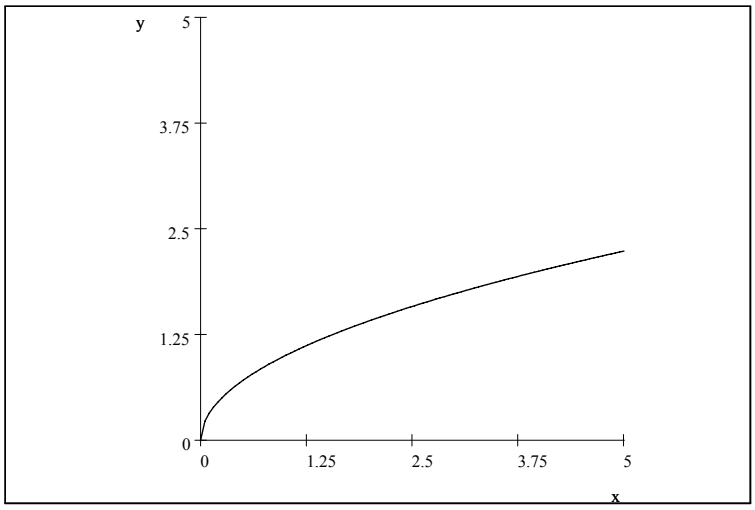
Solução a) $W = 20$ b) $x = 4$ unidades.

9) Desenhar o gráfico das seguintes funções

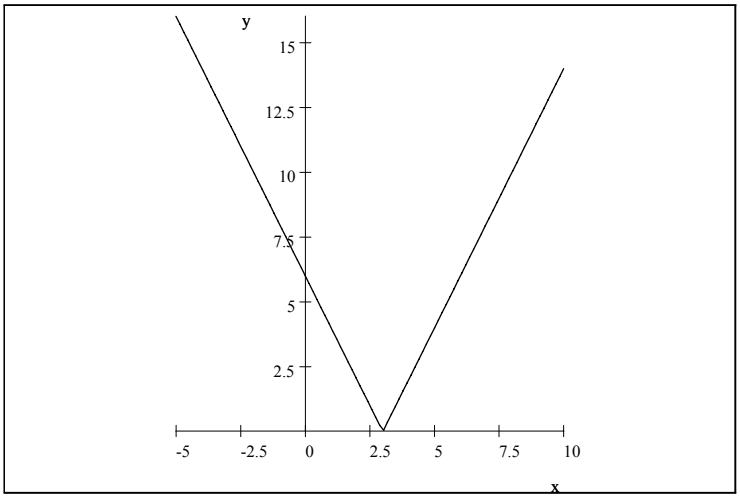
i) $f(x) = |x|$



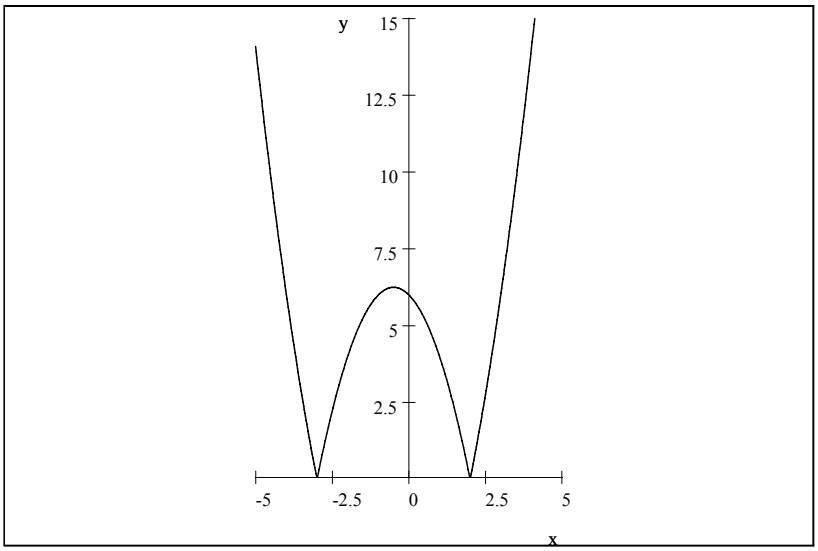
ii) $f(x) = \sqrt{x}$



iii) $f(x) = |2x - 6|$

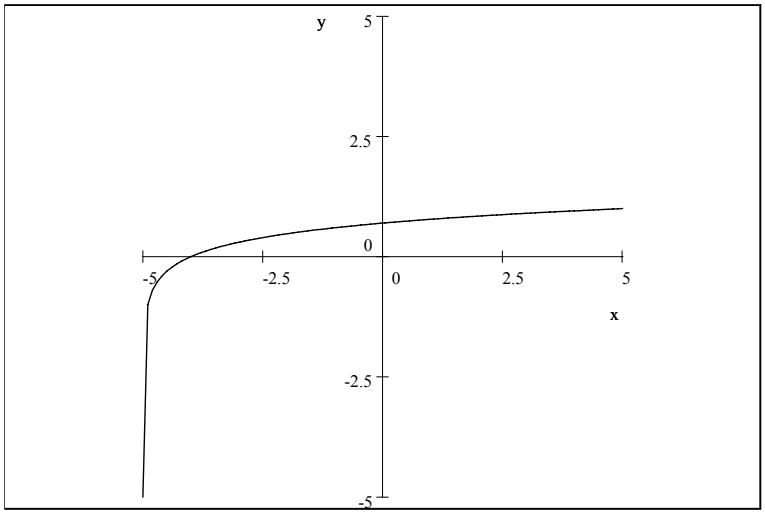


iv) $f(x) = \left|x^2 + x - 6\right|$

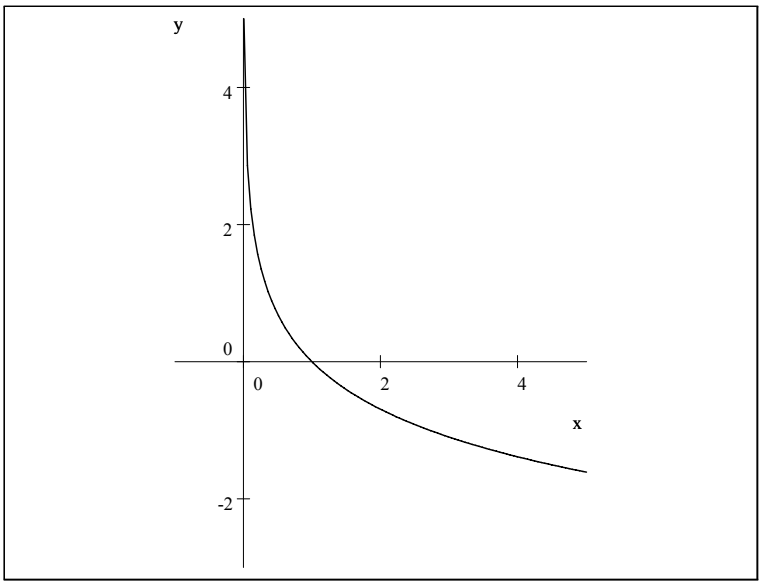


10) Especifique o domínio e faça um esboço do gráfico de cada uma das funções:

