

MATEMÁTICA BÁSICA

Prof. Dr Rogério de Aguiar
Chefe do Departamento de Matemática
CCT - UDESC - JOINVILLE

Email: dma2ra@joinville.udesc.br
Home Page: www.joinville.udesc.br/dmat/rogerio

Fevereiro de 2008

Sumário

1	Teoria dos Conjuntos	4
1.1	Definição de conjunto	4
1.2	Operações entre conjuntos	5
1.3	Propriedades	6
1.4	Exercícios Resolvidos	6
2	Números	7
2.1	Conjuntos Numéricos	7
2.1.1	Naturais	7
2.1.2	Inteiros	7
2.1.3	Racionais	7
2.1.4	Irracionais	8
2.1.5	Reais	8
2.2	Ordenação dos números reais	8
2.2.1	Propriedades das desigualdades	9
2.2.2	Intervalos	9
2.2.3	Exercícios Resolvidos	10
2.3	Exercícios de Fixação	10
3	Módulo	12
3.1	Introdução	12
3.2	Propriedades do módulo	12
3.3	Inequações modulares	12
3.3.1	Exercícios resolvidos	13
3.4	Exercícios de Fixação	13
4	Expressões Algébricas	14
4.1	Introdução	14
4.1.1	Exercícios Resolvidos 1	15
4.2	Produtos Notáveis:	15
4.2.1	Exercícios Resolvidos 2	15
4.3	Exercícios de Fixação	16

5	Funções	18
5.1	Introdução	18
5.2	Sistema Cartesiano Ortogonal	20
5.3	Função Afim	21
5.3.1	Exercício Resolvido Função Afim	24
5.4	Função Modular	25
5.5	Função quadrática	26
5.5.1	Exercícios Resolvidos Função Quadrática	29
5.6	Função Raiz n -ésima de x	29
5.6.1	Exercícios Resolvidos Função Raiz n -ésima de x	31
5.7	Função Exponencial	32
5.7.1	Exercícios Resolvidos Função Exponencial	34
5.8	Função Logarítmica	34
5.8.1	Exercício Resolvido Função Logarítmica	36
5.9	Função Hiperbólica	37
5.9.1	Exercícios Resolvidos Funções Hiperbólicas	39
5.10	Tipos importantes de funções	39
5.11	Construção de Gráficos	41
5.12	Exercícios de Fixação	44
6	Geometria Plana	47
6.1	Reta	47
6.1.1	Exercícios Resolvidos 1	49
6.2	Distância	49
6.2.1	Exercícios Resolvidos 2	49
6.3	Circunferência	49
6.3.1	Exercícios Resolvidos 3	50
6.4	Exercícios de Fixação	50
7	Trigonometria	52
7.1	Ângulos e Arcos	52
7.2	Trigonometria Básica no Triângulo Retângulo	54
7.3	Relações Trigonométricas:	54
7.4	Trigonometria Básica no Triângulo Qualquer	56
7.4.1	Exercício Resolvido	57
7.5	Ciclo Trigonométrico	57
7.6	Funções Trigonométricas	60
7.7	Identidades trigonométricas	61
7.8	Exercícios de Fixação	63
8	Revisão Geral	66

9	Respostas	70
9.1	Do Capítulo 1, Teoria de Conjuntos	70
9.2	Do Capítulo 2, Números	71
9.3	Do Capítulo 3, Módulo	72
9.4	Do Capítulo 4, Expressões Algébricas	73
9.5	Do Capítulo 5, Funções	75
9.6	Do Capítulo 6, Geometria Plana	85
9.7	Do Capítulo 7, Trigonometria	87
9.8	Exercício Resolvido	87
9.9	Do Capítulo 8, Revisão Geral	94

Capítulo 1

Teoria dos Conjuntos

1.1 Definição de conjunto

Conjunto: representa uma coleção de objetos:

Ex. 1: O conjunto de todos os brasileiros.

Ex. 2 : O conjunto de todos os números reais tal que $x^2-4=0$.

Notação: Em geral, um conjunto é denotado por uma letra maiúscula do alfabeto: **A, B, C, ..., Z**.

Elemento: É um dos componentes de um conjunto. Em geral, um elemento de um conjunto é denotado por uma letra minúscula do alfabeto: **a, b, c, ..., z**

Pertinência: É a característica associada a um elemento que faz parte de um conjunto.

Símbolo de pertinência: Se um elemento pertence a um conjunto utilizamos o símbolo $\in$ que se lê: "pertence". Se um elemento não pertence a um conjunto utilizamos o símbolo $\notin$ que se lê "não pertence". Exemplo $1 \in \mathbb{N}$ e $-1 \notin \mathbb{N}$

Algumas notações para conjuntos

Apresentação: Os elementos do conjunto estão dentro de duas chaves $\{ \}$

$A = \{a, e, i, o, u\}$, $M = \{João, Maria, José\}$

Descrição: O conjunto é descrito por uma ou mais propriedades.

$A = \{x \mid x \text{ é uma vogal}\}$, $M = \{x \mid x \text{ é uma pessoa da família de Maria}\}$

Diagrama de Venn-Euler: Os conjuntos são mostrados graficamente.



Alguns conjuntos especiais

Conjunto vazio: É um conjunto que não possui elementos. É representado por $\{ \}$ ou por $\emptyset$.

Conjunto universo: É um conjunto que contém todos os elementos do contexto no qual estamos trabalhando e também contém todos os conjuntos desse contexto. O conjunto universo é representado por uma letra U .

Subconjuntos

Dados os conjuntos A e B , diz-se que A está contido em B , denotado por $A \subset B$, se todos os elementos de A também estão em B . O conjunto A é denominado subconjunto de B .

Se $A \subset B$ então dizemos que B contém A e escrevemos $B \supset A$

O conjunto vazio está contido em todos os conjuntos.

1.2 Operações entre conjuntos

União de conjuntos

A união dos conjuntos A e B é o conjunto de todos os elementos que pertencem ao conjunto A ou ao conjunto B .

$$A \cup B = \{x/x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Exemplo: Se $A = \{a, e, i, o\}$ e $B = \{3, 4\}$ então $A \cup B = \{a, e, i, o, 3, 4\}$.

Propriedades

- a) $A \cup A = A$
- b) $A \cup \emptyset = A$
- c) $A \cup B = B \cup A$
- d) $A \cup U = U$ (onde U é o conjunto universo)

Interseção de conjuntos

A interseção dos conjuntos A e B é o conjunto de todos os elementos que pertencem ao conjunto A e ao conjunto B .

$$A \cap B = \{x/x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Exemplo: Se $A = \{a, e, i, o, u\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$ então $A \cap B = \emptyset$.

Quando a interseção de dois conjuntos A e B é o conjunto vazio, dizemos que estes conjuntos são disjuntos.

Propriedades

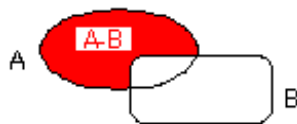
- a) $A \cap A = A$
- b) $A \cap \emptyset = \emptyset$
- c) $A \cap B = B \cap A$
- d) $A \cap U = A$ (onde U é o conjunto universo)

Diferença de conjuntos

A diferença entre os conjuntos A e B é o conjunto de todos os elementos que pertencem ao conjunto A e não pertencem ao conjunto B .

$$A - B = \{x/x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Do ponto de vista gráfico, a diferença pode ser vista como:



Propriedades

- a) $A - \emptyset = A$ c) $A - A = \emptyset$
b) $\emptyset - A = \emptyset$ d) $A - B \neq B - A$, se $A \neq B$ (a diferença não é comutativa).

Complemento de um conjunto

O complemento do conjunto B contido no conjunto A, denotado por $C_A B$, é a diferença entre os conjuntos A e B, ou seja, é o conjunto de todos os elementos que pertencem ao conjunto A e não pertencem ao conjunto B.

$$C_A B = A - B = \{x / x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

1.3 Propriedades

- a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow$ Propriedade distributiva
b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \Rightarrow$ Propriedade distributiva
c) $A \cap (A \cup B) = A \Rightarrow$ Lei da absorção
d) $A \cup (A \cap B) = A \Rightarrow$ Lei da absorção

1.4 Exercícios Resolvidos

a) Em uma cidade existem dois clubes A e B, que têm juntos 6000 sócios. O clube A tem 4000 sócios e os dois clubes têm 500 sócios comuns. Quantos sócios têm o clube B? Quantos são os sócios do clube B que não são sócios do clube A?

b) Seja $A = \{a, b, c, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{d, e, f, 3, 7, 8\}$. Determinar $A - B, A \cap B, A \cup B, B - A$

c) Em uma cidade existem três cavalos X, Y, Z que participam de um páreo em uma corrida de cavalos. X e Y têm 400 apostadores em comum. Os cavalos Y e Z têm 300 apostadores em comum. Os cavalos X e Z não têm apostadores em comum. X e Y têm juntos 9000 apostadores e Y e Z têm juntos 8000 apostadores. Sabendo que Z tem 3000 apostadores determinar o número de apostadores dos cavalos X e Y.

d) Uma cidade possui 10000 habitantes, que freqüentam três clubes recreativos, divididos da seguinte forma: 45% freqüentam o clube A; 29% freqüentam o clube B; 53% freqüentam o clube C; 25% freqüentam somente o clube A; 10% freqüentam somente o clube B; 30% freqüentam somente o clube C; 9% freqüentam os clubes A e C. Sabendo que A, B e C possuem freqüentadores em comum, e que sempre existem freqüentadores em comum a dois clubes, determine o número de habitantes que freqüentam mais de um clube.

Capítulo 2

Números

2.1 Conjuntos Numéricos

2.1.1 Naturais

Definimos o conjunto dos números naturais por, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

Convém destacar um subconjunto: $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

2.1.2 Inteiros

Definimos o conjunto dos números inteiros por, $\mathbb{Z} = \{\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

No conjunto dos inteiros destacamos os seguintes subconjuntos:

$$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\} = \{\dots - 3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\} \text{ (inteiros não negativos)}$$

$$\mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, -3, -4, \dots\} \text{ (inteiros não positivos)}$$

$$\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, 4, \dots\} \text{ (inteiros positivos)}$$

$$\mathbb{Z}_-^* = \{-1, -2, -3, -4, \dots\} \text{ (inteiros negativos)}$$

2.1.3 Racionais

$$\mathbb{Q} = \{x \mid x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}.$$

Obs: Um número racional pode aparecer em forma de dízima periódica, isto é, um numeral decimal, com a parte decimal formada por infinitos algarismos que se repetem periodicamente, como por exemplo: 4,5555 (período 5), 10,878787 (período 87) e 9,8545454... (período 54, parte não periódica 8)

No conjunto dos racionais adotamos as seguintes definições:

$$\text{a) } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$$

$$\text{b) } \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

$$\text{c) } \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

No conjunto dos racionais destacamos os seguintes subconjuntos:

$$\mathbb{Q}_+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0\} \text{ (racionais não negativos)}$$

$$\mathbb{Q}_- = \{x \in \mathbb{Q} / x \leq 0\} \text{ (racionais não negativos)}$$

$$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\} \text{ (racionais não nulos)}$$

2.1.4 Irracionais

É todo número decimal não-exato e não periódico, bem como toda raiz não-exata. Ou seja todo número que não pode ser expresso como o quociente de dois números racionais.

- raiz quadrada de dois = 1,414...;
- raiz quadrada de três = 1,73...;
- número pi = 3,141516

Notação: Denotaremos o conjunto dos irracionais por $\mathbf{I}$

2.1.5 Reais

Definimos o conjunto dos números reais como a união entre os conjuntos dos racionais e irracionais: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbf{I}$

Diante do exposto acima concluímos que

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}, \quad \mathbf{I} \subset \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \mathbb{Q} \cap \mathbf{I} = \emptyset$$

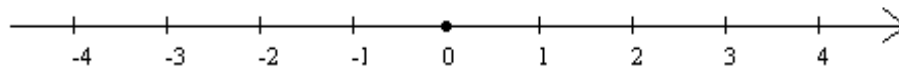
No conjunto dos reais destacamos os seguintes subconjuntos:

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\} \text{ (reais não nulos)}$$

$$\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\} \text{ (reais positivos)}$$

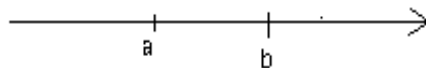
$$\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R} / x < 0\} \text{ (reais negativos)}$$

Existe uma correspondência biunívoca entre os números reais e os pontos de um eixo ordenado



2.2 Ordenação dos números reais

Na reta real os números estão ordenados, um número a é menor que qualquer número colocado à sua direita.



Expressimos este fato da seguinte maneira: a é menor que b , ou equivalentemente, que b é maior que a .

Se a e b são números reais então dizemos que $a > b$ (a é maior que b), se $a - b$ é um número positivo. A este fato damos o nome de desigualdade. Outros tipos de desigualdade são $a < b$, $a \leq b$, $a \geq b$.

2.2.1 Propriedades das desigualdades

- a) Se $a > b$ e $b > c$ então $a > c$, Ex: $10 > 0 > -10 \Rightarrow 10 > -10$
 b) Se $a > b$ então $a \pm c > b \pm c$, Ex: $10 \pm 5 > -10 \pm 5 \Rightarrow 15 > -5$ e $5 > -15$
 c) Se $a > b$ e $c > 0$ então $ac > bc$, Ex: $10.5 > -10.5 \Rightarrow 50 > -50$
 d) Se $a > b$ e $c < 0$ então $ac < bc$, Ex: $10. - 3 < -10. - 3 \Rightarrow -30 < 30$
 e) Se $a > b$ então $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, se $a \neq 0$ e $b \neq 0$

2.2.2 Intervalos

Sendo a e b dois números reais, com $a < b$, temos os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$ chamados intervalos.

Intervalo aberto:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$



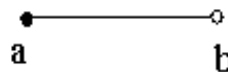
Intervalo fechado:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$



Intervalo semi-aberto à direita:

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$



Intervalo semi-aberto à esquerda:

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

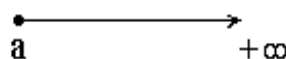


Intervalo infinitos

$$(-\infty, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x < +\infty\} = \mathbb{R}$$



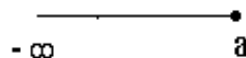
$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < +\infty\}$$



$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < +\infty\}$$



$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x \leq a\}$$



$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x < a\}$$



2.2.3 Exercícios Resolvidos

- 1) Usando a notação de conjunto escrever os intervalos
 - a) $(-3, 6)$ b) $(\pi, 6]$ c) $[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ d) $[-1, 0)$ e) $(-\infty, 0)$
- 2) Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x < 8\}$ determinar
 - a) $A \cap B$ b) $A - B$ c) $B - A$
- 3) Representar os seguintes intervalos:
 - a) $[-1, 1]$ b) $[0, 10)$ c) $(-3, 1]$ d) $(4, 6)$ e) $(5, +\infty)$
- 4) Resolver graficamente
 - a) $(\pi, 6] \cup [-1, 1)$ b) $[\sqrt{2}, \sqrt{3}] \cap [\frac{1}{2}, 3]$
- 5) Resolver as inequações
 - a) $3 + 7x \leq 2x + 9$ b) $7 \leq 2 - 5x < 9$
 - c) $\frac{2x-5}{x-2} < 1$ d) $\frac{x-1}{x} \geq 4$

2.3 Exercícios de Fixação

- 01) Quais das alternativas abaixo é falsa
 - a) $\{\emptyset\}$ é um conjunto unitário
 - b) $\{\}$ é o conjunto vazio
 - c) Se $A = \{1, 2, 3\}$ então $\{3\} \in A$
 - d) $\{x \in \mathbb{N} \mid x = 2n, \text{ onde } n \in \mathbb{N}\}$ é o conjunto dos números naturais ímpares
 - e) $\emptyset \subset [\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}]$
 - f) $[\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}] \cup \{\}$ $\subset \emptyset$
 - h) $B \cap A \subset A \cup B$
 - i) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} - \mathbb{Z}$
- 02) Escrever usando o sinal de desigualdade
 - a) a é um número positivo b) b é um número negativo c) a é maior que b
- 03) Representar na reta real os seguintes intervalos
 - a) $[-10, 11]$ b) $[0, 3)$ c) $(-3, 0]$ d) $(3, 7)$ e) $(0, +\infty)$
- 04) Representar graficamente os intervalos dados pelas desigualdades
 - a) $2 \leq x \leq 7$ b) $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{5}$ c) $0 \leq x < 2$ d) $-\infty < x < -1$
- 05) Determinar graficamente
 - a) $(5, 7] \cap [6, 9]$ b) $(-\infty, 7] \cap [8, 10]$ c) $(-3, 0] \cup (0, 8)$ d) $(0, 7] - (5, 7)$
- 06) Sejam $M = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 10\}$, $N = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 8\}$ e $P = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 9\}$. Determinar o conjunto $P - (M - N)$.

07) Resolva as inequações e exprima a solução em termos de intervalos quando possível:

a) $2x + 5 < 3x - 7$

c) $-2 \leq \frac{2x-3}{5} < 7$

b) $x - 8 < 5x + 3$

d) $\frac{x+1}{2x-3} > 2$

Capítulo 3

Módulo

3.1 Introdução

Definição: O módulo, ou valor absoluto, de um número real " x " é denotado por $|x|$ e definido por

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Exemplos $|9| = 9$, $|\frac{1}{5}| = \frac{1}{5}$, $|0| = 0$

Da definição de módulo podemos concluir que o módulo de um número é sempre um número não negativo, ou seja, $|x| \geq 0$.

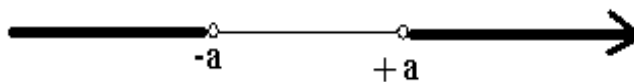
3.2 Propriedades do módulo

- i) $|x| = |-x|$; ii) $|x \cdot y| = |x| |y|$; iii) $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$ iv) $|x| \geq 0$
v) $|x + y| \leq |x| + |y|$ vi) $|x| = |y| \Leftrightarrow y = x \text{ ou } y = -x$

3.3 Inequações modulares

Notemos que se $a > 0$ valem as seguintes conclusões

$|x| > a$ se e somente se $x < -a$ ou $x > a$



$|x| < a$ se e somente se $-a < x < a$



1) Completar as implicações abaixo

a) Se $|x| = 5$ então $x =$ _____ b) Se $|x| = 0$ então $x =$ _____

c) Se $|x| < 3$ então _____ $< x < 3$

d) Se $|x| > 7$ então _____ $x >$ _____ ou _____ $x <$ _____

2) Representar na reta real os pontos que satisfazem as seguintes relações

a) $|x| = 3$ b) $|x| < 3$ c) $|x| > 1$ $|x - 3| = 5$

3) Resolver as inequações

a) $|x - 3| < 4$ b) $\frac{1}{|2x-3|} > 5$ c) $|3x - 4| > 2$

d) $|3x - 2| = |5x + 4|$ e) $|x + 4| \geq 2$

- 1) Rescreva sem usar o símbolo de valor absoluto
 - a) $(-5)|3-6|$ b) $\frac{|-6|}{2}$ c) $|-7|+|4|$ d) $|4-\pi|$
 - 2) Complete as afirmações
 - a) se $x < -3$ então $|x+3| =$
 - b) se $x > 5$ então $|5-x| =$
 - 3) Resolver as equações em $\mathbb{R}$
 - a) $|5x-3| = 12$
 - b) $|2x-3| = |7x-5|$
 - c) $\left|\frac{x+2}{x-2}\right| = 5$
 - d) $|3x+2| = 5-x$
 - e) $2x-7 = |x|+1$
 - 4) Resolva a desigualdade e exprima a solução em termos de intervalos, quando possível
 - a) $|x+3| < 0,01$
 - b) $|2x+5| < 4$
 - c) $|3x-7| \geq 5$
 - d) $|-11-7x| > 6$
 - e) $3 \leq |x-2| \leq 7$
 - f) $\frac{2}{|x+3|} < 1$
 - g) $|x+4| \leq |2x-6|$
 - h) $\left|\frac{7-2x}{5+3x}\right| \leq \frac{1}{2}$
 - i) $|x-1| + |x+2| \geq 4$
 - j) $\left|\frac{5}{2x-1}\right| \geq \left|\frac{1}{x-2}\right|$
 - k) $\frac{1}{|x+1||x-3|} \geq \frac{1}{5}$

Capítulo 4

Expressões Algébricas

4.1 Introdução

As expressões algébricas são expressões matemáticas que apresentam letras e podem conter números. São também denominadas expressões literais. As letras nas expressões são chamadas variáveis o que significa que o valor de cada letra pode ser substituída por um valor numérico.

Para resolver ou simplificar uma expressão algébrica devemos utilizar as propriedades da potenciação e radiciação, fatoração e os produtos notáveis.

Como as propriedades mais utilizadas são as propriedades da potenciação damos a seguir a lista dessas propriedades

Propriedades

Alguns Exemplos

$$x^0 = 1 (x \text{ não nulo})$$

$$5^0 = 1$$

$$x^m x^n = x^{m+n}$$

$$6^2 6^3 = 6^{2+3} = 6^5 = 7776$$

$$x^m y^m = (xy)^m$$

$$7^3 5^3 = (35)^3 = 42\,875$$

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

$$\frac{7^6}{7^2} = 7^4 = 2401$$

$$\frac{x^m}{y^m} = \left(\frac{x}{y}\right)^m$$

$$5^2 \div 3^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2$$

$$(x^m)^n = x^{mn}$$

$$(5^3)^2 = 5^6 = 15625$$

$$x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{1}{n}}$$

$$6^{\frac{3}{2}} = (6^3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{216} = 6\sqrt{6}$$

$$x^{-m} = \frac{1}{x^m}$$

$$3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$$

$$x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{x^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{(x^m)^{\frac{1}{n}}}$$

$$\frac{1}{6^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{6\sqrt{6}}$$

Podemos escrever a potenciação como uma radiciação da seguinte forma

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \quad \text{e} \quad x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

Dada uma expressão algébrica qualquer, podemos transformá-la, se possível, no produto de duas ou mais outras expressões algébricas. A este procedimento damos o nome de fatoração.

Fator comum: A expressão $ax + bx$ tem como fator comum o x , neste caso podemos colocar o x em evidência e obter $ax + bx = (a + b)x$

Agrupamento: Podemos utilizar a fatoração diversas vezes na mesma expressão: Exemplo

$$ax + bx + ay + by = (a + b)x + (a + b)y = (a + b)(x + y)$$

4.1.1 Exercícios Resolvidos 1

Fatorar as seguintes expressões:

- 1) $10m + 10n$
- 2) $6xy^5 + 12x^2y^2$
- 3) $4bx - 32b + 4by$
- 4) $4x + 4z - bx - bz$
- 5) $x + x^2 + x^3 + 1$

4.2 Produtos Notáveis:

Os produtos notáveis são aqueles produtos entre expressões algébrica que são freqüentemente usados e para evitar a multiplicação de termo a termo, existem algumas fórmulas que convém serem memorizadas:

- 1) Soma pela diferença: quadrado do primeiro menos o quadrado do segundo.

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

- 2) Quadrado da soma: quadrado do primeiro, mais duas vezes o primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

- 3) Quadrado da diferença: quadrado do primeiro, menos duas vezes o primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Existem outras outras fórmulas como por exemplo

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a - b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\end{aligned}$$

4.2.1 Exercícios Resolvidos 2

- 1) Reescreva usando produtos notáveis:

- a) $(a + 2)(a - 2)$
- b) $(xy + 3z)(xy - 3z)$
- c) $(x^2 - 4y)(x^2 + 4y)$
- e) $(x + 3)^2$
- f) $(2a - 5)^2$

- g) $(2xy + 4)^2$
- i) $(x + 4)^3$
- j) $(2a + b)^3$
- l) $(a - 1)^3$
- m) Calcule 41.39 usando um produto notável.
- n) Calcule 101.99 usando um produto notável.

4.3 Exercícios de Fixação

- 1) A soma de dois números é igual a 10 e a soma dos seus cubos é igual a 100. Qual o valor do produto desses números?
- 2) Calcule o valor de M na expressão abaixo, para: $a = -700, b = -33, x = 23,48$ e $y = 9,14345$.

$$M = \frac{(ax + by)^2 + (ay - bx)^2}{(ay + bx)^2 + (ax - by)^2}$$

- 3) Desenvolva:
 - a) $(3x + y)^2$
 - b) $(\frac{1}{2} + x^2)^2$
 - c) $((\frac{2x}{3}) + 4y^3)^2$
 - d) $(2x + 3y)^3$
 - e) $(x^4 + (\frac{1}{x^2}))^3$
- 4) Efetue as multiplicações:
 - a) $(x - 2)(x - 3)$
 - b) $(x + 5)(x - 4)$
- 5) Simplifique as expressões:
 - a) $(x + y)^2 - x^2 - y^2$
 - b) $(x + 2)(x - 7) + (x - 5)(x + 3)$
 - c) $(2x - y)^2 - 4x(x - y)$
- 6) Simplifique as frações algébricas
 - a) $\frac{x^2 - x}{x - 1}$
 - b) $\frac{x + 2}{x^2 + 4x + 4}$
 - c) $\frac{a^2 - 9}{a - 3}$
 - d) $\frac{x - y}{x^2 - y^2}$
 - e) $\frac{x^2 + 6x + 9}{3x + 9}$
 - f) $\frac{6xy - 3x^2}{4y^2 - 2xy}$
 - g) $\frac{ax + ay}{x^2 + 2xy + y^2}$
 - h) $\frac{x^2 - 4}{x + 2}$
 - i) $\frac{ax^2 - ay^2}{x^2 - 2xy + y^2}$
- 7) Simplifique a expressão

$$\frac{y + z}{(x - y)(x - z)} + \frac{x + z}{(y - x)((y - z)} + \frac{x + y}{(z - x)(z - y)}$$

8) Desenvolver as expressões e simplificar se possível

a) $(2a - 3b)^2 =$

b) $(a - b)^2 + (a + b)^2 =$

c) $(a - b)^2 - (a + b)^2 =$

d) $(3z - y)^2 - (z - 2y)^2 =$

e) $(a - b)(a + b)(a^2 + b^2) =$

9) Calcular $678959^2 - 678958^2$

10) Simplificar a expressão, considerando que $a \neq \pm b$

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 - b^2} \div \frac{a - b}{a + b}$$

11) Se $m + n + p = 6$, $mnp = 2$ e $mn + mp + np = 1$ então o valor de

$$\frac{m^2 + n^2 + p^2}{mnp}$$

é:

12) Calcule o valor da expressão

$$\frac{1}{1 + x + xy} + \frac{1}{1 + y + yz} + \frac{1}{1 + z + xz}$$

quando $xyz = 1$

13) Dados dois números a e b positivos, mostre que a média geométrica é sempre menor ou igual a média aritmética dos números a e b .

14) Mostre que $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} = (a - b)(b - c)(c - a)$

Capítulo 5

Funções

5.1 Introdução

Definição: Dados dois conjuntos A e B e uma relação f de A em B , dizemos que f é uma função ou aplicação se, e somente se, para todo elemento x de A existe, em correspondência, um único elemento y de B tal que o par (x,y) pertença a relação f . Uma função geralmente é dada por uma expressão que estabelece a correspondência entre os conjuntos A e B .

Qualquer função possui sempre os seguintes três elementos básicos:

- a) Um conjunto de "saída" chamado Domínio
- b) Um conjunto de "chegada" chamado Contradomínio
- c) Uma lei ou regra que permite associar os elementos do Domínio com os elementos do contradomínio

Notação: Se A é o domínio, B o contradomínio e f é uma função de A em B , denotamos

$$\begin{aligned} f &: A \rightarrow B \\ x &\rightarrow f(x) \end{aligned}$$

Domínio: O Domínio da função é o conjunto dos pontos para os quais faz sentido a aplicação da regra de correspondência entre os conjuntos A e B . Nesse estudo inicial de funções usaremos sempre como domínio um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ e o contradomínio será sempre $B = \mathbb{R}$. Notação: O domínio de uma função f será denotado por $Dom(f)$

Imagem: A imagem de uma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, é definida como sendo o conjunto dos pontos $y \in \mathbb{R}$ tais que existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Observe que a imagem de uma função f está contida no contradomínio da função f . Denotamos o conjunto imagem da função f por $Im(f)$.

Gráfico: O gráfico de uma função é um subconjunto do produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Definimos o gráfico de uma função, denotado por $\text{Graf}(f)$, o seguinte conjunto $\text{Graf}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = f(x)\}$. O gráfico de uma função f pode ser visualizado geometricamente usando-se o sistema cartesiano ortogonal onde podem ser vistos o conjunto de pontos da forma $(x, f(x))$

Função Crescente e Decrescente: Uma função é chamada de função crescente se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$. Uma função é chamada de função decrescente se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Exemplo: Considere a função f cuja regra é dada por $f(x) = \sqrt{x-1}$. Neste caso a expressão $\sqrt{x-1}$ só tem sentido para $x \geq 1$, portando o domínio da função, denotado por $D(f)$, é $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$. Logo podemos escrever

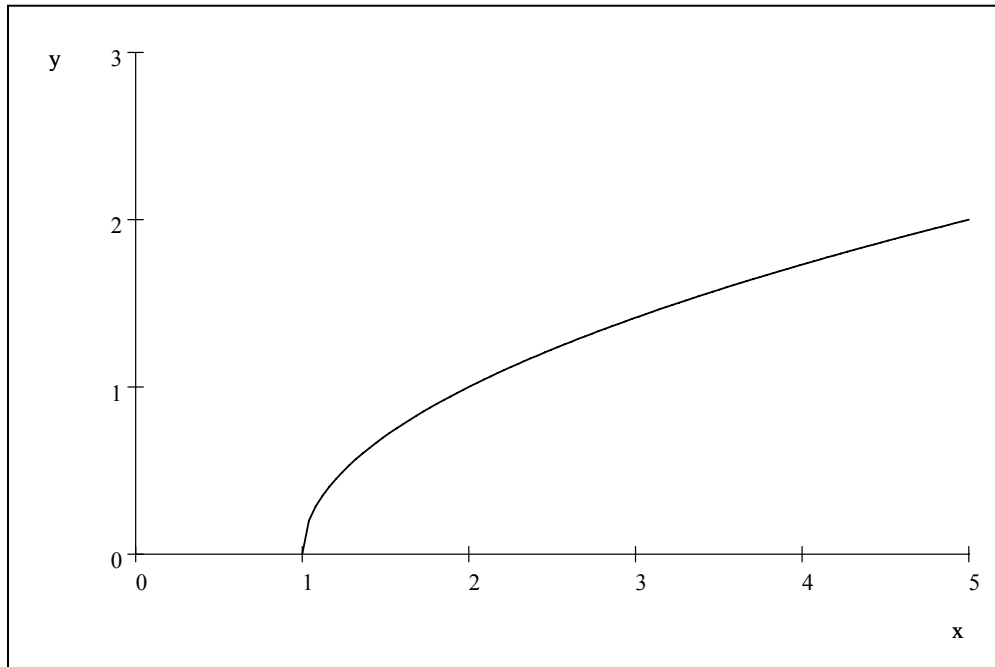
$$\begin{aligned} f &: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \sqrt{x-1} \end{aligned}$$

Como $x \geq 1 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x-1} \geq 0 \Rightarrow \text{Im}(f) = \mathbb{R}_+$.

Como $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \Rightarrow \sqrt{x_1 - 1} < \sqrt{x_2 - 1}$ (Note que isto vale porque $x_1 - 1 \geq 0$ e $x_2 - 1 \geq 0$) portanto $f(x_1) < f(x_2)$.

Logo f é uma função crescente.

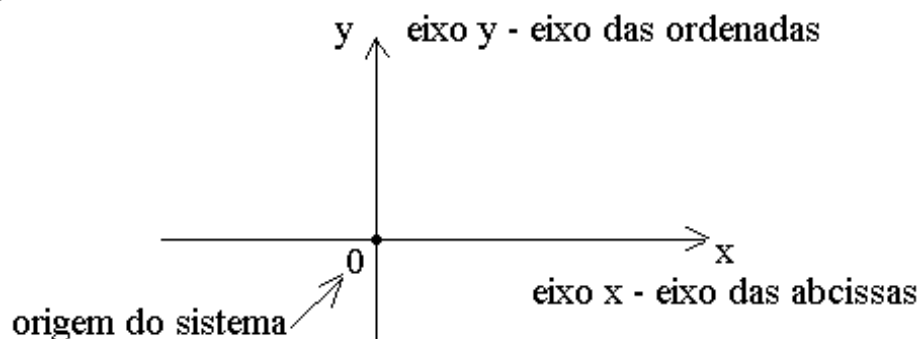
Gráfico de $f(x) = \sqrt{x-1}$



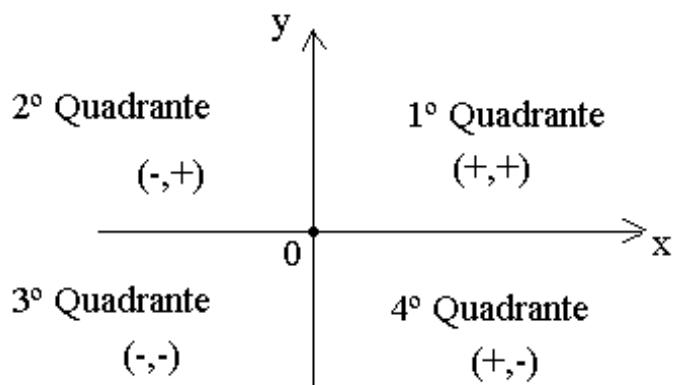
5.2 Sistema Cartesiano Ortogonal

Na conceituação de *abscissa* de um ponto, baseamo-nos na correspondência bi-unívoca entre os pontos de um eixo e os números reais. Analogamente, o conceito de *sistema cartesiano* surgiu para estabelecer-se uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano e o conjunto dos pares ordenados de números reais

Plano Cartesiano com identificação dos eixos



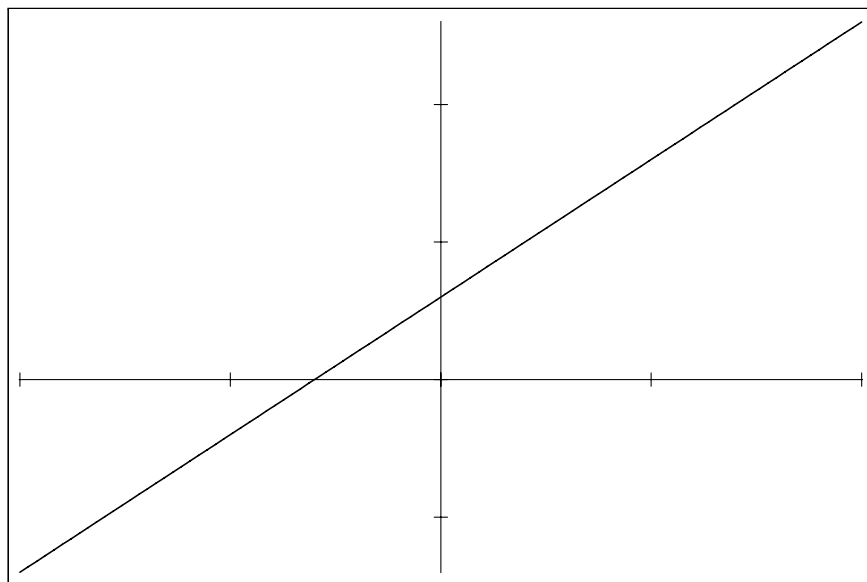
Plano Cartesiano com identificação dos quadrantes



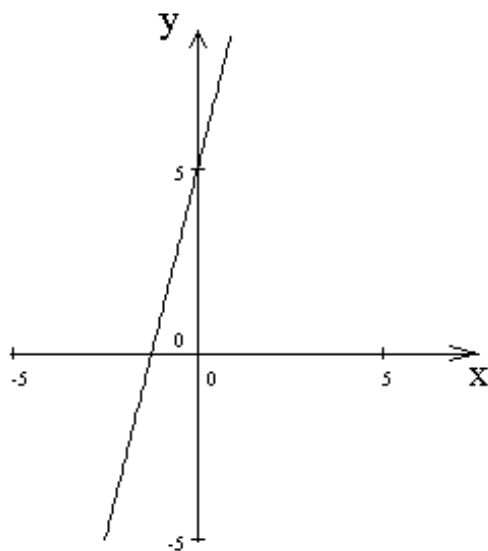
5.3 Função Afim

Função afim: Sejam a e b números reais, sendo a não nulo. Uma função afim é uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada $x \in \mathbb{R}$ associa $f(x) = ax + b$. O gráfico de uma função afim é uma reta. O número a representa o coeficiente angular da reta e o número b representa o coeficiente linear (b é a ordenada do ponto de interseção da reta com o eixo Oy). Se $a > 0$ a função afim é crescente e se $a < 0$ a função afim é decrescente.

$$f(x) = ax + b$$

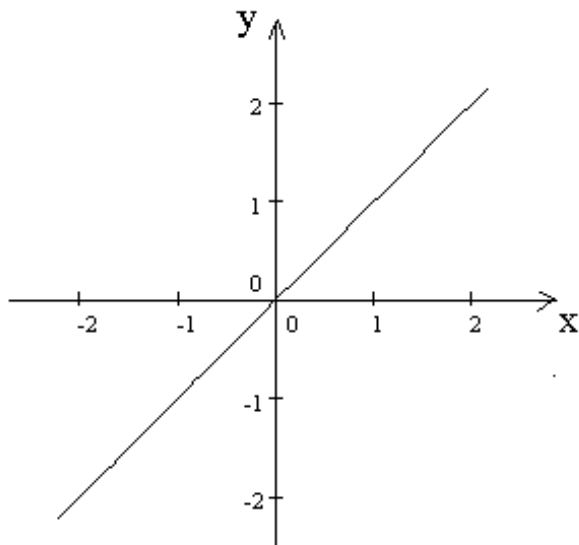


Exemplo : $f(x) = 4x + 5$



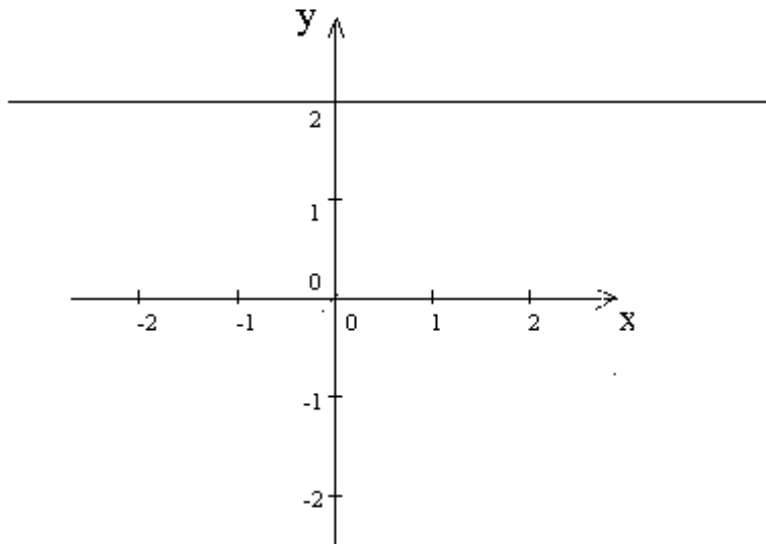
Função linear: Sejam a um número real, sendo a não nulo. Uma função linear é uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que para cada $x \in \mathbb{R}$ associa $f(x) = ax$. Este é um caso particular da função afim, neste caso o coeficiente linear é zero, ou seja, o gráfico da função linear sempre passa pela origem

Exemplo: $f(x) = x$

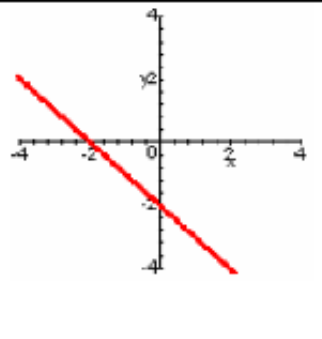
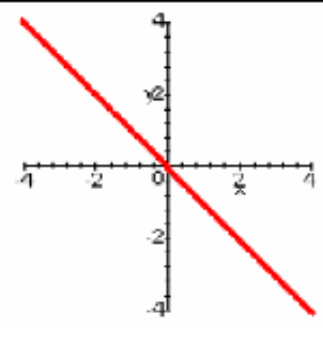
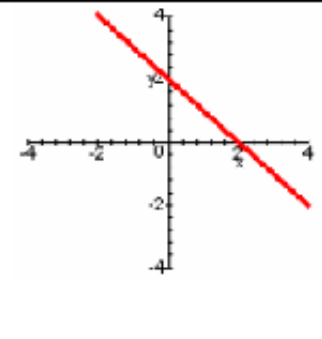
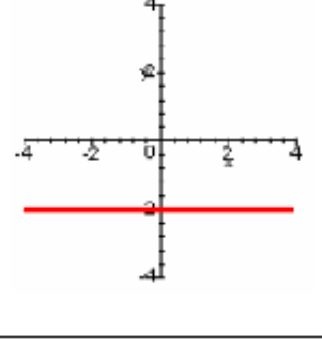
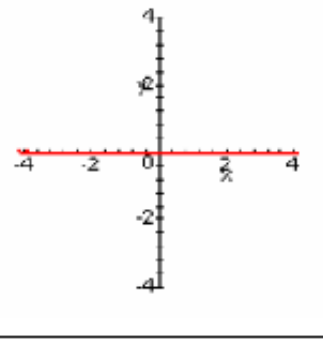
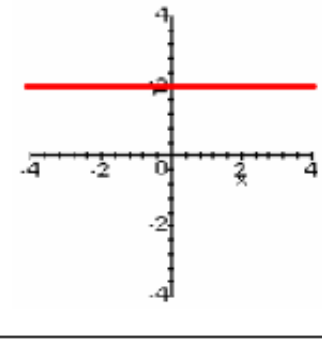
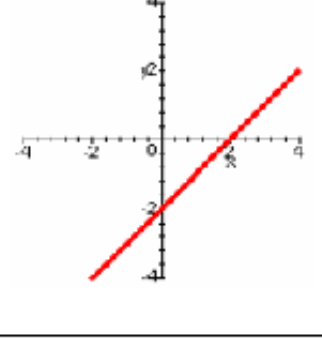
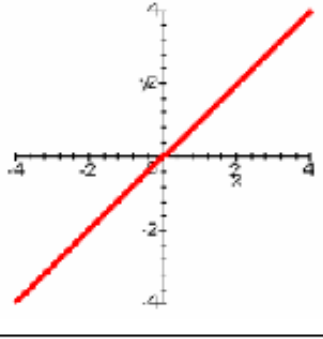
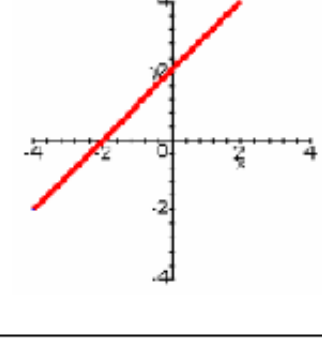


Função constante: Sejam a um número real, sendo a não nulo. Uma função linear é uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que para cada $x \in \mathbb{R}$ associa $f(x) = b$. Neste caso o coeficiente angular é zero, ou seja, o gráfico da função constante é sempre paralelo ao eixo x e cruza o eixo y no ponto $(0, b)$.

Exemplo: $f(x) = 2$



RESUMO: Função Afim $f(x) = ax + b$, a é o coeficiente angular e b é

$a < 0$			
$a = 0$			
$a > 0$			
	$b < 0$	$b = 0$	$b > 0$

5.3.1 Exercício Resolvido Função Afim

1) A figura abaixo mostra os gráficos das funções custo total $C(x)$ e receita total $R(x)$ de uma empresa produtora de CDs. Se, produzindo e comercializando 960 CDs, o custo e a receita são iguais, o lucro pela venda de 2000 CDs é

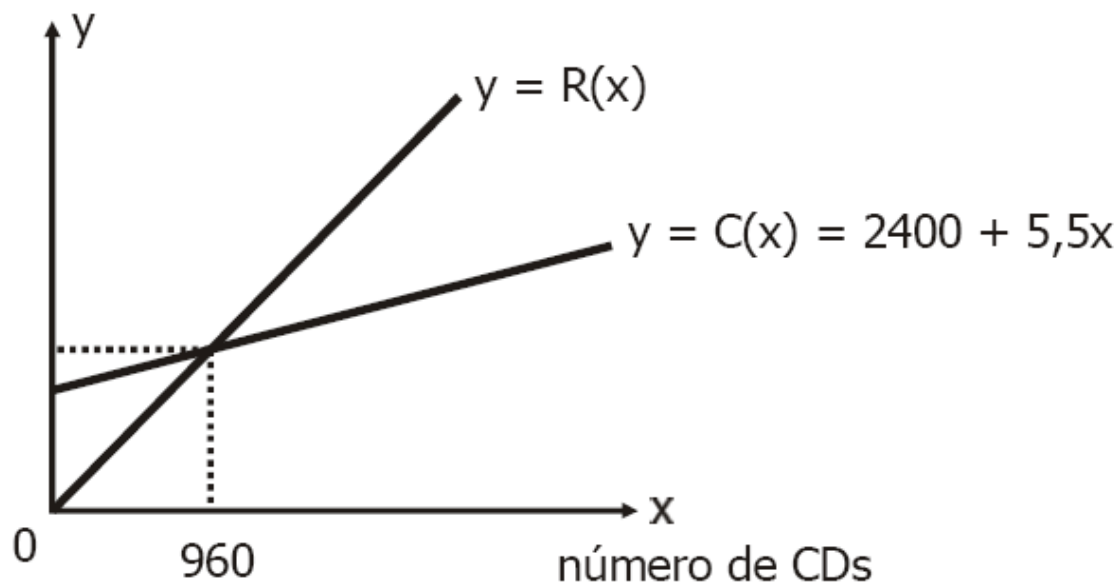


Figura 5.1:

5.4 Função Modular

Função Modular: Definimos função modular a $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$

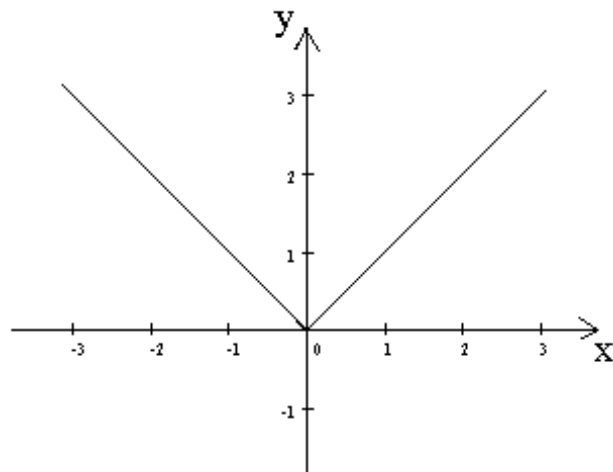
Da definição de módulo a função modular pode ser escrita como

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Observe que a função modular só assume valores positivos, ou seja, $f(x) = |x| \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Gráfico:

$$y = |x|$$



Exercício Resolvido Função Modular

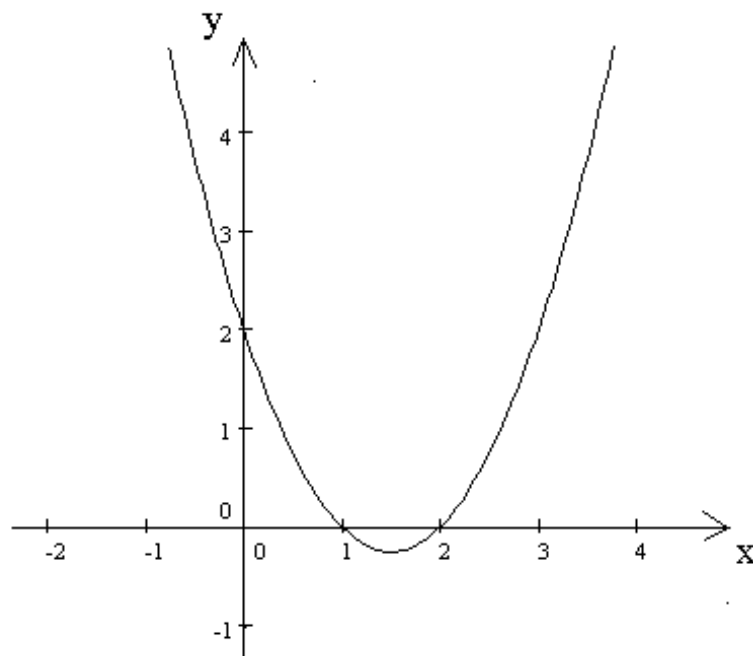
1) Dada a função definida por $f(x) = \frac{|x|}{x}$ se $x \neq 0$ e $f(x) = 0$ se $x = 0$, Determine|:

- a) A imagem de $f(x)$
- b) O Domínio de $f(x)$
- c) o gráfico de $f(x)$

5.5 Função quadrática

Função quadrática: Sejam a, b e c números reais, sendo a não nulo. Uma função quadrática é uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que para cada $x \in \mathbb{R}$ associa $f(x) = ax^2 + bx + c$. O gráfico de uma função quadrática é uma parábola.