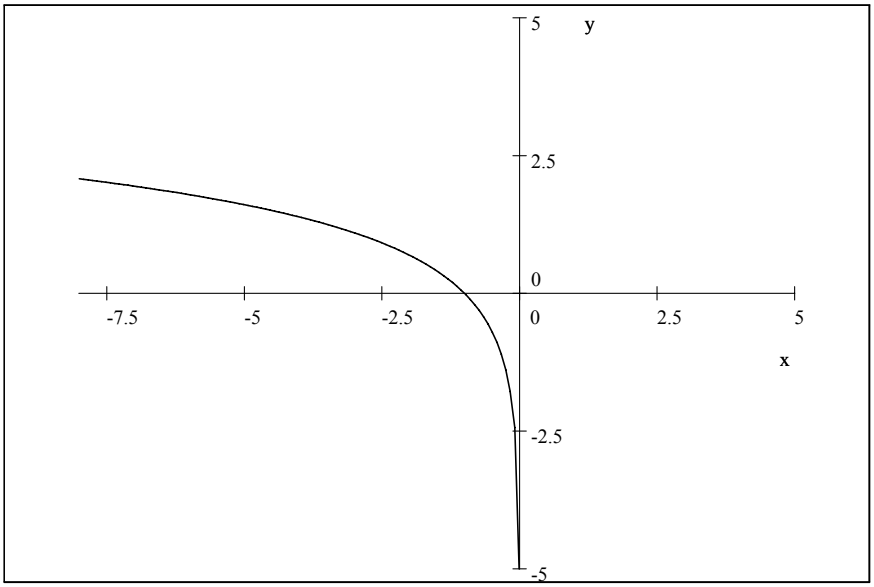
a) $y = \log_{10}(x+5) \;\Rightarrow\; Dom(y) = \{x \in \mathbb{R} / x > -5\} = (-5, +\infty]$



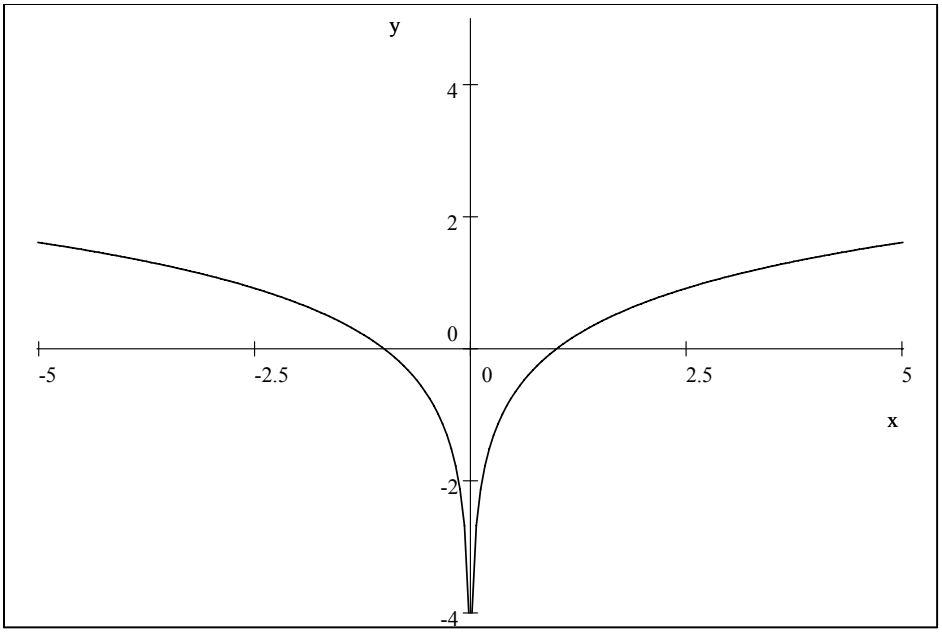
b) $y = -\ln x \Rightarrow\ Dom(y) = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\} = (0, +\infty]$



c) $y = \ln(-x) \Rightarrow\ Dom(y) = \{x \in \mathbb{R} / x < 0\} = (-\infty, 0)$
$y = \ln(-x)$



d) $y = \ln|x| \Rightarrow \ Dom(y) = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$



11) Resolva cada equação em x

a) $\ln x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{e}$

b) $\ln(2x-1)=3 \Rightarrow x=\frac{e^3+1}{2}$

c) $e^{3x-4}=2 \Rightarrow x=\frac{\ln 2+4}{3}$

d) $e^{ax}=Ce^{bx}$, onde C é uma constante e $a \neq b \Rightarrow x=\frac{\ln C}{a-b}$

e) $\ln(\ln x)=1 \Rightarrow x=e^e$

12) Se a população de bactérias começa com 100 e dobra a cada três horas, então o número de bactérias após t horas é $n=f(t)=100.2^{\frac{t}{3}}$

a) Encontre a função inversa e explique seu significado

b) Quando a população atingirá 50.000 bactérias?

Solução:

a) $t=f^{-1}(x)=\log_2\left(\frac{x^3}{3}\right)$. A função $f^{-1}(x)$ indica o tempo necessário para que haja um crescimento de x bactérias.

b) Conforma item a) $t=f^{-1}(50000)=45,24$ horas

13) Após acionado o Flash de uma câmera, a bateria imediatamente começa a recarregar o capacitor do flash, o qual armazena uma carga elétrica dada por $Q(t)=Q_0(1-e^{-\frac{t}{a}})$ (A capacidade máxima de carga é Q_0, e t é medido em segundos.)

a) Encontre a função inversa e explique seu significado.

b) Quanto tempo levará para o capacitor recarregar 90% da capacidade se $a=2$?

Solução:

a) $t=f^{-1}(q)=-\ln\left(1-\frac{q}{Q_0}\right)^a$. A função inversa indica o tempo necessário, em segundos, para que o capacitor adquira uma carga q

b) Observe que 90% da carga quer dizer uma carga de $q=0.9Q_0$.Conforme item a), $t=f^{-1}(0.9Q_0)=-\ln\left(1-\frac{0,9Q_0}{Q_0}\right)^2$,

$t=-\ln(0.1)=2.302\,6$ segundos.

14) Se $f(x)=\ln x$ e $g(x)=x^2-9$, encontre as funções $f\circ g, g\circ f, f\circ f, g\circ g$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\ln\left(x^2-9\right)$

$(g\circ f)(x)=g(f(x)=(\ln x)^2-9$

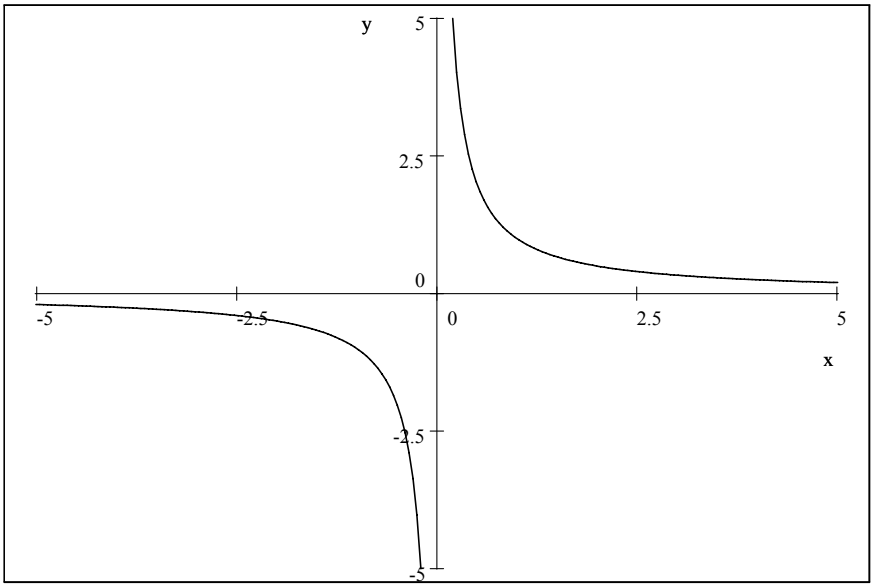
$(f\circ f)(x)=f(f(x))=\ln(\ln x)$

$(g\circ g)(x)=g(g(x)=\left(x^2-9\right)^2-9=x^4-18x^2+72$

15) Expresse a função $F(x)=\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ como uma composta de três funções.

Solução $F(x)=(f\circ g\circ h)(x)$, onde $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $g(x)=x^2+x$ e $h(x)=\sqrt{x}$

16) Faça o gráfico da função $y=\frac{1}{x}$



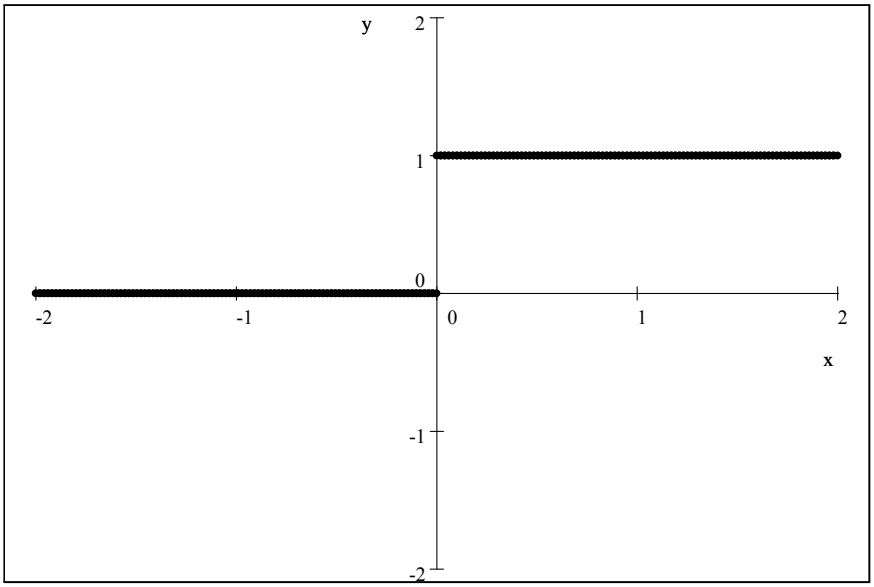
17) A função de Heaviside H é definida por $H(t) = \begin{cases} 0, \text{ se } t < 0 \\ 1, \text{ se } t \geq 0 \end{cases}$. Essa função é usada no estudo de circuitos elétricos para representar o surgimento repentino de corrente elétrica, ou voltagem, quando uma chave é instantaneamente ligada:

a) Faça o gráfico da função de heaviside

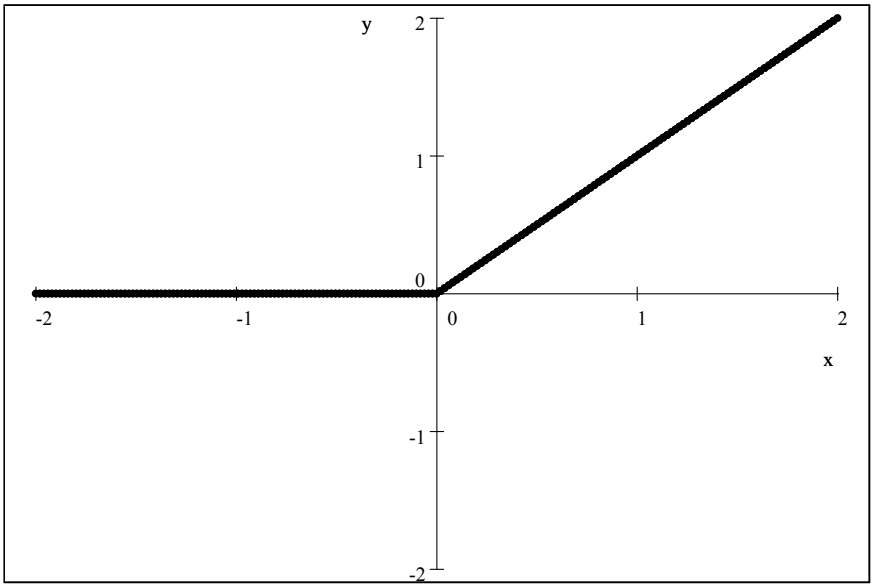
b) Faça um esboço da função rampa $y = tH(t)$

Solução

a)



b)



9.6 Do Capítulo 6, Geometria Plana

Exercícios Resolvidos 1 do Capítulo 6

1) Encontre a equação reduzida da reta que passa pelos pontos $A(1,-1)$ e $B(-1,5)$. Solução: $y=-3x+2$

2) Trace a reta que passa pelos pontos $A(1,1)$ e $B(-2,2)$.Solução: $y=-\frac{x}{3}+\frac{4}{3}$

3) Obter a reta que s que passa por $P(3,-2)$ e é perpendicular à reta r: $3x+14y-17=0$. Solução $14x-3y-48=0$.

Exercicios Resolvidos 2 do Capítulo 6

1) Calcular a distância entre os pontos $A(-3,7)$ e $B(5,1)$. Solução $d\,(A,B)=10$

2) Determinar as coordenadas do ponto médio do segmento que une os pontos $A(1,2)$ e $B(9,14)$. Solução $M(5,8)$

Exercícios Resolvidos 3 do Capítulo 3

1) Obter a equação da circunferência de centro $C(1,-2)$ que passa pelo ponto $P(4,2)$. Solução $(x-1)^2+(y+2)^2=25$

2) Quais das equações abaixo representam uma circunferência:

a) $2x^2+2y^2+xy-1$. Solução: Não

b) $x^2+y^2+2x+3y+4=0$. Solução: Circuferência imaginária

c) $2x^2+2y^2-3x-3y+2=0$. Solução: Sim

d) $x^2+y^2-2x-2y+2=0$. Solução: Um ponto

3) Representar graficamente os conjuntos:

a) $A=\left\{(x,y)\ /\ \ x^2+y^2-2x-2y+1\leq 0\right\}$. Solução: A é o círculo de centro $C(1,1)$ e raio 1

b) $B=\left\{(x,y)\ /\ \ x=2-\sqrt{9-y^2}\right\}$. Solução: C é o arco da circunferência de centro $C(2,0)$ e raio 3 onde figuram os pontos de abcissas $x\leq 2$.

Exercícios de Fixação do capítulo 6

1) Encontre a distância entre A e B e determine o ponto médio deste segmento de reta

a) $A(2,5)$ e $B(1,-1)$. Solução: $d=5, M=\left(\frac{1}{2},3\right)$

b) $A(7,1)$ e $B(1,9)$. Solução: $d=10; M(4,5)$

2) Prove que é isósceles o triângulo de vértices $V_1(5,-2), V_2(6,5)$ e $V_3(2,2)$. Sugestão: Calcular distâncias entre vértices e comparar

3) Prove que os pontos $P(0,-2), Q(-4,8)$ e $R(3,1)$ estão sobre um círculo de centro $C(-2,3)$.Sugestão: Com um dos pontos e o centro encontre o raio.