Exemplo: $f(x) = x^2 - 3x + 2$



Concavidade: No gráfico da parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$:

- i) Se $a > 0$ a parábola tem concavidade voltada para cima e
- ii) Se $a < 0$ a concavidade é voltada para baixo.

Zeros: Os valores de x para os quais temos $f(x) = 0$ são chamados os zeros da função quadrática. Os zeros são as abscissas dos pontos onde o gráfico da parábola intercepta o eixo dos x . Para encontrarmos os zeros da função quadrática devemos resolver a equação $ax^2 + bx + c = 0$. Uma das formas mais comuns de resolver essa equação é usando a famosa fórmula de Baskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Fazendo $\Delta = b^2 - 4ac$, Δ é chamado de discriminante, podemos escrever a fórmula de Baskara da seguinte forma:

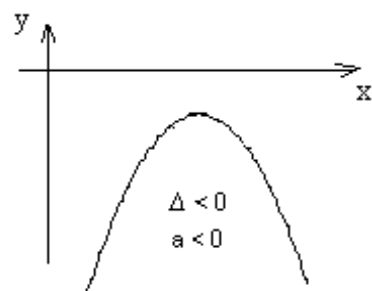
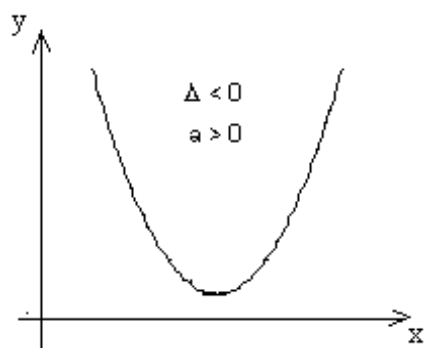
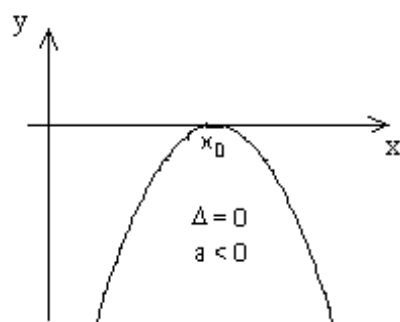
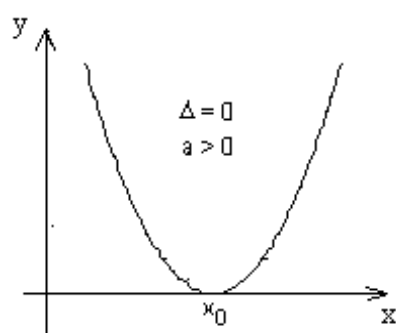
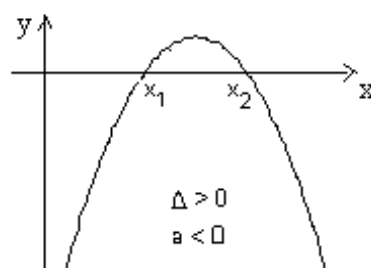
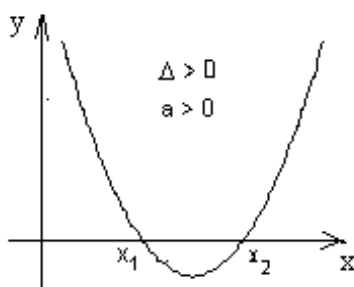
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Se $\Delta > 0$ os zeros são reais e distintos. Se $\Delta < 0$ a equação não possui zeros reais e se $\Delta = 0$ a equação possui zeros reais e iguais

Vértices da parábola: As coordenadas dos vértices da parábola são dados por

$$x_v = -\frac{b}{2a} \quad \text{e} \quad y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

Gráficos: Portanto Dependendo do valor de Δ e do sinal de a temos os seguintes casos:



5.5.1 Exercícios Resolvidos Função Quadrática

1) Encontre os zeros das seguintes funções:

a) $f(x) = 2x^2 - 3x - 5$

b) $f(x) = -3x^2 + 2x$

c) $f(x) = (7x - 1)(2x - 3)$

2) Resolver as inequações:

a) $x^2 - 4x + 3 > 0$

b) $3x^2 - 4x < 0$

c) $-2x^2 + 7x - 3 \leq 0$

d) $x^2 + x + 1 > 0$

e) $-2x^2 + 5x - 4 \geq 0$

5.6 Função Raiz n-ésima de x

Definimos função raiz n-ésima de x a função $f : \text{Dom}(f) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}.$$

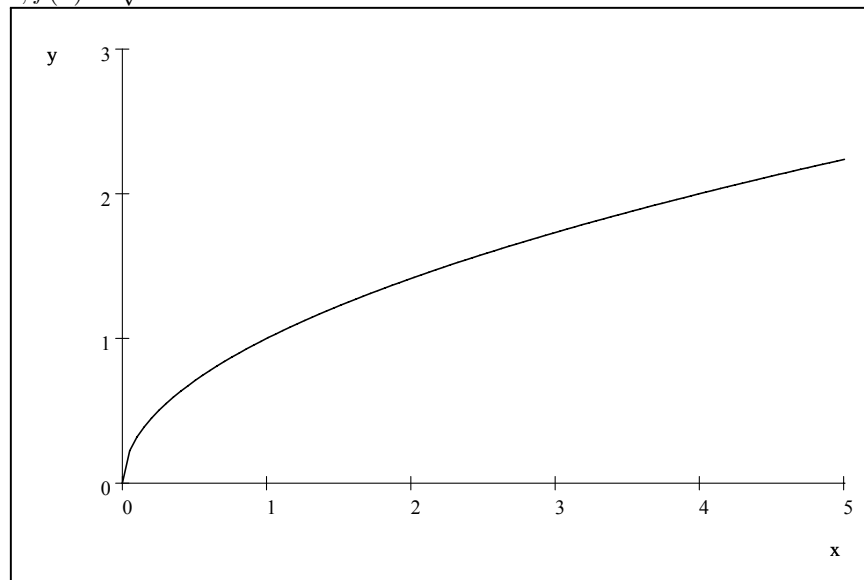
Se n é um número par então $\text{Dom}(f) = [0, +\infty)$ e $\text{Im}(f) = [0, +\infty)$

Se n é um número ímpar então $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$

Exemplos

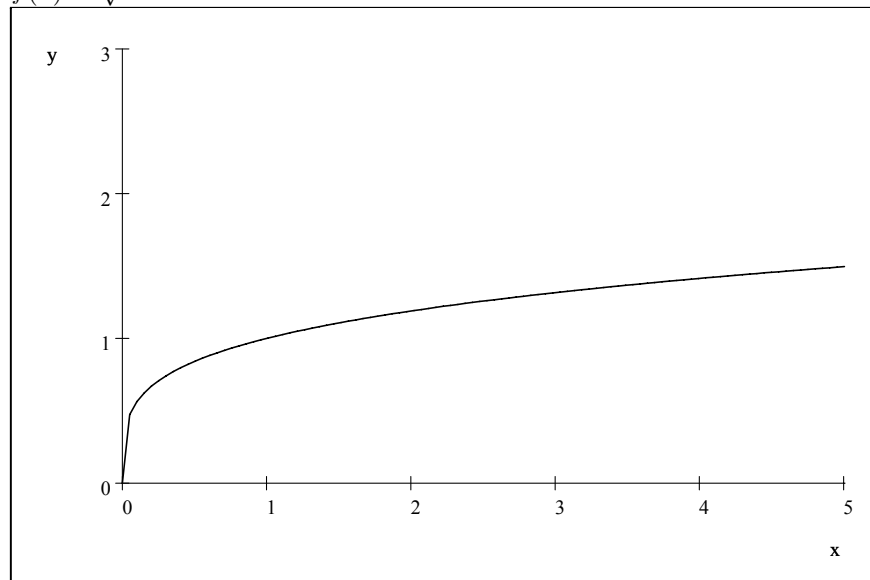
Função raiz quadrada de x

$$f(x) = \sqrt{x}$$



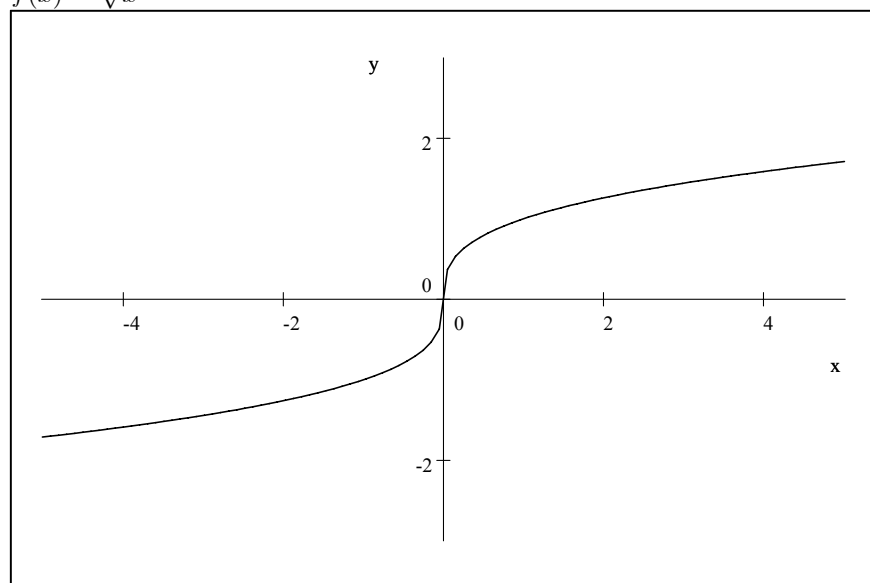
Função raiz quarta de x

$$f(x) = \sqrt[4]{x}$$



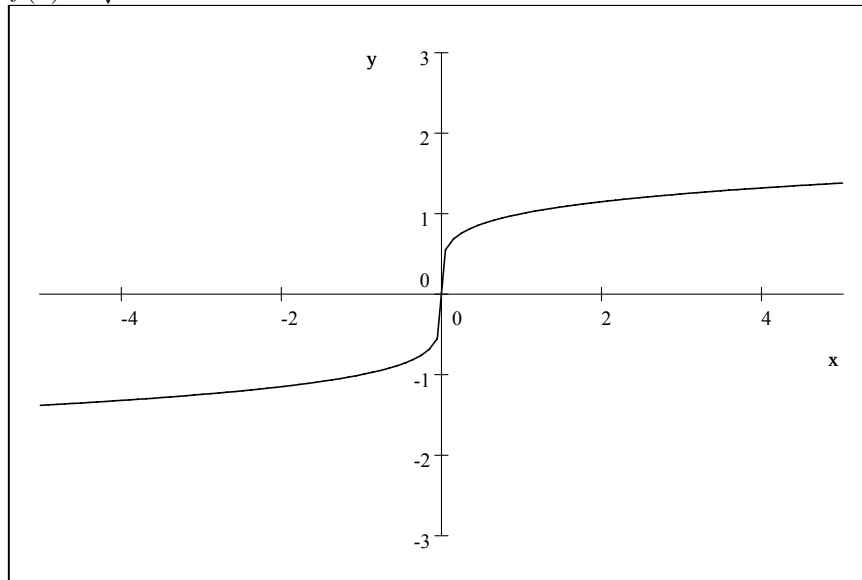
Função raiz cúbica de x

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$



Função raiz quinta de x

$$f(x) = \sqrt[5]{x}$$



5.6.1 Exercícios Resolvido Função Raiz n-ésima de x

1) Se $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 3$, calcule

a) $x + x^{-1}$

b) $x^2 + x^{-2}$

2) Resolva as seguintes equações:

a) $\sqrt[3]{x+4} = 2$

b) $\sqrt{x+2} = x$

c) $\sqrt[4]{x^2+4x+3} = \sqrt[4]{x+1}$

d) $\sqrt{x+1} = \sqrt{2x+1}$

3) Calcule

a)

$$\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{3}}} \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

b)

$$\sqrt[n]{\frac{20}{4^{n+2} + 2^{2n+2}}}$$

4) Determine o domínio da função $f(x) = \sqrt[5]{\ln(x+2)}$

5) Faça o gráfico das funções $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^{\frac{3}{2}}$

5.7 Função Exponencial

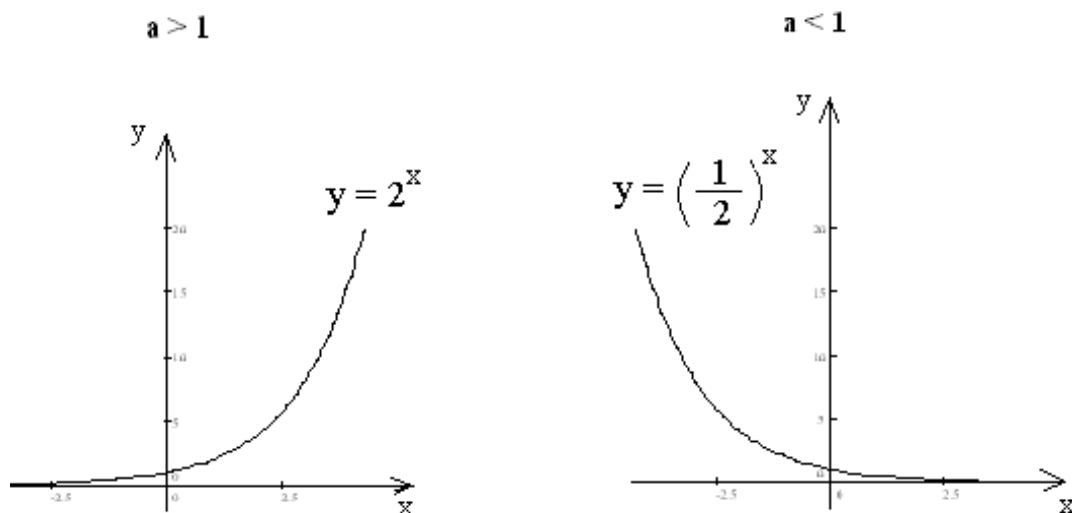
Função Exponencial: Dado um número real $a > 0, a \neq 1$, definimos função exponencial de base a a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a^x$.

Se $a > 1$ a função $f(x) = a^x$ é uma função crescente, ou seja, $x_1 < x_2$ se e somente se $f(x_1) < f(x_2)$. Isto quer dizer que se $x_1 < x_2$ então $a^{x_1} < a^{x_2}$. Se $a < 1$ a função $f(x) = a^x$ é uma função decrescente, ou seja, $x_1 < x_2$ se e somente se $f(x_1) > f(x_2)$. Isto quer dizer que se $x_1 < x_2$ então $a^{x_1} > a^{x_2}$.

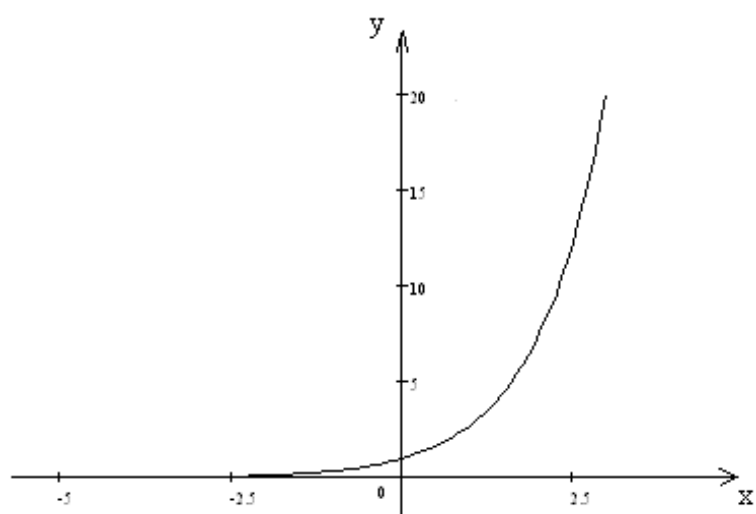
Observe que:

- a) O domínio da função exponencial é $\mathbb{R}$
- b) A função exponencial só assume valores positivos, isto é, $f(x) = a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$
- c) O gráfico da função exponencial sempre passa pelo ponto $(0, 1)$.

Gráficos: Dependendo do valor de a temos as seguintes situações



Um caso particular da função exponencial e que é muito usado em aplicações práticas é a função exponencial de base $e = 2.7183..$ definida por $f(x) = e^x$. O gráfico de $y = e^x$ tem a seguinte forma:



5.7.1 Exercícios Resolvidos Função Exponencial

1) Resolver as inequações exponenciais

a) $4^x > \frac{1}{4}$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1}$

c) $3^{x^2} > 3^x$

2) Determinar o domínio da função definida por $y = \sqrt{3^{x+2}} - 3^{-x}$

5.8 Função Logarítmica

Logarítmo: Dado $a > 0$, $a \neq 1$, e um número real positivo b denominamos de logarítmo de b na base a ao expoente que se deve elevar à base a de modo que o resultado obtido seja igual a b . Matematicamente escrevemos

$$\log_a b = x \iff a^x = b$$

Propriedades dos logarítmos:

a) $\log_a 1 = 0$

b) $\log_a a = 1$

c) $\log_a a^m = m$

d) $\log_a b = \log_a c \iff b = c$

e) $a^{\log_a b} = b$

f) $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

g) $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

h) $\log_a b^m = m \cdot \log_a b$

i) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

Função Logarítmica: Dado um número real a , $a > 0$ e $a \neq 1$, definimos função logarítmica à função $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_a x$.

Se $a > 1$ a função $f(x) = \log_a x$ é uma função crescente, ou seja, $x_1 < x_2$ se e somente se $f(x_1) < f(x_2)$. Isto quer dizer que se $x_1 < x_2$ então $\log_a x_1 < \log_a x_2$.

Se $0 < a < 1$ a função $f(x) = \log_a x$ é uma função decrescente, ou seja, $x_1 < x_2$ se e somente se $f(x_1) > f(x_2)$. Isto quer dizer que se $x_1 < x_2$ então $\log_a x_1 > \log_a x_2$.

Observe que:

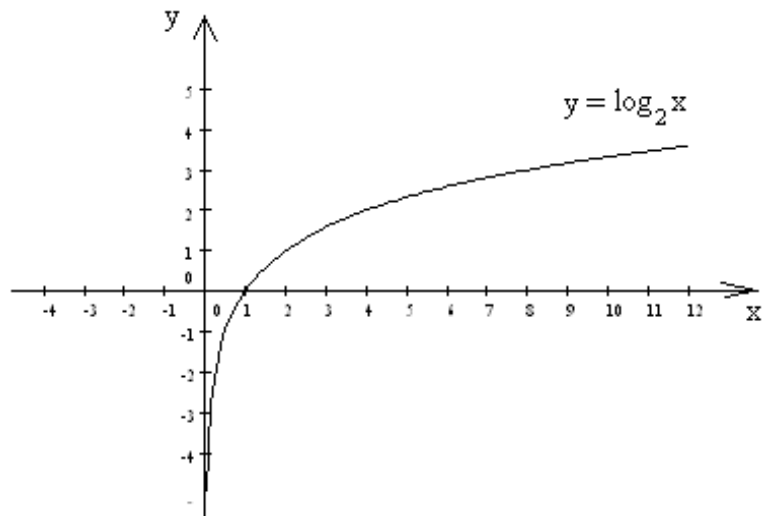
a) O domínio da função logarítmica é $\mathbb{R}_+^*$

b) A função logarítmica assume todos os valores reais

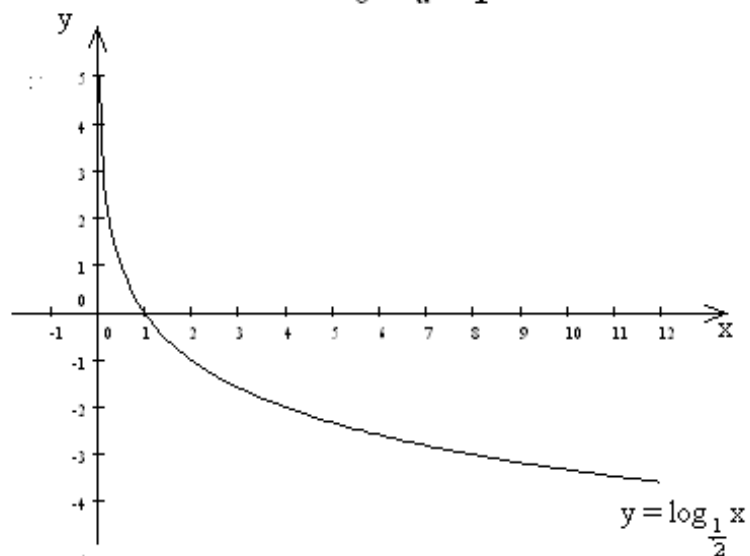
c) O gráfico da função logarítmica sempre passa pelo ponto $(1, 0)$.

Gráficos: Dependendo do valor de a temos as seguintes situações:

$$a > 1$$



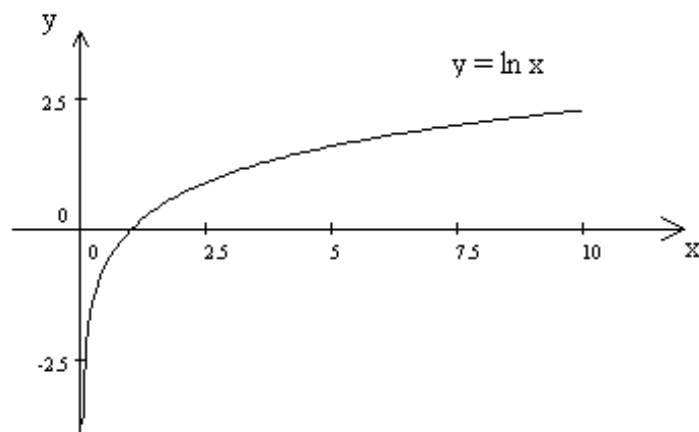
$$0 < a < 1$$



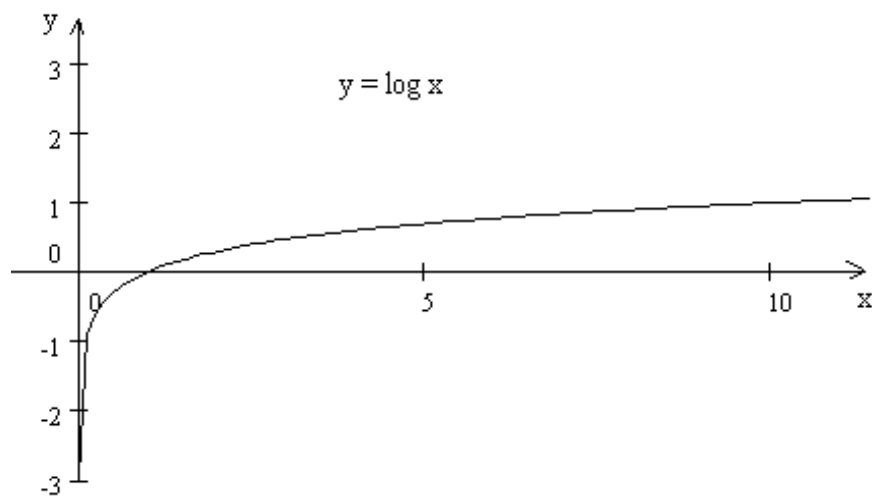
Um caso particular da função logarítmica e que é muito usado em aplicações práticas é a função logarítmica de base $e = 2.7183$ definida por $f(x) = \log_e x$. Para $\log_e x$ usamos a notação $\ln x$. Portanto $f(x) = \ln x = \log_e x$.