4) Prove que a distância d do ponto $P(x_0,y_0)$ à reta (r) $Ax+By+c=0$ é:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Sugestão: a) Encontre a reta perpendicular (s) perpendicular a reta r passando pelo ponto P

b) Determine o ponto (Q) de interseção da reta r com a reta s

c) Determine a distância do ponto P ao ponto Q

6) Obter o ponto de interseção das retas $3x+4y-12=0$ e $2x-4y+7=0$. Solução: $P(1,\frac{9}{4})$

7) Mostrar que as retas *r:* $2x+3=0$ e *s:* $y-11=0$ são perpendiculares. Solução $r\parallel y$ e $s\parallel x\Rightarrow r\perp s$

8) Calcular a distância entre as retas *r:* $7x+24y-1=0$ e *s:* $7x+24y+49=0$. Solução: $d=2$

9) Encontre o centro e o raio de cada circunferência

a) $x^2+y^2+8x-6y+20=0$. Solução $C(-4,3), r=\sqrt{5}$

b) $4x^2+4y^2-8x+12y+1=0$. Solução $C(1,-\frac{3}{2}), r=\sqrt{3}$

c) $x^2+y^2-4x+3=0$. Solução $C(2,0), r=1$

d) $3x^2+3y^2-7y=0$. Solução $C(0,\frac{7}{6}), r=\frac{7}{6}$

10) Obter a interseção das circunferências: $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ e $x^2+y^2-8x-2y+13=0$. Solução: $P(2,1)$

11) Obter a equação da reta que passa pelas interseções das circunferências $x^2+y^2+3x-y=0$ e $3x^2+3y^2+2x+y=0$. Solução:$7x-4y=0$.

9.7 Do Capitulo 7, Trigonometria

Exercicios de Fixação do Capitulo 7

1) Exprimir em radianos

a) $36^\circ \Longrightarrow \frac{\pi}{5}$ b) $135^\circ \Longrightarrow \frac{3\pi}{4}$ c) $300^\circ \Longrightarrow \frac{5\pi}{3}$

2) Exprimir em graus

a) $\frac{\pi}{6}$ rad $\Rightarrow 30^\circ$ b) $\frac{\pi}{4}$ rad $\Rightarrow 45^\circ$ c) $\frac{\pi}{3}$ rad $\Rightarrow 60^\circ$ d) $\frac{7\pi}{4}$ rad $\Rightarrow 315^\circ$

3) Quanto mede, em radianos,

a) um arco de $22^\circ 30' \Rightarrow \frac{\pi}{8}$ rad b) um arco de $56^\circ 15' \Rightarrow \frac{5\pi}{16}$ rad

4) Mostre que um arco de 1 rad mede aproximadamente 57°

5) Um móvel faz um percurso de meio quilômetro sobre uma circunferência de diâmetro 200 metros. Qual a medida do ângulo central correspondente ao percurso? Solução: 5 rad

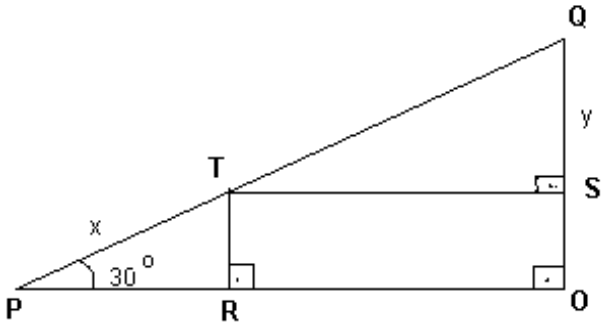
6) Calcular o menor ângulo entre os ponteiros de um relógio nos seguintes instantes

a) 10h 30min $\Rightarrow 135^\circ$ b) 2h 15 min $\Rightarrow 22^\circ$c) 13h 35 min $\Rightarrow 162^\circ 30'$

7) Determine a fórmula para a área A de um setor circular em termos de seu raio e do comprimento de arco L. Solução $A=\frac{1}{2}Lr$

8) Determine a área lateral S de um cone circular reto de raio r e de geratriz L. Solução: $S=\pi rL$

9) Encontre os valores de x e y na figura abaixo:



Dados: $PQ = 10m, \quad TR = 2,3m, \quad PT = x, \quad QS = y$

Solução: x = 4,6m y = 2,7m

10) Encontre os valores de $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha$ onde α é o menor dos ângulos de um triângulo retângulo de catetos 3 e 1.

Solução $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}, \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}, \tan\alpha = \frac{1}{3}$

11) Um carro numa via plana inclindada de 20° em relação à horizontal quanto sobe verticalmente ao percorrer 1 km. Dado: $\sin 20 = 0,34$

Solução:340m

12) Se θ é um ângulo agudo, use identidades fundamentais para escrever a primeira expressão em função da segunda:

a) $\cot\theta; \sin\theta \Longrightarrow \cot\theta = \frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}$

b) $\sec\theta; \sin\theta \Longrightarrow \sec\theta = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$

c) $\tan\theta; \cos\theta \Longrightarrow \tan\theta = \frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}$

d) $\csc\theta; \cos\pi \Longrightarrow \csc\theta = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$

e) $\tan\theta; \sec\theta \Longrightarrow \tan\theta = \sqrt{\sec^2\theta - 1}$

13) Fazendo a substituição trigonométrica $x = a\sin\theta$ para $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, escreva $\sqrt{a^2 - x^2}$ em termos de uma função trigonométrica de θ. Solução: $\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos\theta$

14) Usando a substituição indicada simplifique os radicais:

Solução: Em caso de dúvida chame o professor

15) Determine os intervalos de crescimento e decrescimento para a função $f(x) = \cos x$ definida para $x \in [0, 2\pi]$

16) $\frac{1}{1+\sin^2 x} + \frac{1}{1+\cos^2 x} + \frac{1}{1+\sec^2 x} + \frac{1}{1+\cos\sec^2 x}$ é igual a: 2

17) Os valores que m pode assumir para que exista um arco x satisfazendo a igualdade $\sin x = m - 4$ são: $3 \leq m \leq 5$

18) A expressão $\cos^2 x + \cos^2 x \tan^2 x + \tan^2 x$ é igual a: $\sec^2 x$

19) Sabendo que $\sin x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ e que x está no segundo quadrante, então o valor de $\tan x$ é: $-\sqrt{2}$

20) Determine as soluções das equações em $[0, 2\pi)$

a) $2\sin^2 u = 1 - \sin u \Rightarrow u = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$

b) $\cos\lambda - \sin\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = 0, \frac{3\pi}{2}$

c) $2\tan\varpi - \sec^2\varpi = 0 \Rightarrow \varpi = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

d) $\sin x + \cos x \cot x = \csc x \Rightarrow x \in \mathbb{R}$

e) $\sin 2t + \sin t = 0 \Longrightarrow t = 0, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}$

f) $\cos\mu + \cos 2\mu = 0 \Longrightarrow \mu = \pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