Quando a base do logaritmo é 10 não precisamos escrever a base, ou seja, para $\log_{10} x$ usamos a notação $\log x$. Portanto $f(x) = \log x = \log_{10} x$.

O gráfico de $y = \ln x$ tem a seguinte forma:



O gráfico de $y = \log x$ tem a seguinte forma:



5.8.1 Exercício Resolvido Função Logarítmica

1) Resolver as inequações logarítmicas

a) $\log_3(x^2 - x + 3) > 2$

b) $0 < \log_2(2x - 1) \leq 1$

c) $\log_{\frac{1}{2}}(x + 2) + \log_{\frac{1}{2}}(x - 3) > 2$

5.9 Função Hiperbólica

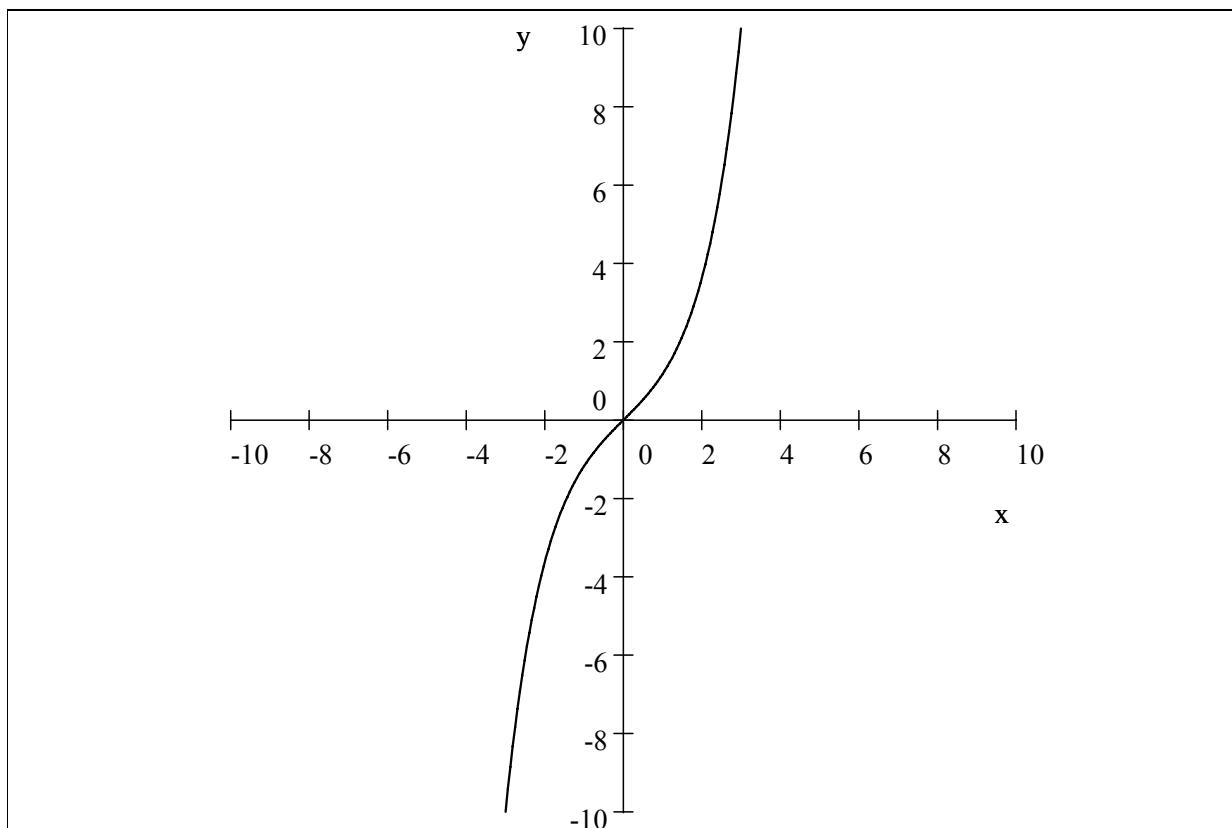
Seno Hiperbólico: Definimos a função seno hiperbólico, denotada por $\sinh$, à função $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Observe que:

- a) O domínio da função seno hiperbólico é $\mathbb{R}$
- b) A função seno hiperbólico assume todos os valores reais
- c) A função seno hiperbólico passa na origem do sistema cartesiano

Gráficos: O gráfico da função seno hiperbólico tem a seguinte forma



Cosseno Hiperbólico: Definimos a função cosseno hiperbólico, denotada por $\cosh$, à função $\cosh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

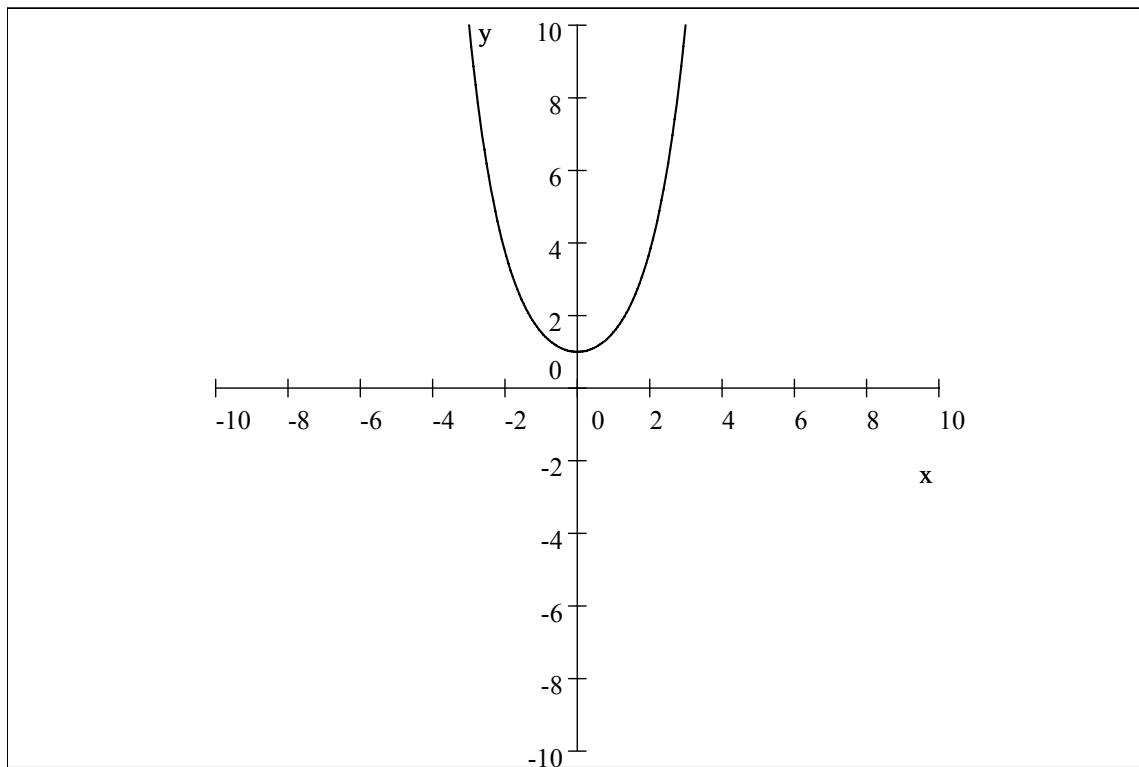
$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Observe que:

- a) O domínio da função cosseno hiperbólico é $\mathbb{R}$
- b) A função função cosseno hiperbólico assume somente valores positivos
- c) .A função função cosseno hiperbólico passa no ponto $P(0, 1)$ do sistema cartesiano

Gráficos: O gráfico da função cosseno hiperbólico tem a seguinte forma

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



Aplicação: Ao observar um fio usado para transporte de energia elétrica, preso em dois postes, notamos que o peso do mesmo faz com que ele fique meio arredondado, dando a impressão que o gráfico formado pela curva representa uma parábola, mas na verdade, tal curva é o gráfico da função cosseno hiperbólico, conhecida como a catenária (do Latim catena=cadeia) pois foi através de uma corrente metálica formada por elos (cadeias) que se observou primeiramente tal curva.

Outras funções Hiperbólicas

Tangente Hiperbólica:

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

Contangente Hiperbólica:

$$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$$

Secante Hiperbólica:

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}$$

Cossecante Hiperbólica:

$$\operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\sinh(x)}$$

As funções acima estarão definidas onde os respectivos denominadores não se anularem.

5.9.1 Exercícios Resolvidos Funções Hiperbólicas

1) Mostre que

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

2) Determine os domínios das seguintes funções: $\tanh(x)$, $\coth(x)$, $\operatorname{sech}(x)$, $\operatorname{csch}(x)$.

5.10 Tipos importantes de funções

Função par: Se $f(x) = f(-x)$, para todo $x \in \operatorname{Dom}(f)$ então dizemos que a função f é uma função par. (note que o gráfico é uma curva simétrica pelo eixo y).

Exemplos: $f(x) = x^2$ é uma função par pois $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$
 $g(x) = \cos(x)$ é uma função par, já que $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$

Função ímpar: Se $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in \operatorname{Dom}(f)$ então dizemos que a função f é uma função ímpar. (note que o gráfico é uma curva simétrica pela origem).

Exemplos: $f(x) = x^3$ é uma função ímpar pois $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.

Função injetora: Se para quaisquer x_1 e x_2 no domínio de f , $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, então dizemos que f é uma função injetora.

Exemplos: $f(x) = x^3$ é uma função injetora já que $x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1^3 \neq x_2^3 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

$f(x) = x^2$ não é injetora pois tomando $x_1 = 3$ e $x_2 = -3$ temos $x_1 \neq x_2$ mas $f(x_1) = 9$ e $f(x_2) = 9 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

Geometricamente, para uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se qualquer reta paralela ao eixo dos x cortar o gráfico de f em apenas um ponto a função f é uma função injetora.

Função sobrejetora: é aquela em que sua imagem coincide com seu contra-domínio.

Função bijetora: é aquela que é ao mesmo tempo bijetora e sobrejetora.

Função composta: Sejam $g : A \rightarrow B$ e $f : \text{Im}(g) \rightarrow C$. A função $f \circ g : A \rightarrow C$ dada por

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ é a função composta da função f com a função g .

Exemplos: $g(x) = x-3$ e $f(x) = |x|$ então $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-3) = |x-3|$

$h(x) = e^x$ e $v(x) = \sin x$ então $(v \circ h)(x) = v(h(x)) = v(e^x) = \sin(e^x)$

Observação: Note que em geral $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$. No exemplo acima $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(|x|) = |x| - 3$

$\Rightarrow (g \circ f)(x) = |x| - 3 \neq |x-3| = (f \circ g)(x)$

Função inversa: Seja $y = f(x)$ uma função onde $f : A \rightarrow B$. Se, para cada $y \in B$, existir exatamente um valor de $x \in A$ tal que $y = f(x)$, então podemos definir uma função $g : B \rightarrow A$ tal que $x = g(y)$. A função g definida desta maneira é chamada função inversa de f e denotada por f^{-1} .

Observação :a) Pela definição podemos concluir que para existir a função inversa a função f deve ser bijetora.

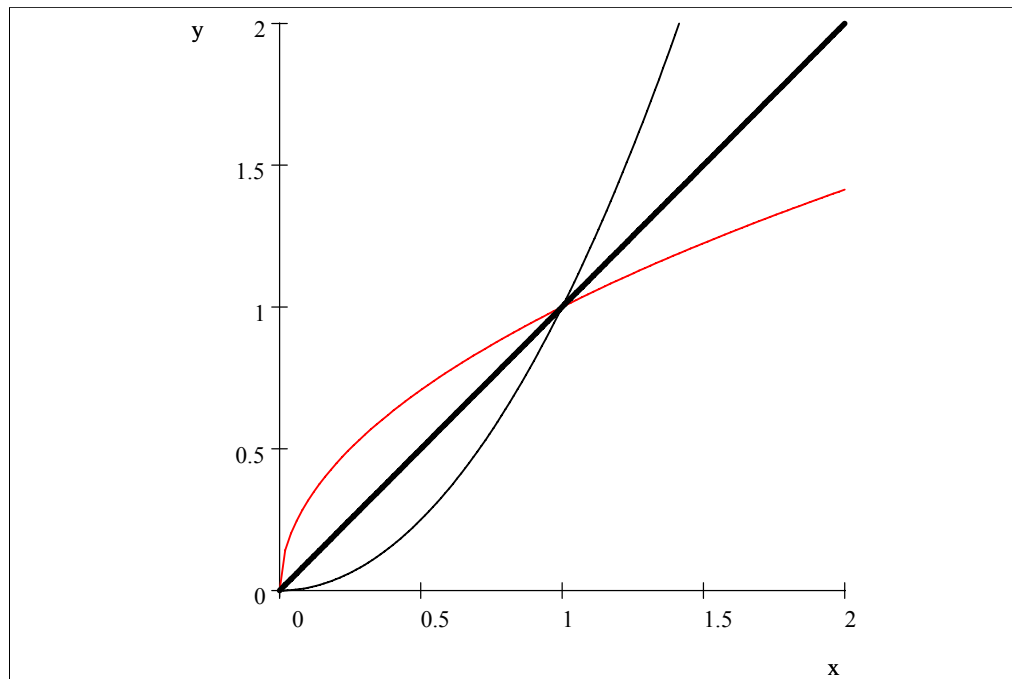
b) Se a função f possui uma inversa f^{-1} então $(f \circ f^{-1})(y) = y$ e $(f^{-1} \circ f)(x) = x$

Exemplos: A função $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, definida por $f(x) = x^2$ tem como inversa a função $f^{-1} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ dada por $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3$ tem como inversa a função $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

Geometricamente o gráfico da função inversa f^{-1} e o gráfico da função f são simétricos em relação ao eixo Ox :

$$f(x) = x^2$$

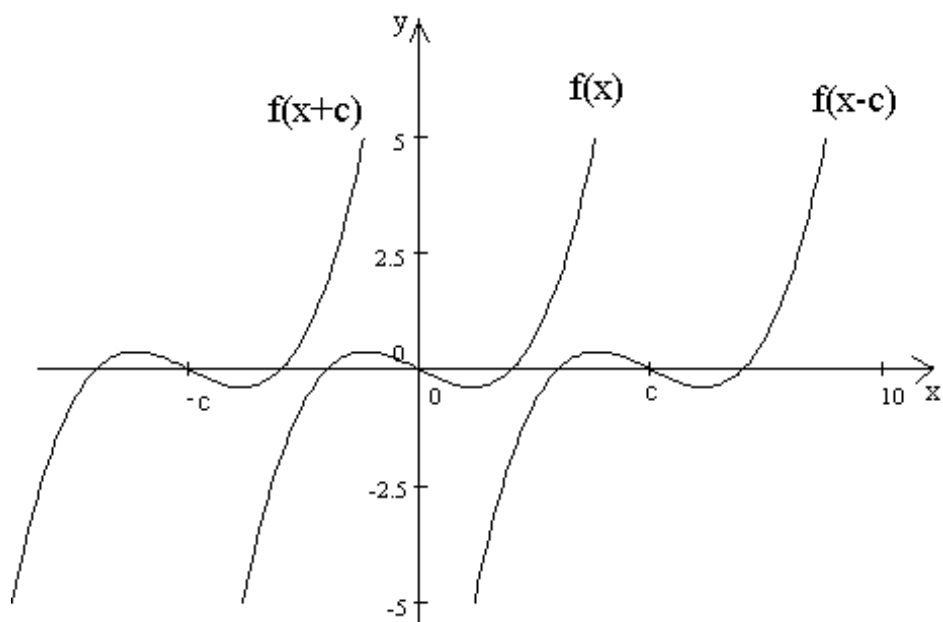


5.11 Construção de Gráficos

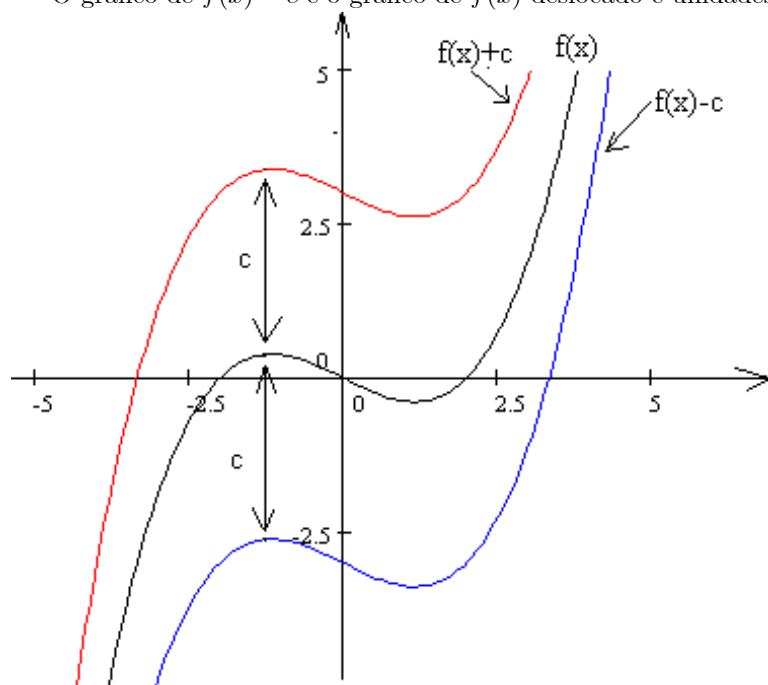
Se c é um número real positivo então:

O gráfico de $f(x+c)$ é o gráfico de $f(x)$ deslocado c unidades para a esquerda.

O gráfico de $f(x-c)$ é o gráfico de $f(x)$ deslocado c unidades para a direita.



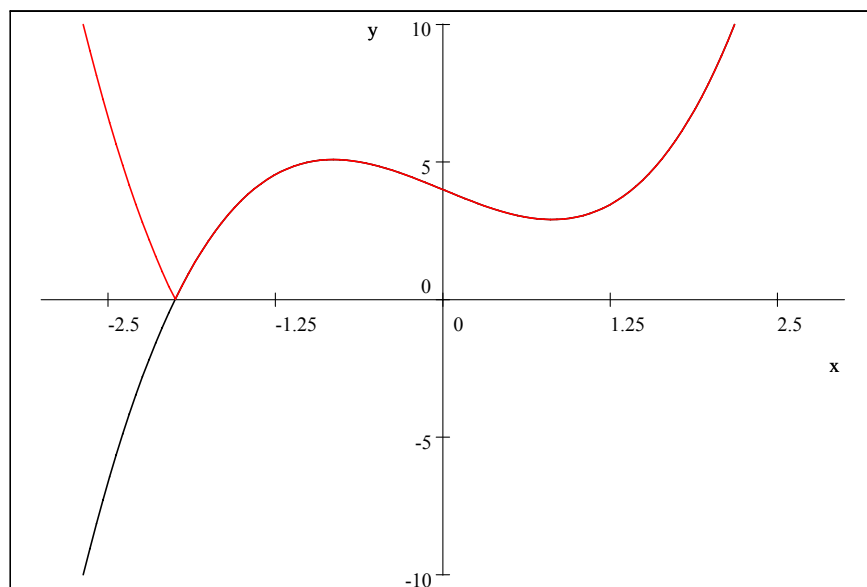
O gráfico de $f(x) + c$ é o gráfico de $f(x)$ deslocado c unidades para cima.
 O gráfico de $f(x) - c$ é o gráfico de $f(x)$ deslocado c unidades para baixo.



O gráfico de $|f(x)|$ é igual ao gráfico de $f(x)$ se x é positivo e é o gráfico de $f(x)$ refletido através do eixo Ox se x é negativo

Exemplo: Gráfico de $f(x) = x^3 - 2x + 4$ (linha contínua)

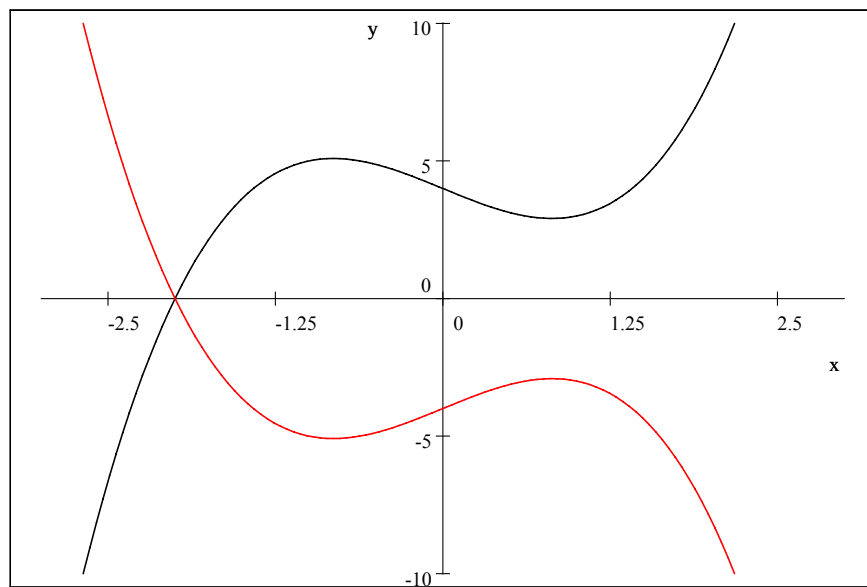
Gráfico de $h(x) = |f(x)| = |x^3 - 2x + 4|$ (linha tracejada)



O gráfico de $-f(x)$ é o gráfico de $f(x)$ refletido através do eixo Ox

Exemplo: Gráfico de $f(x) = x^3 - 2x + 4$ (linha contínua)

Gráfico de $g(x) = -f(x) = -x^3 + 2x - 4$ (Linha Tracejada)



4) Resolver as inequações logarítmicas

a) $\log_3(x^2 - x + 3) > 2$

b) $0 < \log_2(2x - 1) \leq 1$

c) $\log_{\frac{1}{2}}(x + 2) + \log_{\frac{1}{2}}(x - 3) > 2$

5) Determinar o domínio da função definida por $y = \sqrt{3^{x+2} - 3^{-x}}$

5.12 Exercícios de Fixação

1) Sendo $f(x) = 3x - 1$

a) Calcular $f(0)$

b) Calcular $f(-\frac{1}{3})$

c) Para que valor de x , temos $f(x) = 0$.

d) Sendo $f(x) = ax + b$ uma função afim e sendo p e q números reais e distintos, calcular $f(p), f(q)$ e mostrar que $\frac{f(p) - f(q)}{p - q} = a$

2) Resolver as inequações

a) $(2x - 3)(x - 1) > 0$

b) $(x - 2)(3x + 1) < 0$

c) $x^2 \geq 5$

d) $x^2 + 1 < 2x^2 - 3 \leq -5x$

e) $0 < x^2 + x + 1 < 1$

f) $4 < x^2 - 12 \leq 4x$

g) $2x + 1 \leq x^2 < 2x + 3$

h) $-1 \leq x^2 - 3 \leq 1$

i) $(x^2 + 4x + 3)(2x + 5) < 0$

j) $|2x^2 + 3x + 3| \leq 3$

k) $x^3 - x^2 - x - 2 > 0$

3) Resolver as inequações quocientes

a) $\frac{x^2+x-6}{2x^2+3x-2} \geq 0$

b) $\frac{(x-2)^4}{x^2-2x-15} \leq 0$

c) $\frac{-6x^2-x+2}{6x^2-5x+1} > 0$

d) $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} \leq 0$

e) $\frac{x-1}{x-2} < \frac{x-3}{x-4}$

f) $\frac{2}{2x+3} \geq \frac{2}{x-5}$

g) $\frac{x-2}{3x+5} \leq 4$

h) $\frac{x+1}{2x-3} > 2$

i) $\frac{x+1}{2-x} < \frac{x}{3+x}$

4) Resolver as equações exponenciais

a) $2^{x-3} + 2^{x-1} + 2^x = 52$

b) $\left(\sqrt[3]{2^{x+4}}\right)^{x-2} = 1$

5) Resolver as inequações exponenciais

a) $(\sqrt{3})^{2x+4} > (\sqrt{3})^{3x}$

b) $5^{x^2-8x-20} < 1$

c) $(0,3)^{4x^2-2x-2} \geq (0,3)^{2x-3}$

6) Resolver as inequações logarítmicas

a) $\log_2(x-2) - \log_{\frac{1}{2}}(x-3) < 1 \implies S = \{x \in \mathbb{R} / 3 < x < 4\}$

b) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - \frac{3}{2}) \geq 1 \implies S = \left\{x \in \mathbb{R} / -\sqrt{2} \leq x < -\sqrt{\frac{3}{2}} \text{ ou } \sqrt{\frac{3}{2}} < x < \sqrt{2}\right\}$

c) $x^{(\log_a x)+1} > a^2 x$ para $0 < a < 1$.

d) Dar o domínio da função $f(x) = \sqrt{\log(x^2 - 2x)}$

7) Se uma bola é atirada para cima com uma velocidade inicial de 32 m/s , então, após t segundos, a distância s acima do ponto de partida, em metros, é dada por $s = 32t - 16t^2$. Em que instante a bola estará no ponto mais alto e qual será esta altura? (Faça um esboço do gráfico da equação).