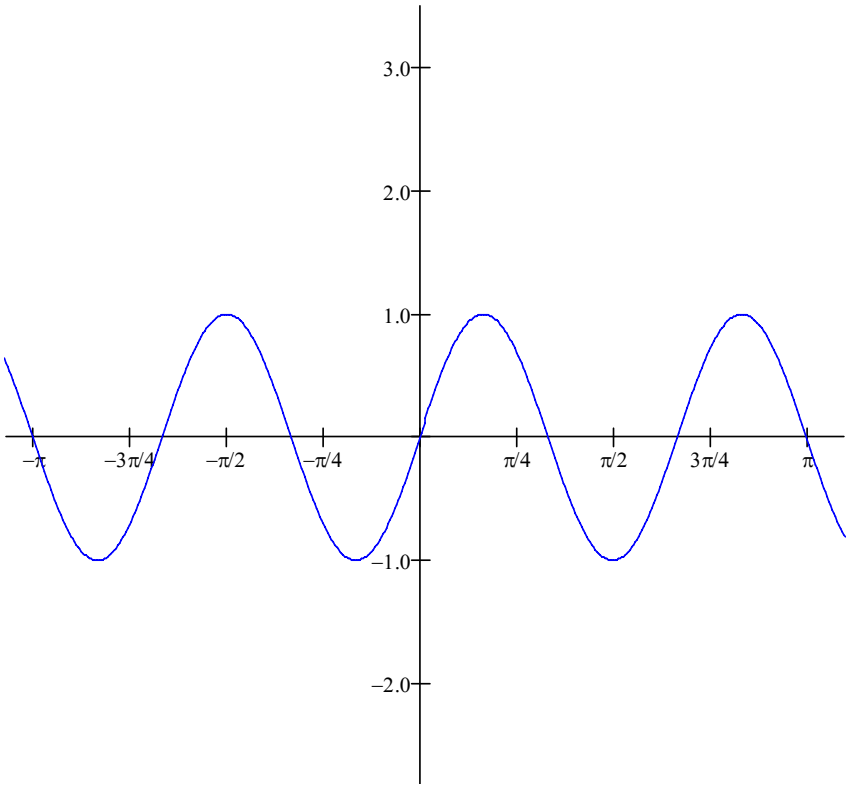
g) $\tan 2x = \tan x \Longrightarrow x = 0$ e $x = \pi$

h) $\sin\frac{u}{2} + \cos u = 1 \Longrightarrow u = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$.

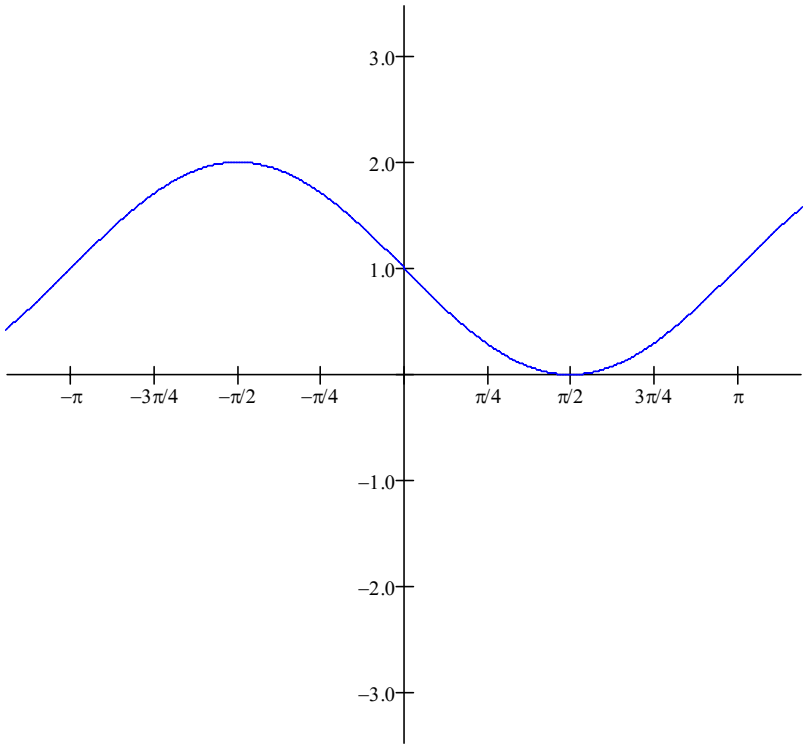
21) Sugestão: Use a lei dos cossenos ou calcule diretamente usando relações trigonométricas

22) Desenhe o gráfico das seguintes funções:

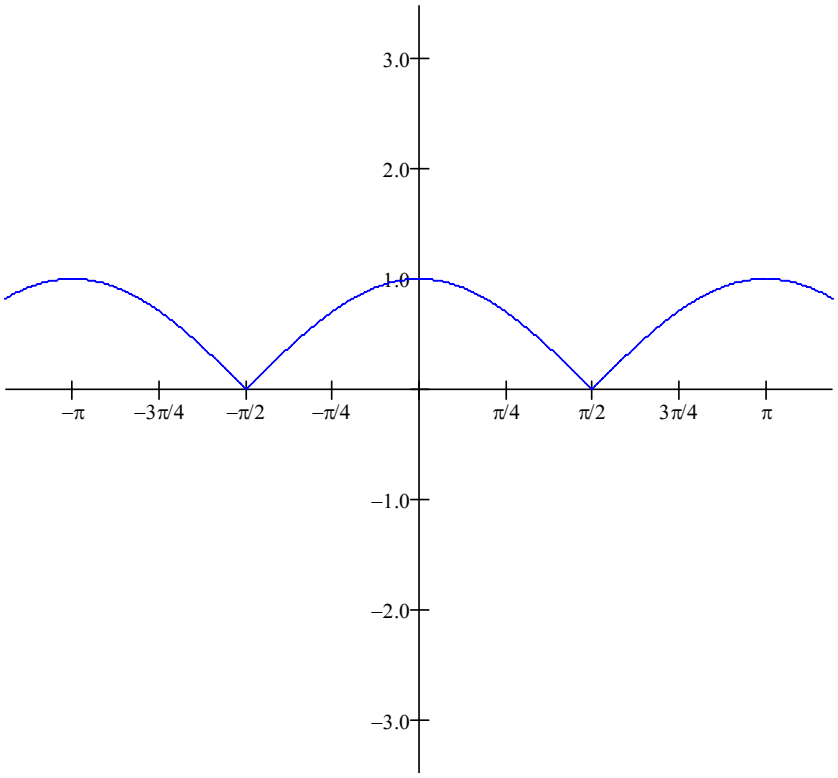
a) $y = \sin(3x)$



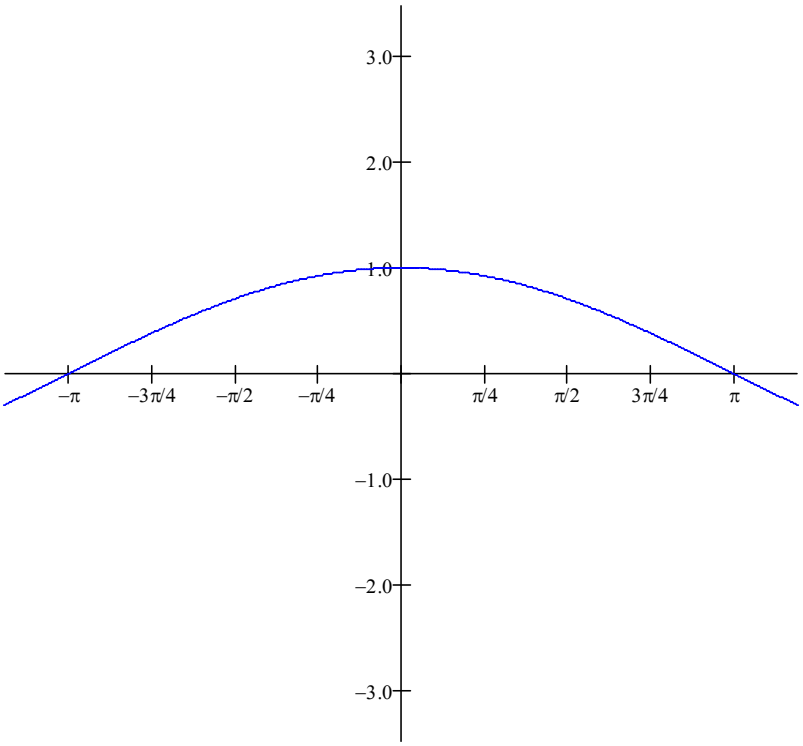
b) $y = 1 - \sin x$



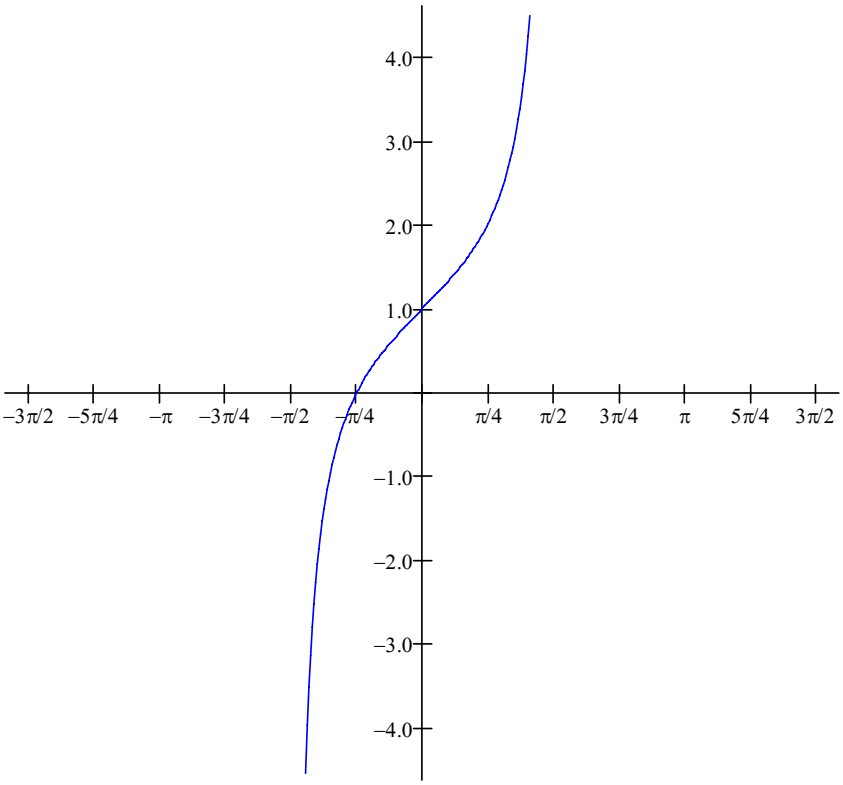
c) $y = |\cos x|$



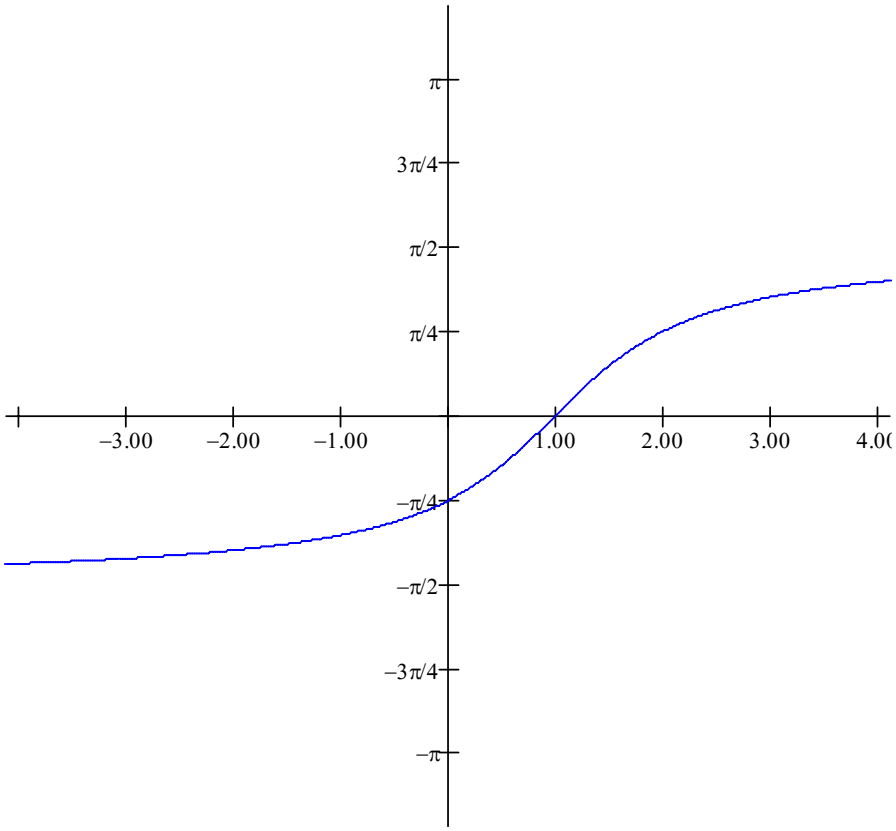
d) $y = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$



23) Dada a função $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \tan x$
a) Desenhe o gráfico de f



b) Determine a inversa de f e desenhe o seu gráfico
$f^{-1}(x) = \arctan(x-1)$



9.8 Do Capítulo 8, Revisão Geral

Lista de Exercícios- Matemática Básica

1. Resolva as inequações em $\mathbb{R}$

   (a) $1 - x - 2x^2 \geq 0 \quad \Rightarrow S = \left\{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x \leq \frac{1}{2}\right\}$

   (b) $2x - 5 < \frac{1}{3} + \frac{3x}{4} + \frac{1-x}{3} \Rightarrow S = \left\{x \in \mathbb{R} / x < \frac{68}{19}\right\}$

   (c) $\frac{x+1}{2-x} < \frac{x}{3+x} \Longrightarrow S = \{x \in \mathbb{R} / x < -3 \text{ ou } x > 2\}$

   (d) $|5 - 6x| \geq 9 \Longrightarrow S = \left\{x \in \mathbb{R} / x \leq -\frac{2}{3} \text{ou } x \geq \frac{7}{3}\right\}$

   (e) $\left|\frac{x-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}\right| < 1 \Longrightarrow S = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$