8) A energia potencial elástica W armazenada numa mola esticada é dada pela expressão $W = \frac{1}{2}kx^2$ onde k é a constante elástica da mola e x é o quanto a mola está alongada

Para uma constante elástica igual a 10 unidades

i) Qual o número que exprime o valor de sua energia potencial W , para um alongamento de 2 unidades

ii) De quanto está esticada a mola quando sua energia potencial é de 80 unidades.

9) Desenhar o gráfico das seguintes funções

i) $f(x) = |x+1|$

ii) $f(x) = \sqrt{x-1}$

iii) $f(x) = \left|\sqrt[3]{x}\right|$

iv) $f(x) = |x^2 + x - 6|$

10) Especifique o domínio e faça um esboço do gráfico de cada uma das

funções:

- a) $y = \log_{10}(x + 5)$
 b) $y = -\ln x$
 c) $y = \ln(-x)$
 d) $y = \ln|x|$
- 11) Resolva cada equação em x
 a) $\ln x = -1$
 b) $\ln(2x - 1) = 3$
 c) $e^{3x-4} = 2$
 d) $e^{ax} = Ce^{bx}$, onde C é uma constante e $a \neq b$
 $\ln(\ln x) = 1$
- 12) Se a população de bactérias começa com 100 e dobra a cada três horas, então o número de bactérias após t horas é $n = f(t) = 100 \cdot 2^{\frac{t}{3}}$:
 a) Encontre a função inversa de f e explique seu significado.
 b) Quando a população atingirá 50.000 bactérias?
- 13) Após acionado o Flash de uma câmera, a bateria imediatamente começa a recarregar o capacitor do flash, o qual armazena uma carga elétrica dada por $Q(t) = Q_0(1 - e^{-\frac{t}{a}})$ (A capacidade máxima de carga é Q_0 , e t é medido em segundos.)
 a) Encontre a função inversa de Q e explique seu significado.
 b) Quanto tempo levará para o capacitor recarregar 90% da capacidade se $a = 2$?
- 14) Se $f(x) = \ln x$ e $g(x) = x^2 - 9$, encontre as funções $f \circ g, g \circ f, f \circ f, g \circ g$
 15) Expresse a função $F(x) = \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ como uma composta de três funções.
 16) Faça o gráfico da função $y = \frac{1}{x}$
- 17) A função de Heaviside H é definida por $H(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 0 \\ 1, & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$. Essa função é usada no estudo de circuitos elétricos para representar o surgimento repentino de corrente elétrica, ou voltagem, quando uma chave é instantaneamente ligada:
 a) Faça o gráfico da função de heaviside
 b) Faça um esboço da função rampa $y = tH(t)$
- 18) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função qualquer, encontre duas funções $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x)$ é uma função par e $h(x)$ é uma função ímpar, tal que
- $$f(x) = g(x) + h(x)$$
- 19) Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de função convexa se $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$, $\forall t \in [0, 1]$.
 a) Mostre que a função $f(x) = x^2$ é uma função convexa
 b) Mostre que a função $f(x) = e^x$ é uma função convexa
 c) Mostre que a função $f(x) = |x|$ é uma função convexa
 d) O que significa geometricamente a desigualdade $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$, $\forall t \in [0, 1]$?

Capítulo 6

Geometria Plana

6.1 Reta

A toda reta r do plano cartesiano está associada uma equação da forma $ax + by + c = 0$, onde a, b, c são números reais, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ e o ponto (x, y) representa um ponto genérico de r

A equação da reta pode se apresentar de várias outras formas

1) Sejam $Q(x_1, y_1), R(x_2, y_2), Q \neq R$ e r a reta definida por Q e R (graficamente isto quer dizer que a reta passa pelos pontos Q e R). Se $P(x, y)$ é um ponto pertencente a reta r , então os pontos P, Q e R são colineares. A condição de colinearidade dos tres pontos no plano é dada por:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Calculando o determinante obtemos

$$x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0$$

$$y(x_2 - x_1) = -x(y_1 - y_2) - (x_1y_2 - x_2y_1)$$

$$y = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}x + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{(x_2 - x_1)}$$

2) Fazendo $m = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$ (m é o coeficiente angular da reta) e $q = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{(x_2 - x_1)}$ (q é o coeficiente linear da reta) podemos escrever a equação da reta na forma

$$y = mx + q$$

3) Se m é o coeficiente angular da reta e a reta passa pelo ponto $R(x_2, y_2)$ temos

$$\begin{aligned}
y &= mx + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{(x_2 - x_1)} \\
y &= mx + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2 - y_2 x_2 + y_2 x_2}{(x_2 - x_1)} \\
y &= mx + \frac{-(y_2 - y_1)x_2 + (x_2 - x_1)y_2}{(x_2 - x_1)}
\end{aligned}$$

$$y - y_2 = m(x - x_2)$$

4) Considere uma reta r que intercepta os eixos nos pontos $Q(0, q)$ e $P(p, 0)$ distintos. A equação dessa reta é

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & q & 1 \\ p & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies qx + py - pq = 0$$

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

5) Se na equação $y = mx + q$ fazemos $x = f(t)$, onde f é uma função afim, então $y = mf(t) + q$, onde $t \in \mathbb{R}$ é um parâmetro. Chamando $g(t) = mf(t) + q$ temos que $y = g(t)$. Portanto as coordenadas x e y de um ponto da reta podem ser dadas em função de parâmetro real t :

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}, f(t) \text{ e } g(t) \text{ são funções afins}$$

Resumo:

Forma Geral:	$ax + by + c = 0$
Se a reta passa por $Q(x_1, y_1), R(x_2, y_2), Q \neq R$:	$R: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$
Forma reduzida :	$y = mx + q$
Equação da reta dados um ponto e uma direção:	$y - y_0 = m(x - x_0)$
Forma Segmentária :	$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$

$$\text{Forma Paramétrica : } \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}, f(t) \text{ e } g(t) \text{ são funções afins}$$

Condição de Paralelismo: Duas retas são paralelas quando $m_1 = m_2$

Condição de perpendicularismo: Duas retas são perpendiculares quando:
 $m_1 = -\frac{1}{m_2}$

6.1.1 Exercícios Resolvidos 1

- 1) Encontre a equação reduzida da reta que passa pelos pontos $A(1, -1)$ e $B(-1, 5)$.
- 2) Trace a reta que passa pelos pontos $A(1, 1)$ e $B(-2, 2)$.
- 3) Obter a reta que s passa por $P(3, -2)$ e é perpendicular a reta r: $3x + 14y - 17 = 0$.

6.2 Distância

Distância entre dois pontos no plano: A distância entre os pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ em um plano cartesiano é dada por:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Fórmula do ponto médio: Dados os pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ no plano seja $M(x, y)$ o ponto médio do segmento que une os pontos P_1 e P_2 então $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ e $y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$, ou seja, o ponto médio é $M\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2), \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\right)$.

A distância d do ponto $P(x_0, y_0)$ à reta $Ax + By + c = 0$ é dada por:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

6.2.1 Exercícios Resolvidos 2

- 1) Calcular a distância entre os pontos $A(-3, 7)$ e $B(5, 1)$.
- 2) Determinar as coordenadas do ponto médio do segmento que une os pontos $A(1, 2)$ e $B(9, 14)$.

6.3 Circunferência

Forma Padrão

Se $C(x_0, y_0)$ é um ponto fixo do plano, então a circunferência de raio r e centro em C é o conjunto dos pontos $P(x, y)$ do plano cuja distância de $C(x_0, y_0)$ é r . Assim um ponto $P(x, y)$ estará situado nesta circunferência se $d(P, C) = r$, ou seja

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r$$

ou

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

que é a forma padrão da equação da circunferência de raio r e centro $C(x_0, y_0)$. Se o centro da circunferência for a origem do sistema cartesiano temos:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Forma geral

Uma equação completa do segundo grau é do tipo $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$. Ela representa uma circunferência se tivermos:

1º) $A = B \neq 0$ 2º) $C = 0$ 3º) $D^2 + E^2 - 4AF > 0$. Neste caso

$$\text{O centro é } C = \left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2A}\right) \text{ e o raio é } r = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}}$$

Se $D^2 + E^2 - 4AF = 0$ temos um ponto

Se $D^2 + E^2 - 4AF < 0$ temos uma circunferência imaginária

Conclusão: A forma geral da circunferência é $Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$ com $D^2 + E^2 - 4AF > 0$.

6.3.1 Exercícios Resolvidos 3

1) Obter a equação da circunferência de centro $C(1, -2)$ que passa pelo ponto $P(4, 2)$.

2) Quais das equações abaixo representam uma circunferência:

a) $2x^2 + 2y^2 + xy - 1$.

b) $x^2 + y^2 + 2x + 3y + 4 = 0$.

c) $2x^2 + 2y^2 - 3x - 3y + 2 = 0$.

d) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = 0$.

3) Representar graficamente os conjuntos:

a) $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 \leq 0\}$.

b) $B = \{(x, y) \mid x = 2 - \sqrt{9 - y^2}\}$.

6.4 Exercícios de Fixação

1) Encontre a distância entre A e B e determine o ponto médio deste segmento de reta

a) $A(2, 5)$ e $B(-1, 1)$.

b) $A(7, 1)$ e $B(1, 9)$.

2) Prove que é isósceles o triângulo de vértices $V_1(5, -2)$, $V_2(6, 5)$ e $V_3(2, 2)$.

3) Prove que os pontos $P(0, -2)$, $Q(-4, 8)$ e $R(3, 1)$ estão sobre um círculo de centro $C(-2, 3)$.

4) Obter o ponto de interseção das retas $3x + 4y - 12 = 0$ e $2x - 4y + 7 = 0$.

5) Mostrar que as retas $r: 2x + 3 = 0$ e $s: y - 11 = 0$ são perpendiculares.

5) Calcular a distância entre as retas $r: 7x + 24y - 1 = 0$ e $s: 7x + 24y + 49 = 0$.

7) Encontre o centro e o raio de cada circunferência

a) $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 20 = 0$.

b) $4x^2 + 4y^2 - 8x + 12y + 1 = 0$.

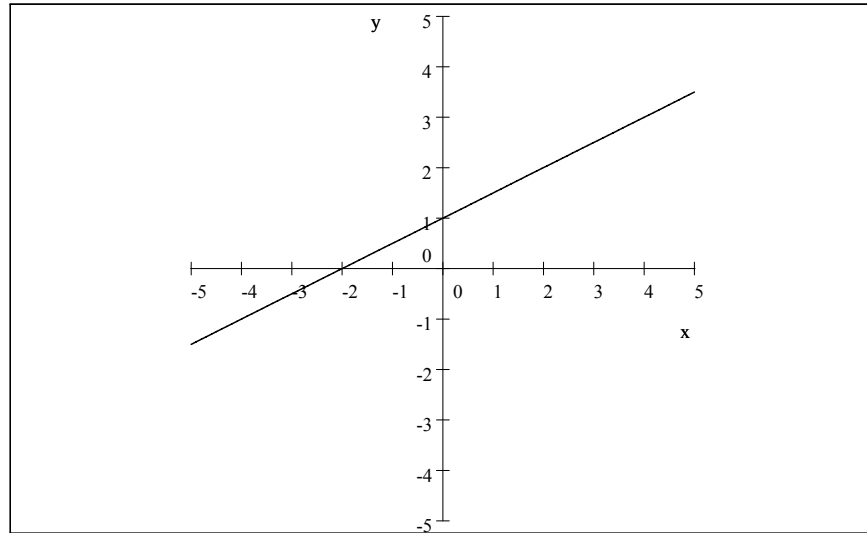
c) $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$.

d) $3x^2 + 3y^2 - 7y = 0$.

8) Obter a interseção das circunferências: $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ e $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 13 = 0$.

9) Obter a equação da reta que passa pelas interseções das circunferências $x^2 + y^2 + 3x - y = 0$ e $3x^2 + 3y^2 + 2x + y = 0$.

10) Considere a função cujo gráfico é dado pela figura a seguir



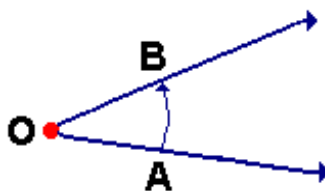
- Determine a expressão analítica da função f
- Seja $g(x) = |f(x)|$, desenhe o gráfico de $g(x)$
- Seja $h(x) = g(x - 1)$, desenhe o gráfico de $h(x)$
- Seja $l(x) = (h \circ g)(x)$, desenhe o gráfico de $l(x)$

Capítulo 7

Trigonometria

7.1 Ângulos e Arcos

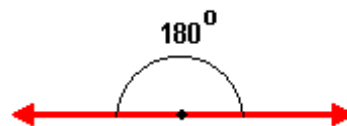
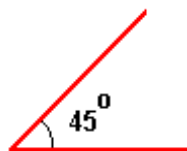
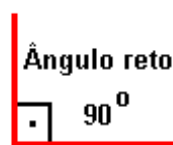
Ângulo: Ângulo é o espaço contido entre dois segmentos de reta orientados (ou duas semi-retas orientadas) a partir de um ponto comum.



O Grau

Definimos como 1 grau, que denotamos por 1° , o arco equivalente a $1/360$ da circunferência, isto é, em uma circunferência cabem 360° .

Exemplos:



O grau comporta ainda os submúltiplos, minuto(') e segundo(''), de forma que:

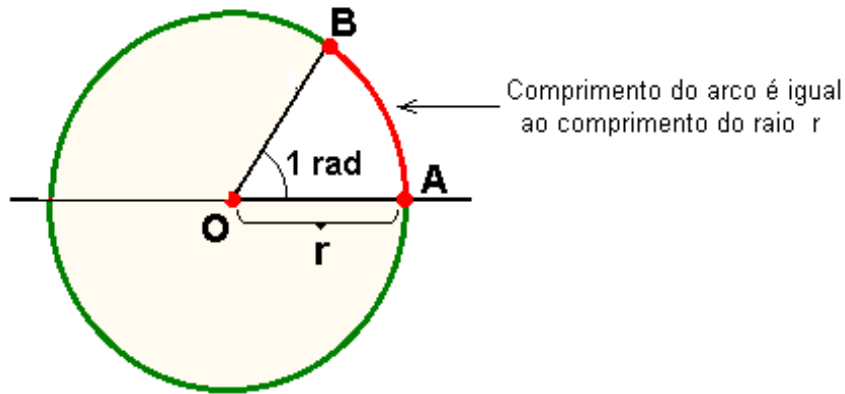
$$1^\circ = 60' \text{ e } 1' = 60''$$

O Grado

É a medida de um arco igual a $1/400$ do arco completo da circunferência na qual estamos medindo o arco.

O Radiano

Definimos 1 radiano como o arco cujo comprimento é igual ao raio da circunferência onde tal arco foi determinado.



Lembramos que o comprimento de uma circunferência de raio r é dado por $2\pi r$. Utilizando a relação apresentada acima, para calcularmos em radianos a medida de um arco de uma volta, fazemos:

Dado um arco cujo comprimento é L unidades de comprimento, dizemos que sua medida, em radianos, é igual a $\frac{L}{r}$. Assim, se a circunferência do arco considerado tem raio unitário, a medida do arco, em radianos, é numericamente igual ao comprimento do arco.

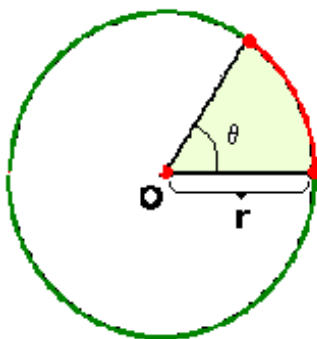
Comprimento de um arco

Sabemos que a medida de um arco em radianos é o número que indica quantas vezes um arco, de comprimento igual ao raio, cabe no arco medido, isto é:

$$\alpha = \frac{L}{r} \implies L = \alpha \cdot r$$

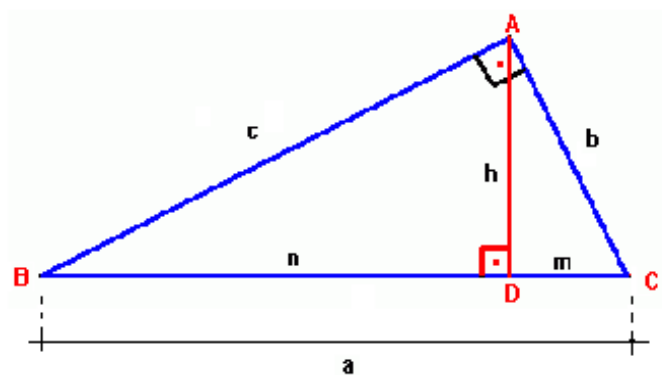
Área do setor circular

A área sombreada abaixo é chamada de setor circular. É evidente que as razões das áreas do círculo e do setor circular são as mesmas que as razões entre os respectivos ângulos centrais. Assim, se os ângulos centrais estiverem em radianos, temos



$$\frac{A}{\pi r^2} = \frac{\theta}{2\pi} \Rightarrow A = \frac{r^2 \theta}{2}$$

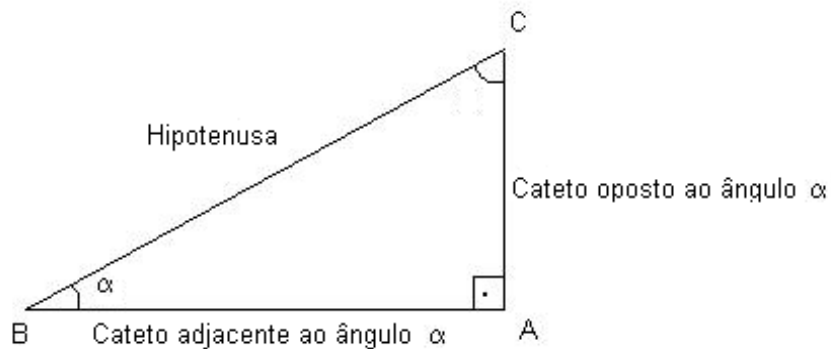
7.2 Trigonometria Básica no Triângulo Retângulo



- | | |
|----------------------------|----------------------|
| 1) $a = m + n$ | 4) $b^2 = a \cdot m$ |
| 2) $h^2 = m \cdot n$ | 5) $c^2 = a \cdot n$ |
| 3) $a \cdot h = b \cdot c$ | 6) $a^2 = b^2 + c^2$ |

Exemplo: Em um triângulo retângulo as medidas dos catetos são 8 *cm* e 6 *cm*. Determine a altura do triângulo relativamente à hipotenusa.

7.3 Relações Trigonométricas:



Razão seno: O seno de um ângulo agudo em um triângulo retângulo é definido por:

$$\text{seno } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

Razão cosseno: O cosseno de um ângulo agudo em um triângulo retângulo é definido por:

$$\text{cosseno } \alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

Razão tangente: A tangente de um ângulo agudo em um triângulo retângulo é definido por:

$$\text{tangente } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

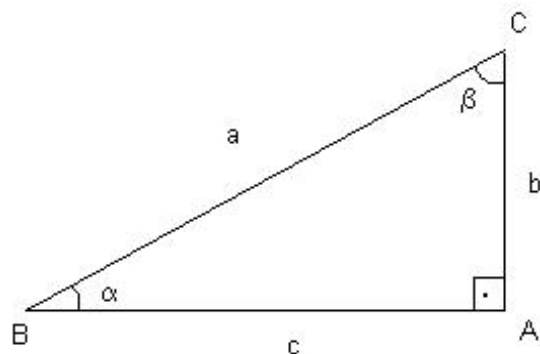
A partir destas definições são definidas também

$$\text{cotangente } \alpha = \frac{1}{\text{tangente } \alpha}$$

$$\text{secante } \alpha = \frac{1}{\text{cosseno } \alpha}$$

$$\text{cossecante } \alpha = \frac{1}{\text{seno } \alpha}$$

Sejam α e β ângulos tais que $\alpha + \beta = 90^\circ$ conforme a figura



então valem as relações

$$\begin{array}{ll} \sin \alpha = \frac{b}{a} & \sin \beta = \frac{c}{a} \\ \cos \alpha = \frac{c}{a} & \cos \beta = \frac{b}{a} \\ \tan \alpha = \frac{b}{c} & \tan \beta = \frac{c}{b} \end{array}$$

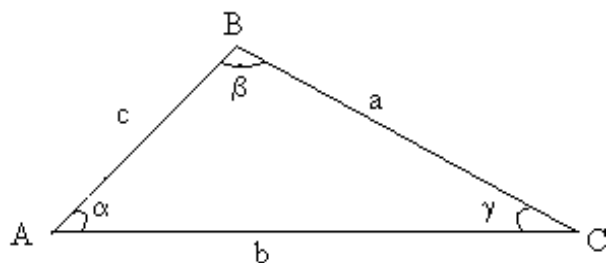
Exemplo: Mostre que vale a relação $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo: Obtenha o comprimento d da diagonal do quadrado em função do lado L .

Exemplo: Calcule a área de um exágono inscrito em circunferência de raio r .

7.4 Trigonometria Básica no Triângulo Qualquer

Considere o triângulo qualquer conforme a figura:



Lei dos senos

Se os lados de um triângulo tiverem comprimentos a, b e c e se α for o ângulo entre os lados b e c , β entre os lados c e a , γ entre os lados a e b então vale a relação

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Observação: Usa-se a lei dos senos quando são conhecidos dois ângulos e um lado

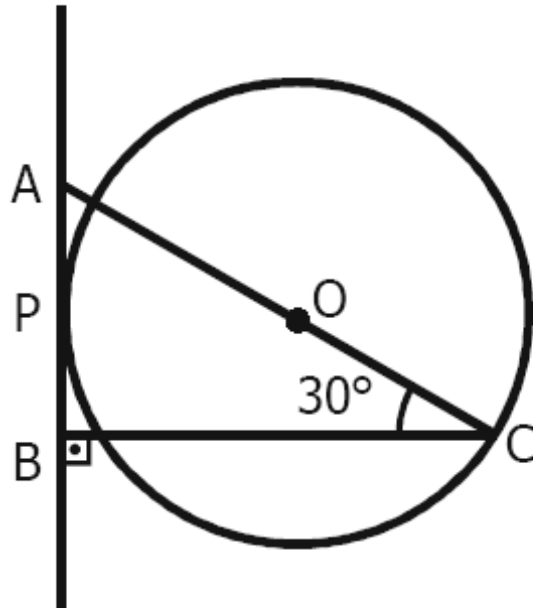


Figura 7.1:

Lei dos Cossenos

Se os lados de um triângulo tiverem comprimentos a , b e c e se θ for o ângulo entre os lados com comprimento a e b , então

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos \theta$$

Observação: Usa-se a lei dos cossenos quando são conhecidos dois lados e o ângulo formado por eles.

7.4.1 Exercício Resolvido

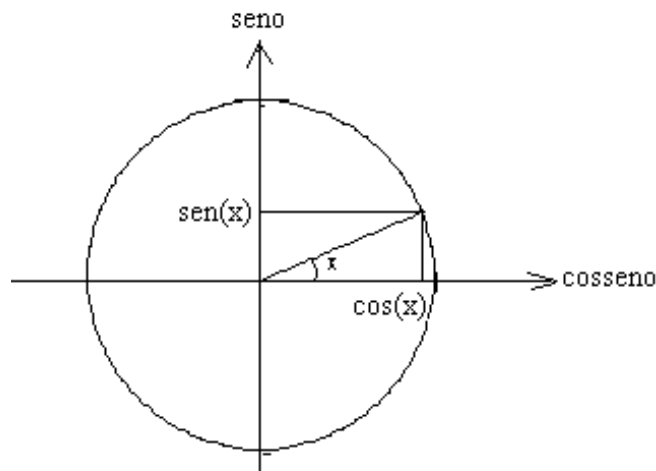
1) Na figura, a circunferência de centro O é tangente à reta AB no ponto P . Se $AC = 2$, determine o comprimento do raio da circunferência

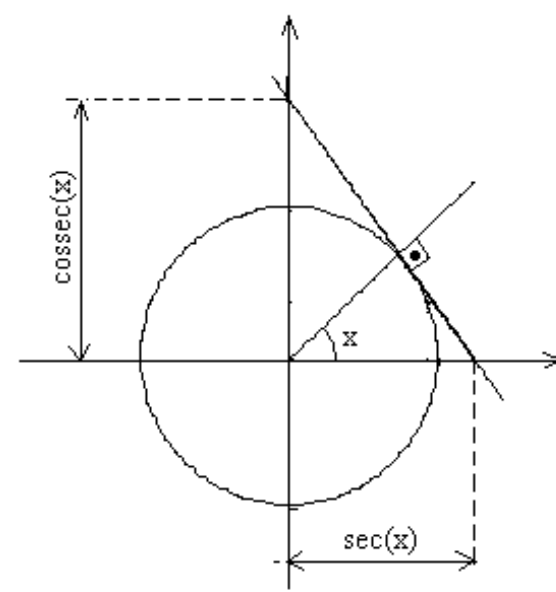
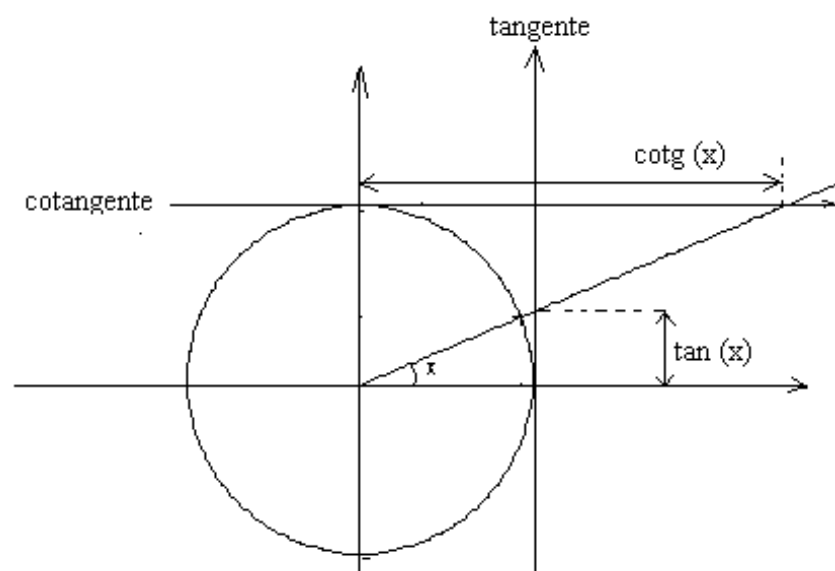
2) Mostre que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°

7.5 Ciclo Trigonométrico

As razões seno, cosseno, tangente e as demais razões dependem apenas do ângulo que é considerado pois no triângulo retângulo existe a proporcionalidade

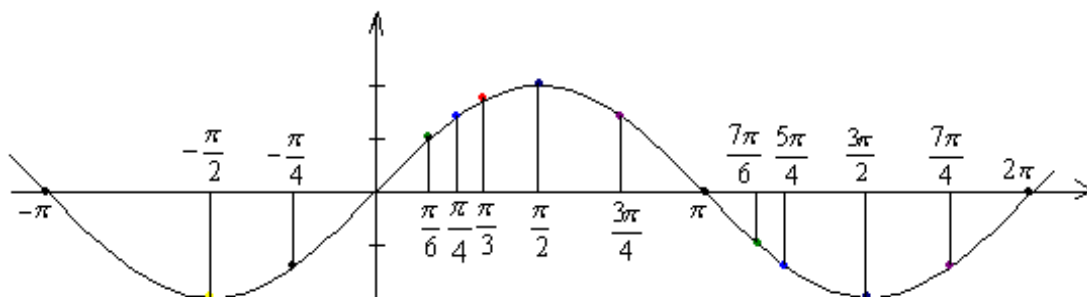
entre os seus lados quando consideramos um ângulo fixo. Como o cálculo das razões trigonométricas não depende do tamanho da hipotenusa podemos determinar todas as razões considerando o comprimento da hipotenusa igual a 1 (é claro que para cada ângulo e triângulo retângulo com hipotenusa igual a um teremos catetos diferentes) e isto pode ser visualizado mais facilmente no ciclo trigonométrico, que uma circunferência de raio um, onde para cada ângulo medido no sentido anti-horário determinamos as razões para cada triângulo retângulo com hipotenusa de comprimento igual a um.



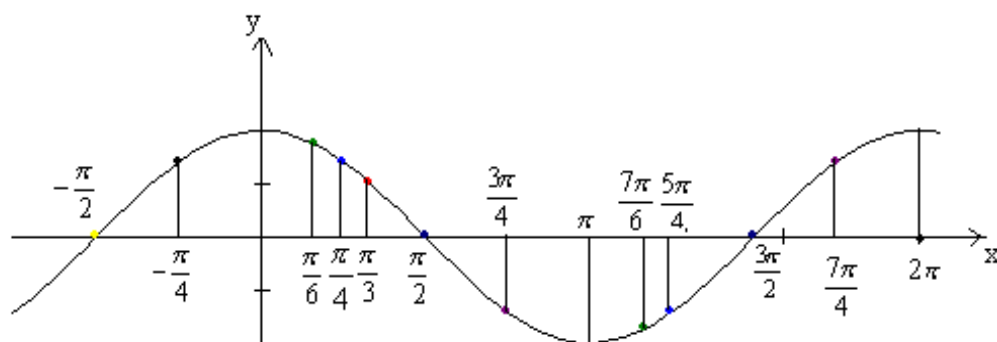


7.6 Funções Trigonométricas

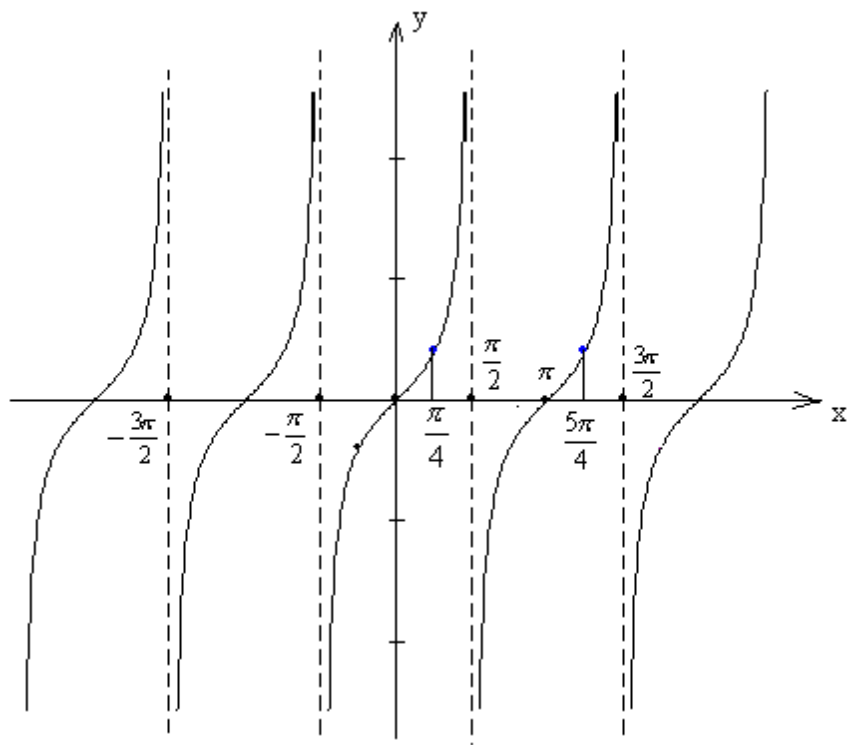
Função Seno: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \text{sen}(x)$, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, $\text{Im}(f) = [-1, 1]$



Função Cosseno: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x)$, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, $\text{Im}(f) = [-1, 1]$



Função tangente: $f : \mathbb{R} - \left\{ \frac{n\pi}{2} / n \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \tan(x)$, $\text{Dom}(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z} \right\}$, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$



7.7 Identidades trigonométricas

Identidades fundamentais:

$$\begin{array}{lll}
 \sin^2 x + \cos^2 x = 1 & \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} & \sec x = \frac{1}{\cos x} \\
 \sec^2 x = 1 + \tan^2 x & \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} & \csc x = \frac{1}{\sin x} \\
 \csc^2 x = 1 + \cot^2 x & \cot x = \frac{1}{\tan x} & \frac{\sec x}{\csc x} = \tan x
 \end{array}$$

Valores das razões mais empregados em aplicações práticas

	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∅

Outras Identidades Trigonométricas

$$\begin{array}{lll}
a) & \sin(\pi - \theta) = \sin \theta. & \sin(\pi + \theta) = -\sin \theta & \sin(-\theta) = -\sin \theta. \\
b) & \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta. & \cos(\pi + \theta) = -\cos \theta. & \cos(-\theta) = \cos \theta \\
c) & \tan(\pi - \theta) = -\tan \theta. & \tan(\pi + \theta) = \tan \theta & \tan(-\theta) = -\tan \theta.
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
d) & \sin \theta = \sin(\theta + 2\pi) & \sin \theta = \sin(\theta - 2\pi). & \sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta - 2\pi) \\
e) & \cos \theta = \cos(\theta + 2\pi) & \cos \theta = \cos(\theta - 2\pi). & \cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta - 2\pi). \\
f) & \tan \theta = \tan(\theta + 2\pi) & = \tan(\theta - 2\pi) = \tan(\theta + \pi) & \tan \theta = \tan(\theta - \pi).
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
g) \quad \sin \theta = \sin(\theta \pm 2n\pi), n = 0, 1, 2, \\
h) \quad \cos \theta = \cos(\theta \pm 2n\pi), n = 0, 1, 2, \\
i) \quad \tan \theta = \tan(\theta \pm n\pi), n = 0, 1, 2, \dots
\end{array}$$

Ângulos Complementares

$$\begin{array}{l}
j) \quad \sin \theta = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) \\
k) \quad \cos \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) \\
l) \quad \tan \theta = \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)}{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)} = \cot(\frac{\pi}{2} - \theta) \\
m) \quad \cot \theta = \tan(\frac{\pi}{2} - \theta)
\end{array}$$

Fórmulas de adição e subtração:

$$\begin{array}{l}
a) \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha \\
b) \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha \\
c) \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \\
d) \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \\
e) \quad \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} \\
f) \quad \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}
\end{array}$$

→

Fórmulas de ângulo duplo:

$$\begin{array}{l}
a) \quad \sin 2\Phi = 2 \cdot \sin \Phi \cdot \cos \Phi \\
b) \quad \cos 2\Phi = \cos^2 \Phi - \sin^2 \Phi \\
c) \quad \tan 2\Phi = \frac{2 \cdot \tan \Phi}{1 - \tan^2 \Phi}
\end{array}$$

Fórmulas do ângulo metade:

$$\begin{array}{l}
a) \quad \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1 - \cos \varphi}{2} \\
b) \quad \cos^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1 + \cos \varphi}{2}
\end{array}$$

Formulas de produto em soma:

$$\begin{array}{l}
a) \quad \sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)] \\
b) \quad \sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \\
c) \quad \cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]
\end{array}$$

Fórmulas de soma em produto:

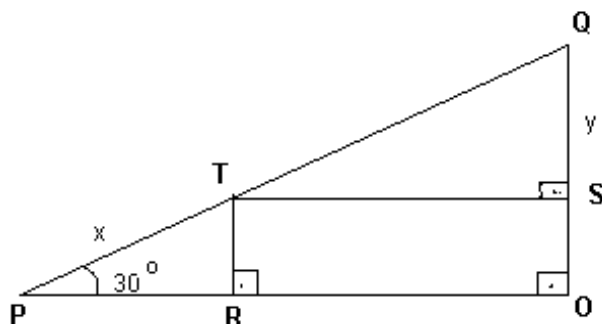
$$\begin{aligned} a) \quad \sin \alpha + \sin \beta &= 2. \sin \frac{\alpha+\beta}{2}. \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \\ b) \quad \cos \alpha + \cos \beta &= 2. \cos \frac{\alpha+\beta}{2}. \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \\ c) \quad \sin \alpha - \sin \beta &= 2. \cos \frac{\alpha+\beta}{2}. \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \\ d) \quad \cos \alpha - \cos \beta &= -2. \sin \frac{\alpha+\beta}{2}. \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \end{aligned}$$

Trigonometria circular versus Trigonometria hiperbólica

Trigonometria circular	Trigonometria hiperbólica
$x^2 + y^2 = 1$	$x^2 - y^2 = 1$
$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$	$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$
$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$	$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$
$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$	$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}$
$\csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$	$\operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\sinh(x)}$
$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$	$\sinh(2x) = 2 \sinh(x) \cosh(x)$
$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$	$\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$
$\operatorname{tg}(2x) = \frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$	$\tanh(2x) = \frac{2 \tanh(x)}{1 + \tanh^2(x)}$

7.8 Exercícios de Fixação

- 1) Expressar em radianos
 - a) 36°
 - b) 135°
 - c) 300°
- 2) Expressar em graus
 - a) $\frac{\pi}{6}$ rad
 - b) $\frac{\pi}{4}$ rad
 - c) $\frac{\pi}{3}$ rad
 - d) $\frac{7\pi}{4}$ rad
- 3) Quanto mede, em radianos,
 - a) um arco de $22^\circ 30'$
 - b) um arco de $56^\circ 15'$
- 4) Mostre que um arco de 1 rad mede aproximadamente 57°
- 5) Um móvel faz um percurso de meio quilômetro sobre uma circunferência de diâmetro 200 metros. Qual a medida do ângulo central correspondente ao percurso?
- 6) Calcular o menor ângulo entre os ponteiros de um relógio nos seguintes instantes
 - a) 10h 30min
 - b) 2h 15 min
 - c) 13h 35 min
- 7) Determine a fórmula para a área A de um setor circular em termos de seu raio e do comprimento de arco L
- 8) Determine a área lateral S de um cone circular reto de raio r e de geratriz L
- 9) Encontre os valores de x e y na figura abaixo:



Dados: $PQ = 10m$, $TR = 2,3m$, $PT = x$, $QS = y$

10) Um carro sobe uma via em forma de plano inclinado, com inclinação de 20° em relação à horizontal. Em que altura, em relação à horizontal, o carro estará se percorrer 1 km na via. Dado: $\sin 20 = 0,34$

11) Se θ é um ângulo agudo, use identidades fundamentais para escrever a primeira expressão em função da segunda:

- a) $\cot \theta; \sin \theta$
- b) $\sec \theta; \sin \theta$
- c) $\tan \theta; \cos \theta$
- d) $\csc \theta; \cos \pi$
- e) $\tan \theta; \sec \theta$

12) Fazendo a substituição trigonométrica $x = a \sin \theta$ para $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, escreva $\sqrt{a^2 - x^2}$ em termos de uma função trigonométrica de θ .

13) Usando a substituição indicada simplifique os radicais:

- a) $\sqrt{16 - x^2}; x = 4 \sin \theta$ para $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$
- b) $\frac{x^2}{\sqrt{9 - x^2}}; x = 3 \sin \theta$ para $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$
- c) $\frac{x}{\sqrt{25 + x^2}}; x = 5 \tan \theta$ para $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$
- d) $\frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x^2}; x = 2 \tan \theta$ para $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$
- e) $\frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x}; x = 3 \sec \theta$ para $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

14) Determine os intervalos de crescimento e decrescimento para a função $f(x) = \cos x$ definida para $x \in [0, 2\pi]$

15) $\frac{1}{1 + \sin^2 x} + \frac{1}{1 + \cos^2 x} + \frac{1}{1 + \sec^2 x} + \frac{1}{1 + \csc^2 x}$ é igual a:

16) Os valores que m pode assumir para que exista um arco x satisfazendo a igualdade $\sin x = m - 4$ são:

17) A expressão $\cos^2 x + \cos^2 x \tan^2 x + \tan^2 x$ é igual a:

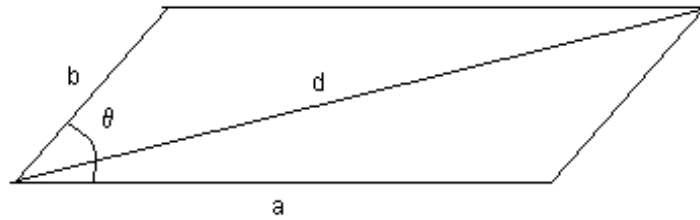
18) Determine as soluções das equações em $[0, 2\pi)$

- a) $2 \sin^2 u = 1 - \sin u$
- b) $\cos \lambda - \sin \lambda = 1$
- c) $2 \tan \varpi - \sec^2 \varpi = 0$
- d) $\sin x + \cos x \cot x = \csc x$
- e) $\sin 2t + \sin t = 0$
- f) $\cos \mu + \cos 2\mu = 0$

g) $\tan 2x = \tan x$

h) $\sin \frac{u}{2} + \cos u = 1$

19) Mostre que o comprimento da diagonal maior de um paralelogramo é
 $d = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta}$



20) Desenhe o gráfico das seguintes funções:

a) $y = \sin(3x)$

b) $y = 1 - \sin x$

c) $y = |\cos x|$

d) $y = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

Capítulo 8

Revisão Geral

Lista de Exercícios de Matemática Básica

1. Resolva as inequações em $\mathbb{R}$

(a) $1 - x - 2x^2 \geq 0$

(b) $2x - 5 < \frac{1}{3} + \frac{3x}{4} + \frac{1-x}{3}$

(c) $\frac{x+1}{2-x} < \frac{x}{3+x}$

(d) $|5 - 6x| \geq 9$

(e) $\left| \frac{x-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}} \right| < 1$

(f) $\frac{(x-4)^6}{(x-2)(x+1)} > 0$

(g) $\frac{x^3+x^2-x-1}{x^2+x-2} < 0$

2. Resolva as equações em $\mathbb{R}$

(a) $|5x - 3| = 12$

(b) $(x - 3)(x + 1)(x + 4) = 0$

(c) $\left| \frac{3x+8}{2x-3} \right| = 4$

(d) $2x - 7 = |x| + 1$

3. Dados os conjuntos: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -10 < x < 8\}$, $B = (-3, 5]$ e $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$ determine:

(a) $A \cup B \cup C$

(b) $B \cap (A \cup C)$

(c) $A \cup (B \cap C)$

(d) $A - B$

- (e) $C - (A \cap C)$
4. O consumo C de água em m^3 , pela população de uma cidade em função do tempo t , em segundos, é dado pela equação $C = 2000t$.
- Qual o consumo de água dessa população em 10 segundos?
 - Qual é o consumo de água dessa população em 10 horas?
 - Em quantos segundos essa população consome $48.000m^3$ de água?
5. Dada a função $f(x) = 3x + 4$ determine:
- $f(-1)$
 - o valor de x tal que $f(x) = 10$
 - Faça a representação gráfica dessa função.
6. Determine os zeros das funções reais:
- $f(x) = x^2 - 4x + 3$
 - $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$
 - $y = \frac{x+1}{2} - \frac{5x+3}{4}$
7. Determine o domínio das funções:
- $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$
 - $g(x) = (x+1)\sqrt{x-4}$
 - $h(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-3}$
 - $l(x) = \ln(x+5)$
8. Sabe-se que, sob um certo ângulo de tiro, a altura atingida por uma bala, em metros, em função do tempo, em segundos, é dada por $h(t) = -20t^2 + 200t$.
- Qual a altura máxima atingida pela bala?
 - Em quanto tempo, após o tiro, a bala atinge a altura máxima?
 - faça uma representação gráfica dessa situação.
9. Em uma pista de atletismo circular com quatro raias, a medida do raio da circunferência até a metade da primeira raia (onde o atleta corre considerando a primeira raia, a raia mais interna) é 100 metros e a largura de cada raia é de 2 metros. Se todos os atletas corressem até completar uma volta inteira, quantos metros cada um dos atletas correria?

10. Um engenheiro deve medir a largura de um rio. Para isso, fixa um ponto A na margem em que se encontra e um ponto B na margem oposta. A seguir desloca-se $40m$ perpendicularmente à reta AB até o ponto C e mede o ângulo $\widehat{ACB}$, obtendo 44° . Qual é a largura do rio? (dados: $\sin 44 = 0,69$, $\cos 44 = 0,71$)
11. Calcule o valor da expressão: $E = \frac{\sin(\frac{11\pi}{2}) - \sin(\frac{9\pi}{2})}{\cos 48\pi - \cos 33\pi}$
12. Resolver a equação $\sec^2 x + \tan x = 1$ para $0 \leq x \leq 2\pi$
13. Determine o valor de x sabendo que $(\log_x b)(\log_b c)(\log_c d)(\log_d 729) = 6$
14. Resolva o sistema de equações
$$\begin{cases} 2\log_2 x + \log_2 y = 5 \\ \log_2 x - 2\log_2 y = -1 \end{cases}$$
15. Determine o conjunto solução do sistema de equações
$$\begin{cases} 2^{2x+y} = 4 \\ 2^{x-y} = 2^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$$
16. Determinar a solução da equação exponencial : $5^{x+2} - 9 \cdot 5^x = 2^{x+9} + 113 \cdot 2^x$
17. Determine a equação da reta que é tangente à parábola de equação $y = 2x^2 + 3$ e que é paralela à reta de equação $y = 8x + 3$. Resposta: $y = 8x - 5$.
18. Para que valores de a e b a parábola $y = ax^2 + b$ tangencia a reta $y = x$. Resposta: $ab = \frac{1}{4}$.
19. Resolva cada equação em x .
- $\ln x + \ln x^2 = -1$
 - $\ln(2x - 1) - \ln(\frac{x+2}{e^3}) = 3$
 - $e^{3x-2} = 4$
 - $e^{ax} = Ce^{bx}$, onde C é uma constante e $a \neq b$
 - $\ln(\ln x^2) = 1$.
20. Se a população de bactérias começa com 200 e dobra a cada 4 horas, então o número de bactérias após t horas é $n = f(t) = 200 \cdot 2^{\frac{t}{4}}$:
- Encontre a função inversa e explique seu significado
 - Quando a população atingirá 200.000 bactérias?
21. Após acionado o Flash de uma câmera, a bateria imediatamente começa a recarregar o capacitor do flash, o qual armazena uma carga elétrica dada por $Q(t) = 10(1 - e^{-\frac{t}{4}})$
- Encontre a função inversa e explique seu significado.