   (f) $\frac{(x-4)^6}{(x-2)(x+1)} > 0 \Longrightarrow S = \{x \in \mathbb{R} / x > 2 \text{ ou } x < -1\ \} - \{4\}$

   (g) $\frac{x^3+x^2-x-1}{x^2+x-2} < 0 \Longrightarrow S = \{x \in \mathbb{R} / x > -2\ \}$

2. Resolva as equações em $\mathbb{R}$

   (a) $|5x-3| = 12 \Rightarrow x = 3$ e $x = -\frac{9}{5}$

   (b) $(x-3)(x+1)(x+4) = 0 \Rightarrow x = 3$, $x = -1$ e $x = -4$

   (c) $\left|\frac{3x+8}{2x-3}\right| = 4 \Rightarrow x = 4$ e $x = \frac{4}{11}$

   (d) $2x - 7 = |x| + 1 \Rightarrow x = 8$

3. Dados os conjuntos: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -10 < x < 8\}$, $B = (-3, 5]$ e $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$ determine:

   (a) $A \cup B \cup C = (-10, +\infty)$

   (b) $B \cap (A \cup C) = (-3, 5]$

   (c) $A \cup (B \cap C) = (-10, 8)$

   (d) $A - B = (-10, -3] \cup (5, 8)$

   (e) $C - (A \cap C) = [8, +\infty)$

4. O consumo C de água em m^3, pela população de uma cidade em função do tempo t, em segundos, é dado pela equação $C = 2000t$.

   (a) Qual o consumo de água dessa população em 10 segundos? $C = 2.10^4$ m^3

   (b) Qual é o consumo de água dessa população em 10 horas? $C = 72.10^6$ m^3

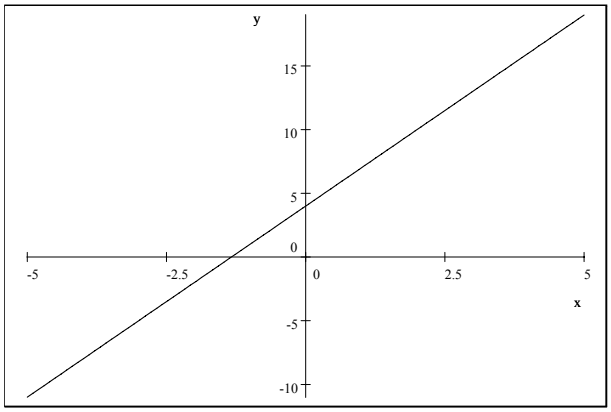
   (c) Em quantos segundos essa população consome $48.000m^3$ de água? $t = 24s$

5. Dada a função $f(x) = 3x + 4$ determine:

   (a) $f(-1) = 1$

   (b) o valor de x tal que $f(x) = 10 \Rightarrow x = 2$

   (c) Faça a representação gráfica dessa função



6. Determine os zeros das funções reais:

   (a) $f(x) = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow x = 1; x = 3$

   (b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x \Rightarrow x = 0; x = 2; x = 4$

   (c) $y = \frac{x+1}{2} - \frac{5x+3}{4} \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$

7. Determine o domínio das funções:

   (a) $f(x) = \frac{x+1}{x-2} \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{2\}$

   (b) $g(x) = (x+1)\sqrt{x-4} \Rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 4\} = [4, +\infty)$

   (c) $h(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-3} \Rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -2 \text{ e } x \neq 3\}$

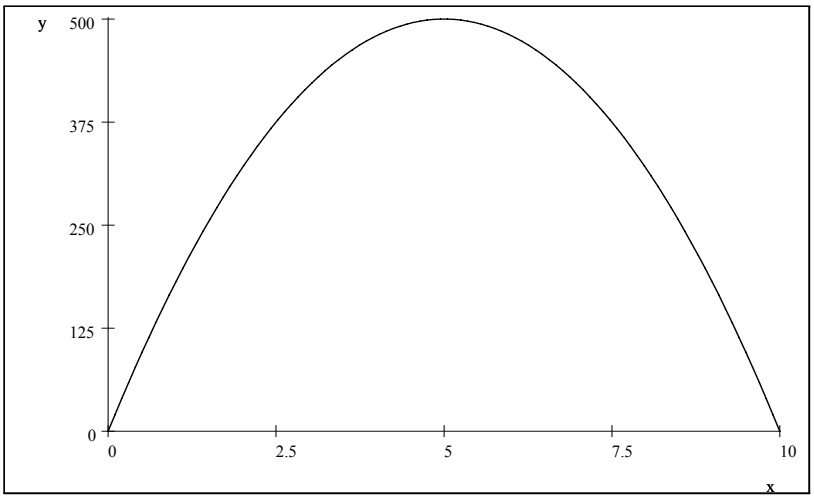
   (d) $l(x) = \ln(x+5) \Rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} / x > -5 \ \} = (-5, +\infty)$

8. Sabe-se que, sob um certo ângulo de tiro, a altura atingida por uma bala, em metros, em função do tempo, em segundos, é dada por $h(t) = -20t^2 + 200t$.

   (a) Qual a altura máxima atingida pela bala? $h = 500m$

   (b) Em quanto tempo, após o tiro, a bala atinge a altura máxima? $t = 5s$

   (c) faça uma representação gráfica dessa situação.



9. Em uma pista de atletismo circular com quatro raias, a medida do raio da circunferência até o meio da primeira raia (onde o atleta corre) é 100 metros e a distância entre cada raia é de 2 metros. Se todos os atletas corressem até completar uma volta inteira, quantos metros cada um dos atletas correria? $A_1 = 2\pi 100m$, $A_2 = 2\pi 10m$, $A_3 = 2\pi 104m$, $A_4 = 2\pi 106m$

10. Um engenheiro deve medir a largura de um rio. Para isso, fixa um ponto A na margem em que se encontra e um ponto B na margem oposta. A seguir desloca-se $40m$ perpendicularmente à reta AB até o ponto C e mede o ângulo $A\hat{C}B$, obtendo 44^o. Qual é a largura do rio? (dados: $\sin 44 = 0,69$, $\cos 44 = 0,71$). Solução: $l = 38,87m$

11. Calcule o valor da expressão: $E = \frac{\sin(\frac{11\pi}{2}) - \sin(\frac{9\pi}{2})}{\cos 48\pi - \cos 33\pi} = -1$

12. Resolver a equação $\sec^2 x + \tan x = 1$ para $0 \leq x \leq 2\pi \Rightarrow x = 0, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{7\pi}{4}$.