- (b) Quanto tempo levará para o capacitor recarregar 50% da sua capacidade?
22. Se $f(x) = \ln x$ e $g(x) = x$, encontre as funções $f \circ g, g \circ f, f \circ f, g \circ g$.
23. Expresse a função $F(x) = \frac{1}{\sqrt{x+e^x}}$ como uma composta de três funções.
24. Faça o gráfico da função $y = \frac{1}{x-2}$
25. A função de Heaviside H é definida por $H(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 0 \\ 1, & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$. Essa função é usada no estudo de circuitos elétricos para representar o surgimento repentino de corrente elétrica, ou voltagem, quando uma chave é instantaneamente ligada:
- (a) Faça o gráfico $g(x) = |H(x)|$
- (b) Faça um esboço da função $y = t^2 H(t)$.
26. Mostre que a função $f(x) = \cos(x)$ é uma função par e que $g(x) = \sin(x)$ é uma função ímpar
27. Mostre que $h(x) = \tan x$ é uma função ímpar
28. Dada uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ determine duas funções $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ onde g é par e h é ímpar tais que $f(x) = g(x) + h(x)$
29. Se f é uma função par e g é uma função ímpar o que podemos dizer a respeito das funções:
- (a) $l(x) = f(x) + g(x)$
- (b) $h(x) = (f \circ g)(x)$
- (c) $m(x) = f(x) \cdot g(x)$
- (d) $v(x) = |f(x)| |g(x)|$

Capítulo 9

Respostas

9.1 Do Capítulo 1, Teoria de Conjuntos

Exercícios Resolvidos do Capítulo 1

a) Em uma cidade existem dois clubes A e B , que têm juntos 6000 sócios. O clube A tem 4000 sócios e os dois clubes têm 500 sócios comuns. Quantos sócios têm o clube B ? Quantos são os sócios do clube B que não são sócios do clube A ?

Solução $\#B = 2000$, $\#(A \cap B) = 500$, $\#(B - A) = 2000$

b) Seja $A = \{a, b, c, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{d, e, f, 3, 7, 8\}$. Determinar $A - B$, $A \cap B$, $A \cup B$, $B - A$

Solução: $A - B = \{a, b, c, 1, 2, 4, 5\}$, $A \cap B = \{3\}$,
 $A \cup B = \{a, b, c, 1, 2, 3, 4, 5, d, e, f, 7, 8\}$, $B - A = \{d, e, f, 7, 8\}$

c) Em uma cidade existem três cavalos X, Y, Z que participam de um páreo em uma corrida de cavalos. X e Y têm 400 apostadores em comum. Os cavalos Y e Z têm 300 apostadores em comum. Os cavalos X e Z não têm apostadores em comum. X e Y têm juntos 9000 apostadores e Y e Z têm juntos 8000 apostadores. Sabendo que Z tem 3000 apostadores determinar o número de apostadores dos cavalos X e Y .

Solução: $X = 4100$ e $Y = 5300$

d) Uma cidade possui 10000 habitantes, que freqüentam três clubes recreativos, divididos da seguinte forma: 45% freqüentam o clube A; 29% freqüentam o clube B; 53% freqüentam o clube C; 25% freqüentam somente o clube A; 10% freqüentam somente o clube B; 30% freqüentam somente o clube C; 9% freqüentam os clubes A e C. Sabendo que A, B e C possuem freqüentadores em comum, e que sempre existem freqüentadores em comum a dois clubes, determine o número de habitantes que freqüentam mais de um clube.

Solução: $S = 2800$

9.2 Do Capítulo 2, Números

Exercícios Resolvidos do Capítulo 2

- 1) Usando a notação de conjunto escrever os intervalos
 - a) $(-3, 6) \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} / x \leq \frac{-11}{4}\}$
 - b) $(\pi, 6] \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} / \pi < x \leq 6\}$
 - c) $[\sqrt{2}, \sqrt{3}] \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} / \sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{3}\}$
 - d) $[-1, 0) \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x < 0\}$
 - e) $(-\infty, 0) \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} / -\infty < x < 0\}$
- 2) Se $A = \{x \in \mathbb{R} / 2 < x < 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} / 3 \leq x < 8\}$ determinar
 - a) $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} / 3 \leq x < 5\}$
 - b) $A - B = \{x \in \mathbb{R} / 2 < x < 3\}$
 - c) $B - A = \{x \in \mathbb{R} / 5 \leq x < 8\}$
- 3) Representar os seguintes intervalos:
 - a) $[-1, 1]$ b) $[0, 10)$ c) $(-3, 1]$ d) $(4, 6)$ e) $(5, +\infty)$
- 4) Resolver graficamente
 - a) $(\pi, 6] \cup [-1, 1)$ b) $[\sqrt{2}, \sqrt{3}] \cap [\frac{1}{2}, 3]$
- 5) Resolver as inequações
 - a) $3 + 7x \leq 2x + 9 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} / x \leq \frac{6}{5}\}$
 - b) $7 \leq 2 - 5x < 9 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} / \frac{-7}{5} < x \leq -1\}$
 - c) $\frac{2x-5}{x-2} < 1 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} / 2 < x < 3\}$
 - d) $\frac{x-1}{x} \geq 4 \Rightarrow S = [\frac{-1}{3}, 0)$

Exercícios de Fixação do Capítulo 2

- 01) Quais das alternativas abaixo é falsa
 - a) $\{\emptyset\}$ é um conjunto unitário $\Rightarrow F$
 - b) $\{\}$ é o conjunto vazio $\Rightarrow F$
 - c) Se $A = \{1, 2, 3\}$ então $\{3\} \in A \Rightarrow F$
 - d) $\{x \in \mathbb{N} / x = 2n, \text{ onde } n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Z} - \{x \in \mathbb{N} / x = \pm 2n + 1, \text{ onde } n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow V$
 - e) $\emptyset \in [\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}] \Rightarrow F$
 - f) $[\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}] \cup \{\} \subset \emptyset \Rightarrow F$
 - h) $B \cap (A - B) = \emptyset \Rightarrow V$
 - i) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} - \mathbb{Z} \Rightarrow F$
- 02) Escrever usando o sinal de desigualdade
 - a) a é um número positivo $\Rightarrow a > 0$
 - b) b é um número negativo $\Rightarrow b < 0$
 - c) a é maior que $b \Rightarrow a > b$
- 03) Representar na reta real os seguintes intervalos
 - a) $[-10, 11]$ b) $[0, 3)$ c) $(-3, 0]$ d) $(3, 7)$ e) $(0, +\infty)$
- 04) Representar graficamente os intervalos dados pelas desigualdades
 - a) $2 \leq x \leq 7$ b) $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{5}$ c) $0 \leq x < 2$ d) $-\infty < x < -1$
- 05) Determinar graficamente
 - a) $(5, 7] \cap [6, 9]$ b) $(-\infty, 7] \cap [8, 10]$ c) $(-3, 0] \cup (0, 8)$ d) $(0, 7] - (5, 7)$

06) Sejam $M = \{x \in \mathbb{R} / 2 \leq x < 10\}$, $N = \{x \in \mathbb{R} / 3 < x < 8\}$ e $P = \{x \in \mathbb{R} / 2 \leq x \leq 9\}$. Determinar o conjunto $P - (M - N)$.

Solução: $P - (M - N) = (3, 8)$

07) Resolva as inequações e exprima a solução em termos de intervalos quando possível:

- a) $2x + 5 < 3x - 7 \Rightarrow S = (12, +\infty)$
- b) $x - 8 < 5x + 3 \Rightarrow S = \left(\frac{-11}{4}, \infty\right)$
- c) $-2 \leq \frac{2x-3}{5} < 7 \Rightarrow S = \left[\frac{-7}{2}, 19\right)$
- d) $\frac{x+1}{2x-3} > 2 \Rightarrow S = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{3}\right)$

9.3 Do Capítulo 3, Módulo

Exercícios resolvidos do Capítulo 3

- 1) Completar as implicações abaixo
 - a) Se $|x| = 5$ então $x = 5$ ou $x = -5$
 - b) Se $|x| = 0$ então $x = 0$
 - c) Se $|x| < 3$ então $-3 < x < 3$
 - d) Se $|x| > 7$ então $x > 7$ ou $x < -7$
- 2) Representar na reta real os pontos que satisfazem as seguintes relações
 - a) $|x| = 3$ b) $|x| < 3$ c) $|x| > 1$ $|x - 3| = 5$
- 3) Resolver
 - a) $|x - 3| < 4 \Rightarrow S = (-1, 7)$
 - b) $\frac{1}{|2x-3|} > 5 \Rightarrow S = \left(\frac{7}{5}, \frac{8}{5}\right) - \left\{\frac{3}{2}\right\} = \{x \in \mathbb{R} / \frac{7}{5} < x < \frac{8}{5} \text{ e } x \neq \frac{3}{2}\}$
 - c) $|3x - 4| > 2 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} / x < \frac{2}{3} \text{ ou } x > 2\}$
 - d) $|3x - 2| = |5x + 4| \Rightarrow x = -3 \text{ ou } x = -\frac{1}{4}$
 - e) $|x + 4| \geq 2 \Rightarrow S = (-\infty, -6] \cup [-2, +\infty)$

Exercícios de Fixação do Capítulo 3

- 1) Reescreva sem usar o símbolo de valor absoluto
 - a) $(-5)|3 - 6| = -15$
 - b) $\frac{|-6|}{2} = 3$
 - c) $|-7| + |4| = 11$
 - d) $|4 - \pi| = 4 - \pi$
- 2) Use a definição de módulo para reescrever sem usar o símbolo de módulo
 - a) se $x < -3$ então $|x + 3| = -x - 3$
 - b) se $x > 5$ então $|5 - x| = x - 5$
- 3) Resolver as equações em $\mathbb{R}$
 - a) $|5x - 3| = 12 \Rightarrow x = 3; x = -\frac{9}{5}$
 - b) $|2x - 3| = |7x - 5| \Rightarrow x = \frac{2}{5}; x = \frac{8}{9}$
 - c) $\left|\frac{x+2}{x-2}\right| = 5 \Rightarrow x = 3; x = \frac{4}{3}$
 - d) $|3x + 2| = 5 - x \Rightarrow x = \frac{3}{4}; x = -\frac{7}{2}$
 - e) $2x - 7 = |x| + 1 \Rightarrow x = 8$
- 4) Resolva a desigualdade e exprima a solução em termos de intervalos, quando possível
 - a) $|x + 3| < 0,01 \Rightarrow S = (-3.01, -2.99)$

- b) $|2x + 5| < 4 \Rightarrow S = (-\frac{9}{2}, -\frac{1}{2})$
 c) $|3x - 7| \geq 5 \Rightarrow S = (-\infty, \frac{2}{3}] \cup [4, +\infty)$
 d) $|-11 - 7x| > 6 \Rightarrow S = (-\infty, -\frac{17}{7}) \cup [-\frac{5}{7}, +\infty)$
 e) $3 \leq |x - 2| \leq 7 \Rightarrow S = [-5, -1] \cup [5, 9]$
 f) $\frac{2}{|x+3|} < 1 \Rightarrow S = (-\infty, -5) \cup (-1, +\infty)$
 g) $|x + 4| \leq |2x - 6| \Rightarrow S = (-\infty, \frac{2}{3}] \cup [10, +\infty)$
 h) $\left| \frac{7-2x}{5+3x} \right| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow S = [\frac{9}{7}, 19]$
 i) $|x - 1| + |x + 2| \geq 4 \Rightarrow S = (-\infty, -\frac{5}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$
 j) $\left| \frac{5}{2x-1} \right| \geq \left| \frac{1}{x-2} \right| \Rightarrow S = (-\infty, \frac{11}{7}) \cup (3, +\infty) - \{\frac{1}{2}\}$
 k) $\frac{1}{|x+1||x-3|} \geq \frac{1}{5} \Rightarrow S = [-2, 4] - \{-1, 3\}$

9.4 Do Capítulo 4, Expressões Algébricas

Exercícios Resolvidos 1 do Capítulo 4

- 1) $10m + 10n = 10(m + n)$
- 2) $6xy^5 + 12x^2y^2 = 6xy^2(2x + y^3)$
- 3) $4bx - 32b + 4by = 4b(x + y - 8)$
- 4) $4x + 4z - bx - bz = 4(x + z) - b(x + z)$
- 5) $x + x^2 + x^3 + 1 = (x^2 + 1)(x + 1)$

Exercícios Resolvidos 2 do Capítulo 4

- 1) Reescreva usando produtos notáveis:
 - a) $(a + 2)(a - 2) = a^2 - 4$
 - b) $(xy + 3z)(xy - 3z) = x^2y^2 - 9z^2$
 - c) $(x^2 - 4y)(x^2 + 4y) = x^4 - 16y^2$
 - e) $(x + 3)^2 = 6x + x^2 + 9$
 - f) $(2a - 5)^2 = 4a^2 - 20a + 25$
 - g) $(2xy + 4)^2 = 16xy + 4x^2y^2 + 16$
 - i) $(x + 4)^3 = x^3 + 12x^2 + 48x + 64$
 - j) $(2a + b)^3 = 8a^3 + b^3 + 6ab^2 + 12a^2b$
 - l) $(a - 1)^3 = 3a - 3a^2 + a^3 - 1$
- m) Calcule 41.39 usando um produto notável: $(40 + 1)(40 - 1) = 40^2 - 1^2 = 1.599$
- n) Calcule 101.99 usando um produto notável: $(100 + 1)(100 - 1) = 100^2 - 1 = 9999$.

Exercícios de Fixação do Capítulo 4

- 1) A soma de dois números é igual a 10 e a soma dos seus cubos é igual a 100. Qual o valor do produto desses números?

Sugestão Expandir $(a+b)^3$. Efetuar a multiplicação de $ab(a+b)$. Comparar os dois resultados e usar os dados do problema para calcular o valor de ab .
 Solução: $ab = 30$

2) Calcule o valor de M na expressão abaixo, para: $a = -700, b = -33, x = 23, 48ey = 9, 14345$.

$$M = \frac{(ax + by)^2 + (ay - bx)^2}{(ay + bx)^2 + (ax - by)^2}$$

Sugestão: usar produtos notáveis para desenvolver os quadrados. Se você observar CUIDADOSAMENTE a expressão acima, verá que o numerador e o denominador da fração são IGUAIS, e, portanto, $M = 1$, INDEPENDENTE dos valores de a, b, x e y .

1) Desenvolva:

a) $(3x + y)^2 = 9x^2 + 6xy + y^2$

b) $(\frac{1}{2} + x^2)^2 = (\frac{1}{4}) + x^2 + x^4$

c) $(\frac{2x}{3} + 4y^3)^2 = (\frac{4}{9})x^2 - (\frac{16}{3})xy^3 + 16y^6$

d) $(2x + 3y)^3 = 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$

e) $(x^4 + (\frac{1}{x^2}))^3 = x^{12} + 3x^6 + 3 + \frac{1}{x^6}$

2) Efetue as multiplicações:

a) $(x - 2)(x - 3) = x^2 - 5x + 6$

b) $(x + 5)(x - 4) = x^2 + x - 20$

3) Simplifique as expressões:

a) $(x + y)^2 - x^2 - y^2 = 2xy$

b) $(x + 2)(x - 7) + (x - 5)(x + 3) = 2x^2 - 7x - 29$

c) $(2x - y)^2 - 4x(x - y) = y^2$

4) Simplifique as frações algébricas

a) $\frac{x^2 - x}{x - 1} = x$

b) $\frac{x + 2}{x^2 + 4x + 4} = \frac{1}{x + 2}$

c) $\frac{a^2 - 9}{a - 3} = a + 3$

d) $\frac{x - y}{x^2 - y^2} = \frac{x - y}{(x + y)(x - y)} = \frac{1}{x + y}$

e) $\frac{x^2 + 6x + 9}{3x + 9} = \frac{x}{3} + 1 = \frac{1}{3}x + 1$

f) $\frac{6xy - 3x^2}{4y^2 - 2xy} = \frac{3x}{2y}$

g) $\frac{ax + ay}{x^2 + 2xy + y^2} = \frac{a}{x + y}$

h) $\frac{x^2 - 4}{x + 2} = x - 2$

i) $\frac{ax^2 - ay^2}{x^2 - 2xy + y^2} = \frac{a(x + y)}{(x - y)}$

5) Simplificando a expressão

$$\frac{y + z}{(x - y)(x - z)} + \frac{x + z}{(y - x)(y - z)} + \frac{x + y}{(z - x)(z - y)} = 0$$

6) Desenvolver as expressões e simplificar se possível

a) $(2a - 3b)^2 = 4a^2 - 12ab + 9b^2$

b) $(a - b)^2 + (a + b)^2 = 2a^2 + 2b^2$

c) $(a - b)^2 - (a + b)^2 = -4ab$

d) $(3z - y)^2 - (z - 2y)^2 = 8z^2 - 3y^2 - 2yz$

e) $(a - b)(a + b)(a^2 + b^2) = a^4 - b^4$

7) Calcular $678959^2 - 678958^2 = 1357917$.

Sugestao : Faça $x = 678959$ e use produtos notáveis.

8) Simplificar a expressão, considerando que $a \neq \pm b$

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 - b^2} \div \frac{a - b}{a + b} = \left(\frac{a + b}{a - b} \right)^2$$

9) Se $m + n + p = 6$, $mnp = 2$ e $mn + mp + np = 1$ então o valor de

$$\frac{m^2 + n^2 + p^2}{mnp}$$

é: 17

10) Calcule o valor da expressão

$$\frac{1}{1 + x + xy} + \frac{1}{1 + y + yz} + \frac{1}{1 + z + xz}$$

quando $xyz = 1$. Solução: O valor da expressão é 1.

11) Dados dois números a e b positivos, mostre que a média geométrica é sempre menor ou igual a média aritmética dos números a e b. Sugestão: Comece pela desigualdade $(a - b)^2 \geq 0$

12) Mostre que $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} = (a - b)(b - c)(c - a)$. Sugestão: Desenvolva os dois lados separadamente e compare-os

9.5 Do Capítulo 5, Funções

Exercício Resolvido Função Afim

1) A figura abaixo mostra os gráficos das funções custo total $C(x)$ e receita total $R(x)$ de uma empresa produtora de CDs. Se, produzindo e comercializando 960 CDs, o custo e a receita são iguais, o lucro pela venda de 2000 CDs é

Solução: O lucro é de R\$ 2600,00

Exercícios Resolvidos Função Modular

1) Dada a função definida por $f(x) = \frac{|x|}{x}$ se $x \neq 0$ e $f(x) = 0$ se $x = 0$, Determine|:

a) Sugestão: use a definição de módulo para estimar $\frac{|x|}{x}$, supondo $x \neq 0$. A imagem de $f(x)$ é $\text{Im}(f) = \{-1, 0, 1\}$.

b) O Domínio de $f(x)$ é $D(f) = \mathbb{R}$

c) O gráfico de $f(x)$. Utilize a definição $f(x)$ e os itens a) e b) para fazer o gráfico.

Exercícios Resolvidos Função Quadrática

1) Encontre os zeros das seguintes funções:

a) $f(x) = 2x^2 - 3x - 5 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 5 = 0$, Solução é: $-1, \frac{5}{2}$

b) $f(x) = -3x^2 + 2x \Rightarrow -3x^2 + 2x = 0$, Solução é: $0, \frac{2}{3}$

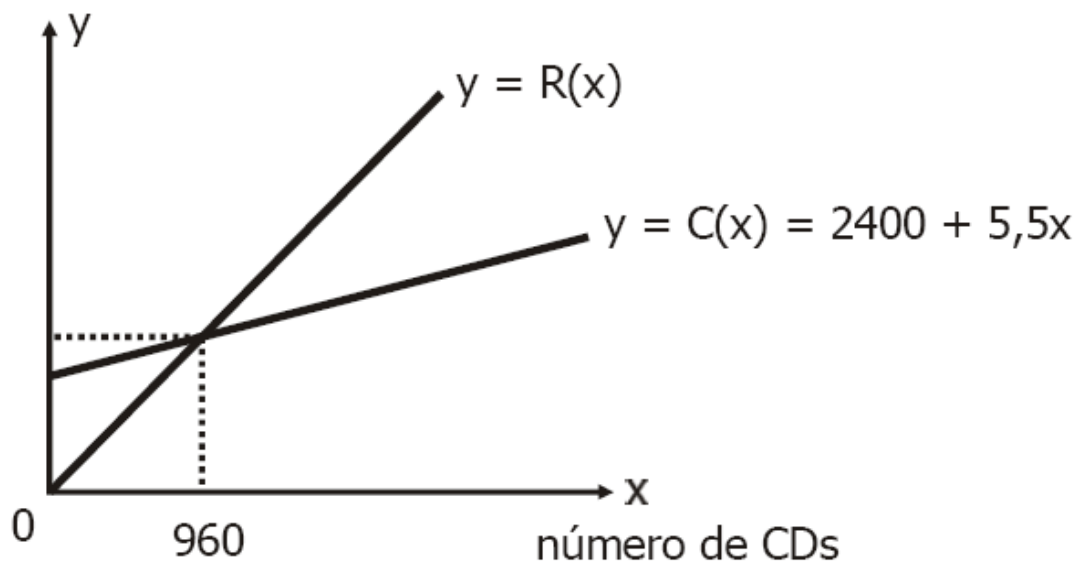


Figura 9.1:

c) $f(x) = (7x - 1)(2x - 3) \Rightarrow (7x - 1)(2x - 3) = 0$, Solução é: $\frac{3}{2}, \frac{1}{7}$

2) Resolver as inequações:

a) $x^2 - 4x + 3 > 0 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} / x < 1 \text{ ou } x > 3\}$

b) $3x^2 - 4x < 0 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} / 0 < x < \frac{4}{3}\}$

c) $-2x^2 + 7x - 3 \leq 0 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} / x \leq \frac{1}{2} \text{ ou } x \geq 3\}$

d) $x^2 + x + 1 > 0 \Rightarrow S = \mathbb{R}$

e) $-2x^2 + 5x - 4 \geq 0 \Rightarrow S = \emptyset$

Exercícios Resolvidos Função Raiz n-ésima de x

♥resolver♥

1) Se $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 3$, calcule

a) $x + x^{-1}$

b) $x^2 + x^{-2}$

2) Resolva as seguintes equações:

a) $\sqrt[3]{x+4} = 2$

b) $\sqrt{x+2} = x$

c) $\sqrt[4]{x^2+4x+3} = \sqrt[4]{x+1}$

d) $\sqrt{x+1} = \sqrt{2x+1}$

3) Calcule

a)

$$\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{2}}}$$

b)

$$\sqrt[n]{\frac{20}{4^{n+2} + 2^{2n+2}}}$$

4) Determine o domínio da função $f(x) = \sqrt[5]{\ln(x+2)}$

5) Faça o gráfico das funções $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e $g(x) = x^{\frac{3}{2}}$

♡RESOLVER OS EXERCÍCIOS ACIMA♡

Exercícios Resolvidos Função Exponencial

1) Resolver as inequações exponenciais

a) $4^x > \frac{1}{4} \Rightarrow S = (-1, +\infty)$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} \Rightarrow S = (-\infty, 1)$

c) $3^{x^2} > 3^x \Rightarrow S = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

2) Determinar o domínio da função definida por $y = \sqrt{3^{x+2} - 3^{-x}}$

Solução: $Dom(y) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -1\}$

Exercícios Resolvidos Função Logarítmica

4) Resolver as inequações logarítmicas

a) $\log_3(x^2 - x + 3) > 2 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} / x < -2 \text{ ou } x > 3\}$

b) $0 < \log_2(2x - 1) \leq 1 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} / 1 < x < \frac{3}{2}\}$

c) $\log_{\frac{1}{2}}(x+2) + \log_{\frac{1}{2}}(x-3) > 2 \Rightarrow S = \left\{x \in \mathbb{R} / 3 < x < \frac{1+\sqrt{26}}{2}\right\}$

Exercícios de Fixação do Capítulo 5

1) Sendo $f(x) = 3x - 1 \Rightarrow f(0) = -1; f(-\frac{1}{3}) = -2$

c) para que valor de x , temos $f(x) = 0$. Solução: $x = \frac{1}{3}$

d) Sendo $f(x) = ax + b$ uma função afim e sendo p e q números reais e distintos, calcular $f(p), f(q)$ e mostrar que $\frac{f(p)-f(q)}{p-q} = a$