13. Determine o valor de x sabendo que($\log_x b)\,(\log_b c)\,(\log_c d)\,(\log_d 729) = 6$. Resposta $x = 3$

14. Resolva o sistema de equações $\begin{cases} 2\log_2\ x + \log_2\ y = 5 \\ \log_2\ x - 2\log_2\ y = -1 \end{cases}$. Resposta: $x^{\frac{9}{5}}$ e $y = 2^{\frac{7}{5}}$

15. Determine o conjunto solução do sistema de equações $\begin{cases} 2^{2x+y} = 4 \\ 2^{x-y} = 2^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$. Resposta:$x = \frac{1}{2}$ e $y = 1$

16. Determinar a solução da equação exponencial : $5^{x+2} - 95^x = 2^{x+9} + 1132^x$. Resposta: $x = 4$

17. Determine a equação da reta que é tangente à parábola de equação $y = 2x^2 + 3$ e que é paralela à reta de equação $y = 8x + 3$. Resposta: $y = 8x - 5$

18. Para que valores de a e b a parábola $y = ax^2 + b$ tangencia a reta $y = x$. Resposta: $ab = \frac{1}{4}$.

19. Resolva cada equação em x

    (a) $\ln x + \ln x^2 = -1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{e}$

    (b) $\ln(2x - 1) - \ln(\frac{x+2}{e^3}) = 3 \Rightarrow x = 3$

    (c) $e^{3x-2} = 4 \Rightarrow x = \frac{2+\ln 4}{3}$

    (d) $e^{ax} = Ce^{bx}$, onde C é uma constante e $a \neq b \Rightarrow x = \frac{\ln C}{a-b}$

    (e) $\ln(\ln(\ln x^2) = 1 \Rightarrow x = \sqrt{e^{(e^2)}}$

20. Se a população de bactérias começa com 200 e dobra a cada 4 horas, então o número de bactérias após t horas é $n = f(t) = 200.2^{\frac{t}{4}}$:

    (a) Encontre a função inversa e explique seu significado. A função inversa é $'f^{-1}(x) = \log_2\left(\frac{x}{200}\right)^4$, ela indica o tempo necessário para se ter x bactérias

    (b) Quando a população atingirá 200.000 bactérias? Solução: $t = \log_2 1000^4$

21. Após acionado o Flash de uma câmera, a bateria imediatamente começa a recarregar o capacitor do flash, o qual armazena uma carga elétrica dada por $Q(t) = 10(1 - e^{-\frac{t}{4}})$

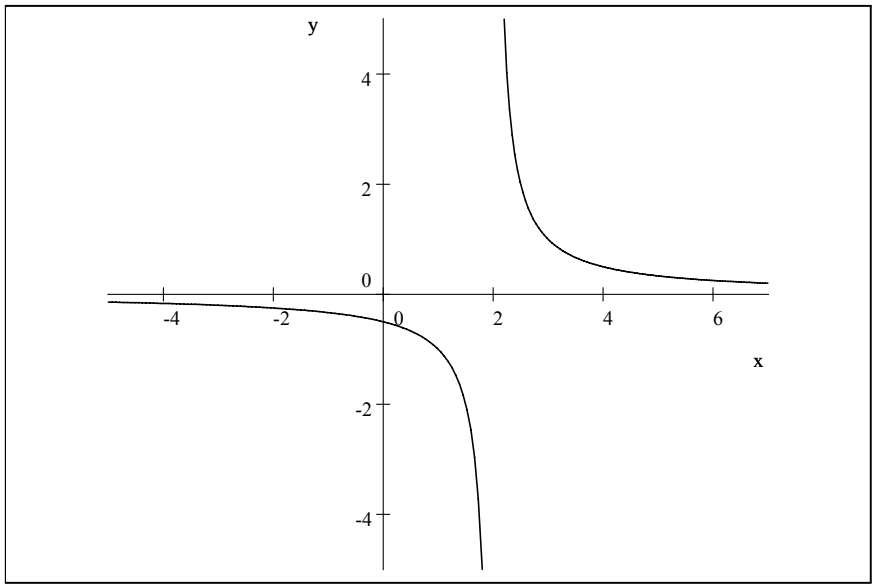
    (a) Encontre a função inversa e explique seu significado.

    (b) Quanto tempo levará para o capacitor recarregar 50% da sua capacidade?

22. Se $f(x) = \ln x$ e $g(x) = x$, encontre as funções $f \circ g, g \circ f, f \circ f, g \circ g$.

23. Expresse a função $F(x) = \frac{1}{\sqrt{x+e^x}}$ como uma composta de três funções. Solução: Considere $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = x + e^x \Rightarrow F(x) = (f \circ g \circ h)(x)$

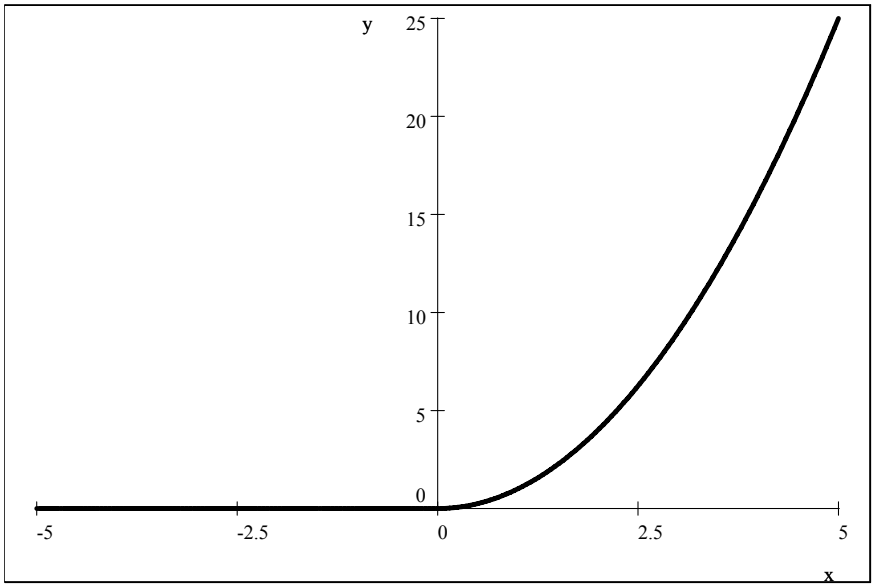
24. Faça o gráfico da função $y = \frac{1}{x-2}$



25. A função de Heaviside H é definida por $H(t) = \begin{cases} 0, \text{ se } t < 0 \\ 1, \text{ se } t \geq 0 \end{cases}$. Essa função é usada no estudo de circuitos elétricos para representar o surgimento repentino de corrente elétrica, ou voltagem, quando uma chave é instantaneamente ligada:

    (a) Faça o gráfico $g(x) = |H(x)|$. Solução $g(x) = |H(x)| = H(x)$ e veja Ex 17 da lista Exercícios de Fixação do Capítulo 5

    (b) Faça um esboço da função $y = t^2 H(t)$



26. Mostre que a função $f(x) = \cos(x)$ é uma função par e que $g(x) = \sin(x)$ é uma função impar.

27. Solução:

$$\begin{aligned} \cos(-x) &= \cos(0-x) = \cos 0 \cos x + \sin 0 \sin x = \cos x \Rightarrow f \ \ \acute{e}\ par; \\ \sin(-x) &= \sin(0-x) = \cos x \sin 0 - \cos 0 \sin x = -\sin x \Rightarrow g\acute{e}par. \end{aligned}$$

28. Mostre que $h(x) = \tan x$ é uma função impar. Solução $\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$

29. Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ determine duas funções g, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde g é par e h é impar tais que $f(x) = g(x) + h(x)$.
Solução:

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{e} \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

30. Se f é uma função par e g é uma função impar o que podemos dizer a respeito das funções

    (a) $l(x) = f(x) + g(x) \Rightarrow$ nada se pode afirmar sobre a paridade de l
    (b) $h(x) = (f \circ g)(x) \Rightarrow h$ é uma função par
    (c) $m(x) = f(x).g(x) \Rightarrow h$ é uma função impar
    (d) $v(x) = |f(x)|\,|g(x)| \Rightarrow h$ é uma função par