Solução: Basta substituir p e q na função (no lugar de x) e efetuar os cálculos

2) Resolver as inequações

a) $(2x-3)(x-1) > 0 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} / x < 1 \text{ ou } x > \frac{3}{2}\}$

b) $(x-2)(3x+1) < 0 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} / -\frac{1}{3} < x < 2\}$

c) $x^2 \geq 5 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} / x \leq -\sqrt{5} \text{ ou } x \geq \sqrt{5}\}$

d) $x^2 + 1 < 2x^2 - 3 \leq -5x \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} / -3 \leq x < -2\}$

e) $0 < x^2 + x + 1 < 1 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} / -1 < x < 0\}$

f) $4 < x^2 - 12 \leq 4x \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} / 4 < x \leq 6\}$

g) $2x+1 \leq x^2 < 2x+3 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} / -1 < x \leq 1 - \sqrt{2} \text{ ou } 1 + \sqrt{2} \leq x < 3\}$

h) $-1 \leq x^2 - 3 \leq 1 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x \leq -\sqrt{2} \text{ ou } \sqrt{2} \leq x \leq 2\}$

i) $(x^2 + 4x + 3)(2x + 5) < 0 \Rightarrow S = (-\infty, -1) \cup (-\frac{5}{2}, -3)$

j) $|2x^2 + 3x + 3| \leq 3 \Rightarrow S = [-\frac{3}{2}, 0]$

k) $x^3 - x^2 - x - 2 > 0 \Rightarrow S = (2, +\infty)$

3) Resolver as inequações quocientes

a) $\frac{x^2+x-6}{2x^2+3x-2} \geq 0 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} / x \leq -3 \text{ ou } -2 < x < \frac{1}{2} \text{ ou } x \geq 2\}$

b) $\frac{(x-2)^4}{x^2-2x-15} \leq 0 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} / -3 < x < 5\}$

c) $\frac{-6x^2-x+2}{6x^2-5x+1} > 0 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} / -\frac{2}{3} < x < \frac{1}{3}\}$

- d) $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} \leq 0 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} / -1 < x < 1\}$
e) $\frac{x-1}{x-2} < \frac{x-3}{x-4} \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} / x < 2 \text{ ou } x > 4\}$
f) $\frac{2}{2x+3} \geq \frac{2}{x-5} \Rightarrow S = (-\infty, -8] \cup (-\frac{3}{2}, 5)$
g) $\frac{x-2}{3x+5} \leq 4 \Rightarrow S = (-\infty, -2] \cup (-\frac{5}{3}, +\infty)$
h) $\frac{x+1}{2x-3} > 2 \Rightarrow S = (\frac{3}{2}, \frac{7}{3})$
i) $\frac{x+1}{2-x} < \frac{x}{3+x} \Rightarrow S = (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$

4) Resolver as equações exponenciais

- a) $2^{x-3} + 2^{x-1} + 2^x = 52 \Rightarrow x = 5$
b) $\left(\sqrt[3]{2^{x+4}}\right)^{x-2} = 1 \Rightarrow x = -4 \text{ e } x = 2$

5) Resolver as inequações exponenciais

- a) $(\sqrt{3})^{2x+4} > (\sqrt{3})^{3x} \Rightarrow S = (-\infty, 4)$
b) $5^{x^2-8x-20} < 1 \Rightarrow S = (-2, 10)$
c) $(0, 3)^{4x^2-2x-2} \geq (0, 3)^{2x-3} \Rightarrow S = \{\frac{1}{2}\}$

6) Resolver as inequações logarítmicas

- a) $\log_2(x-2) - \log_{\frac{1}{2}}(x-3) < 1 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} / 3 < x < 4\}$
b) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - \frac{3}{2}) \geq 1 \Rightarrow S = \left\{x \in \mathbb{R} / -\sqrt{2} \leq x < -\sqrt{\frac{3}{2}} \text{ ou } \sqrt{\frac{3}{2}} < x < \sqrt{2}\right\}$
c) $x^{(\log_a x)+1} > a^2 x$ para $0 < a < 1 \Rightarrow S = \left\{x \in \mathbb{R} / a^{-\sqrt{2}} < x < a^{\sqrt{2}}\right\}$

d) Dar o domínio da função $f(x) = \sqrt{\log(x^2 - 2x)}$

Solução: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 1 - \sqrt{2} \text{ ou } x \geq 1 + \sqrt{2}\}$

7) Se uma bola é atirada para cima com uma velocidade inicial de 32 m/s , então, após t segundos, a distância s acima do ponto de partida, em metros, é dada por $s = 32t - 16t^2$. Em que instante a bola estará no ponto mais alto e qual será esta altura? Faça um esboço do gráfico da equação. Solução $t = 1\text{s}$ e $s = 16\text{m}$

8) A energia potencial elástica W armazenada numa mola esticada é dada pela expressão $W = \frac{1}{2}kx^2$ onde k é a constante elástica da mola e x é o quanto a mola está alongada

Para uma constante elástica igual a 10 unidades

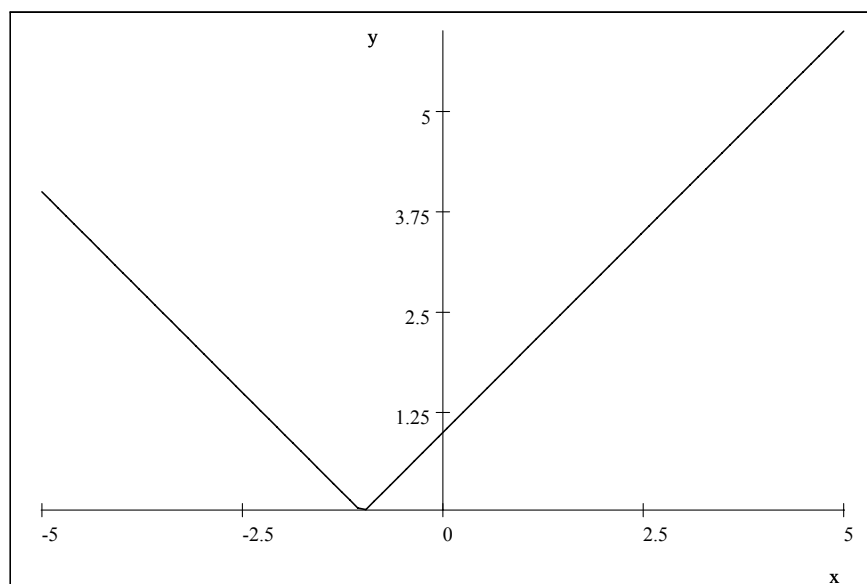
a) Qual o número que exprime o valor de sua energia potencial W , para um alongamento de 2 unidades

b) De quanto está esticada a mola quando sua energia potencial é de 80 unidades

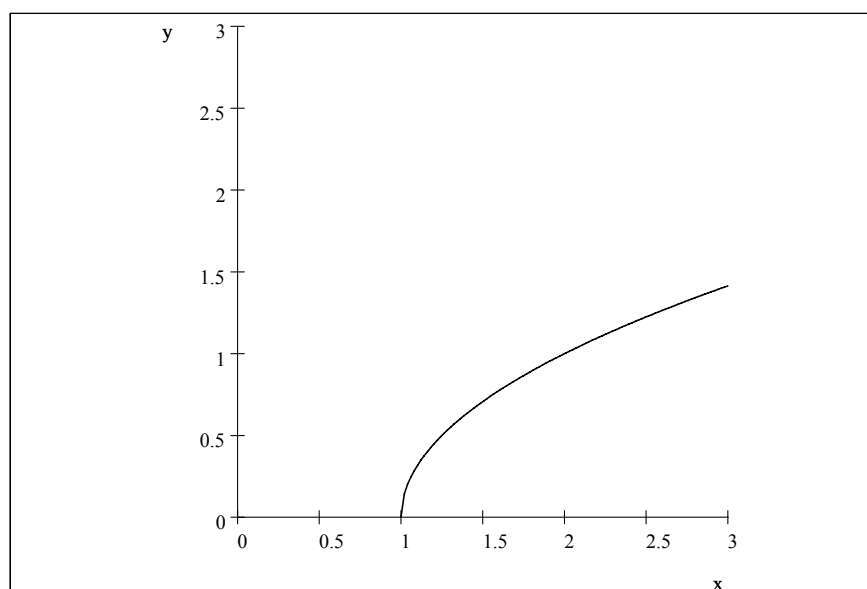
Solução a) $W = 20$ b) $x = 4$ unidades.

9) Desenhar o gráfico das seguintes funções

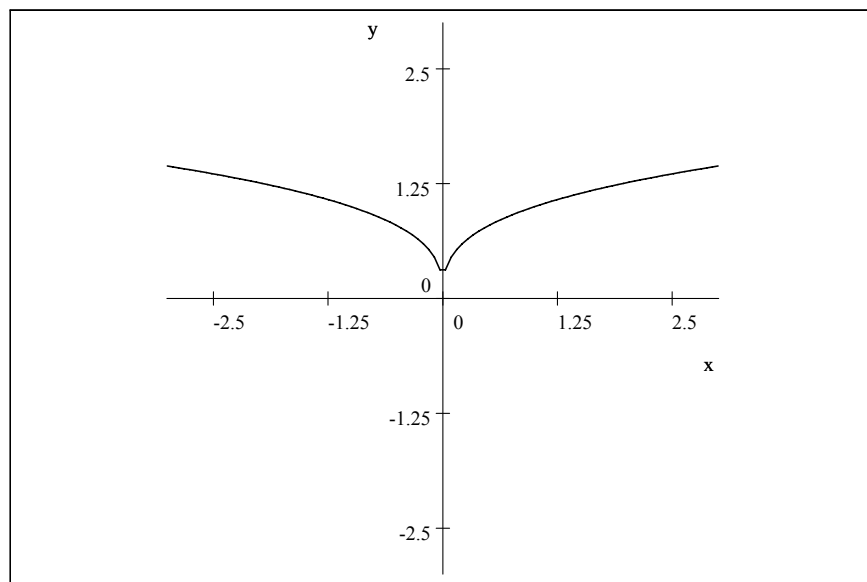
- i) $f(x) = |x+1|$



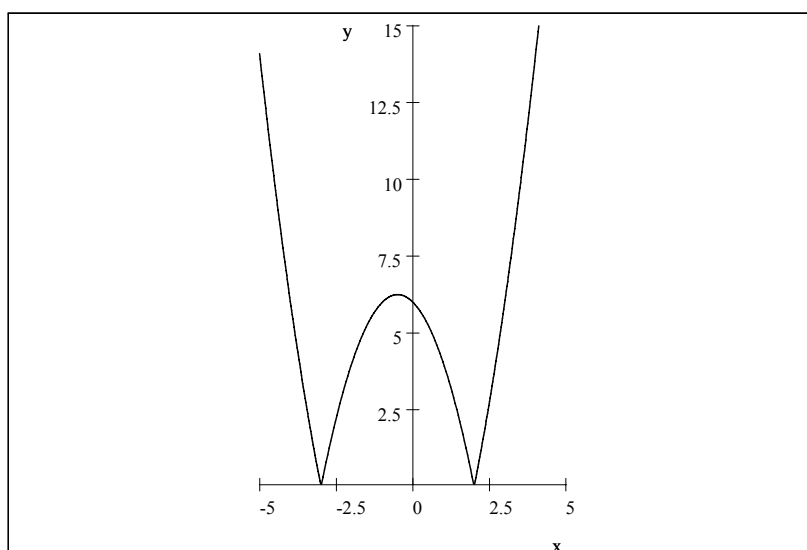
ii) $f(x) = \sqrt{x-1}$



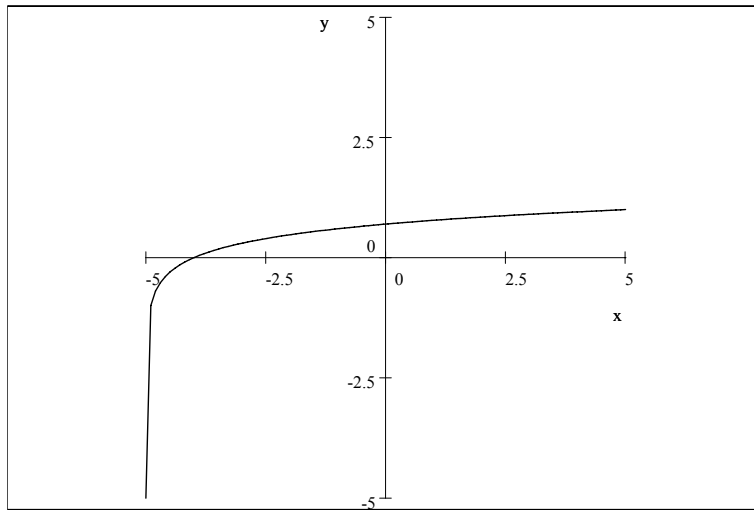
iii) $f(x) = |\sqrt[3]{x}|$



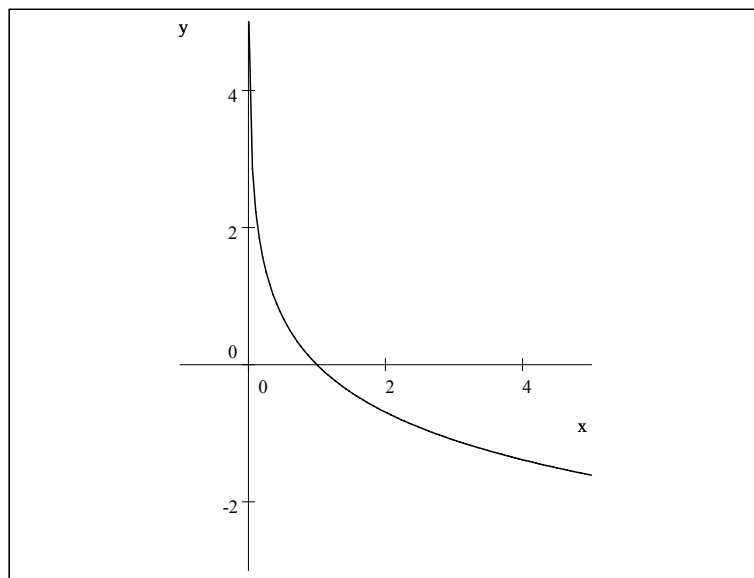
iv) $f(x) = |x^2 + x - 6|$



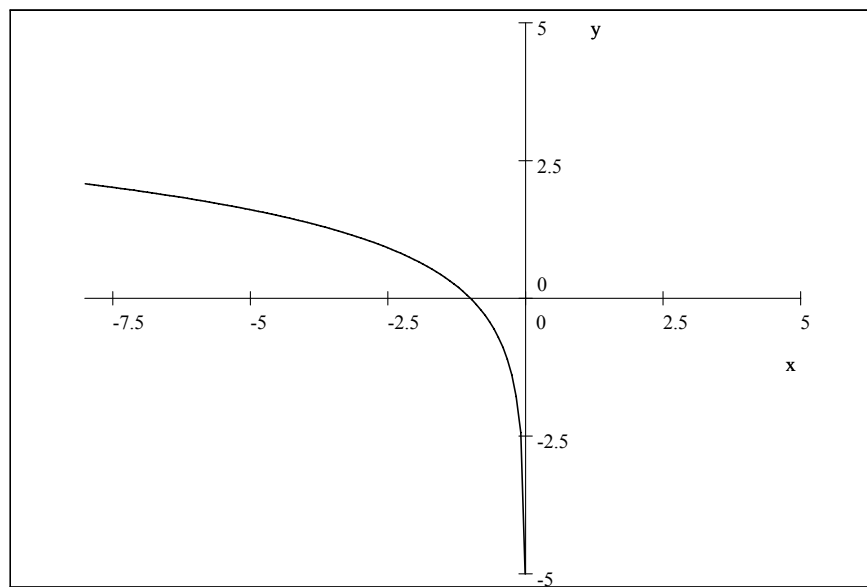
- 10) Especifique o domínio e faça um esboço do gráfico de cada uma das funções:
- a) $y = \log_{10}(x + 5) \Rightarrow \text{Dom}(y) = \{x \in \mathbb{R} / x > -5\} = (-5, +\infty]$



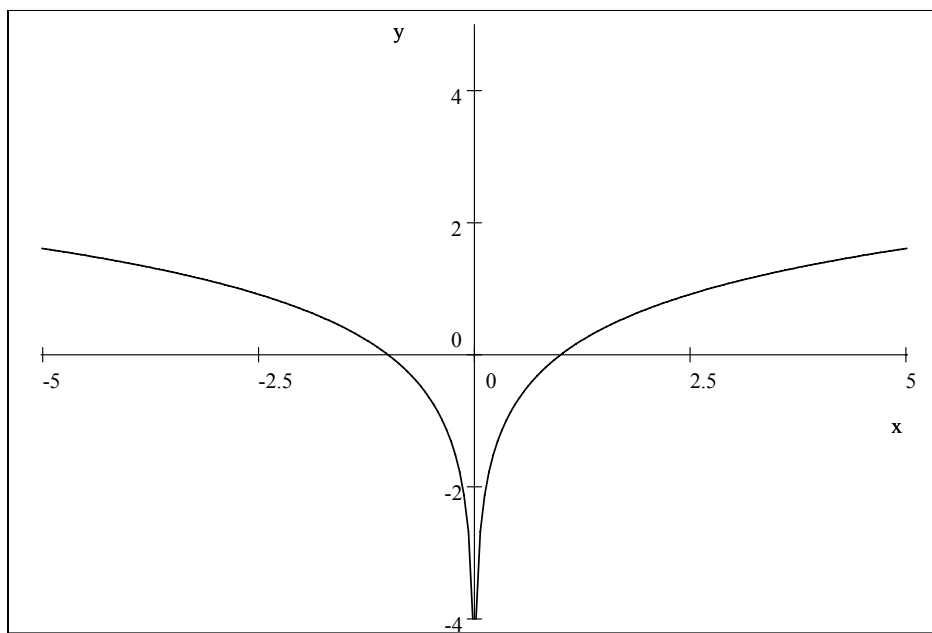
b) $y = -\ln x \Rightarrow \text{Dom}(y) = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\} = (0, +\infty]$



c) $y = \ln(-x) \Rightarrow \text{Dom}(y) = \{x \in \mathbb{R} / x < 0\} = (-\infty, 0)$
 $y = \ln(-x)$



d) $y = \ln|x| \Rightarrow \text{Dom}(y) = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$



11) Resolva cada equação em x

a) $\ln x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{e}$

$$\text{b) } \ln(2x - 1) = 3 \Rightarrow x = \frac{e^3 + 1}{2}$$

$$\text{c) } e^{3x-4} = 2 \Rightarrow x = \frac{\ln 2 + 4}{3}$$

$$\text{d) } e^{ax} = Ce^{bx}, \text{ onde } C \text{ é uma constante e } a \neq b \Rightarrow x = \frac{\ln C}{a-b}$$

$$\text{e) } \ln(\ln x) = 1 \Rightarrow x = e^e$$

12) Se a população de bactérias começa com 100 e dobra a cada três horas, então o número de bactérias após t horas é $n = f(t) = 100 \cdot 2^{\frac{t}{3}}$

a) Encontre a função inversa e explique seu significado

b) Quando a população atingirá 50.000 bactérias?

Solução:

a) $t = f^{-1}(x) = \log_2 \left(\frac{x}{100} \right)^3$. A função $f^{-1}(x)$ indica o tempo necessário para que haja um crescimento de x bactérias.

b) Conforme item a) $t = f^{-1}(50000) = 26.89735$ hs

13) Após acionado o Flash de uma câmera, a bateria imediatamente começa a recarregar o capacitor do flash, o qual armazena uma carga elétrica dada por $Q(t) = Q_0(1 - e^{-\frac{t}{a}})$ (A capacidade máxima de carga é Q_0 , e t é medido em segundos.)

a) Encontre a função inversa e explique seu significado.

b) Quanto tempo levará para o capacitor recarregar 90% da capacidade se $a = 2$?

Solução:

a) $t = f^{-1}(q) = -\ln \left(1 - \frac{q}{Q_0} \right)^a$. A função inversa indica o tempo necessário, em segundos, para que o capacitor adquira uma carga q

b) Observe que 90% da carga quer dizer uma carga de $q = 0.9Q_0$. Conforme item a), $t = f^{-1}(0.9Q_0) = -\ln \left(1 - \frac{0.9Q_0}{Q_0} \right)^2$,

$$t = -\ln(0.1) = 2.302585 \text{ segundos.}$$

14) Se $f(x) = \ln x$ e $g(x) = x^2 - 9$, encontre as funções $f \circ g, g \circ f, f \circ f, g \circ g$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln(x^2 - 9)$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (\ln x)^2 - 9$$

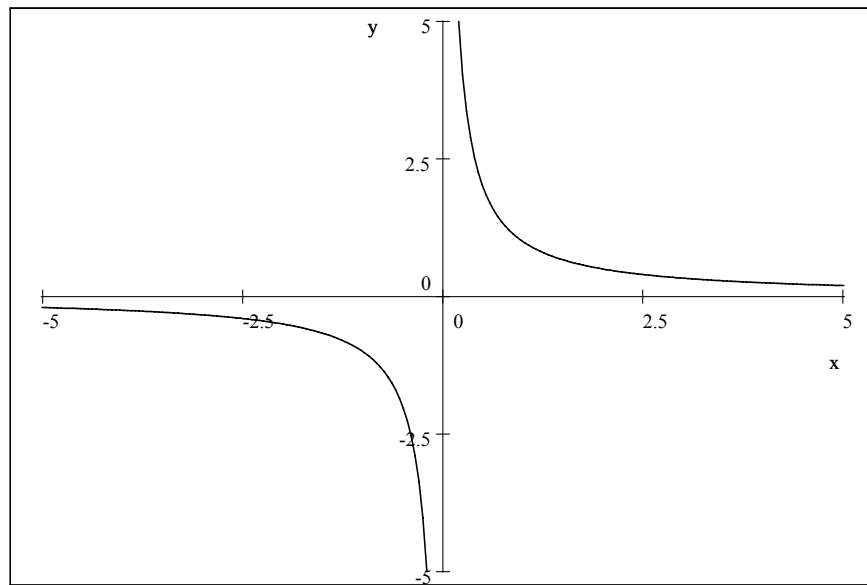
$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \ln(\ln x)$$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = (x^2 - 9)^2 - 9 = x^4 - 18x^2 + 72$$

15) Expresse a função $F(x) = \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ como uma composta de três funções.

Solução $F(x) = (f \circ g \circ h)(x)$, onde $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $g(x) = x^2 + x$ e $h(x) = \sqrt{x}$

16) Faça o gráfico da função $y = \frac{1}{x}$

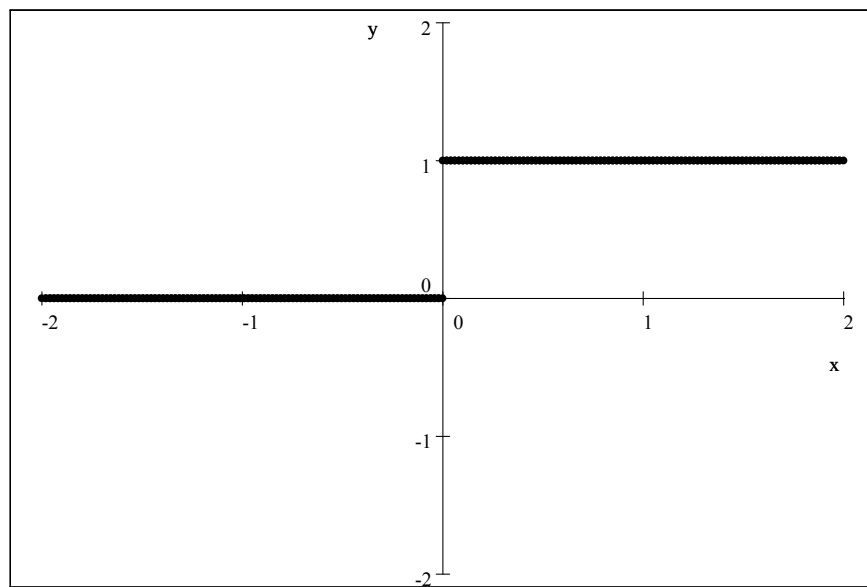


17) A função de Heaviside H é definida por $H(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 0 \\ 1, & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$. Essa função é usada no estudo de circuitos elétricos para representar o surgimento repentino de corrente elétrica, ou voltagem, quando uma chave é instantaneamente ligada:

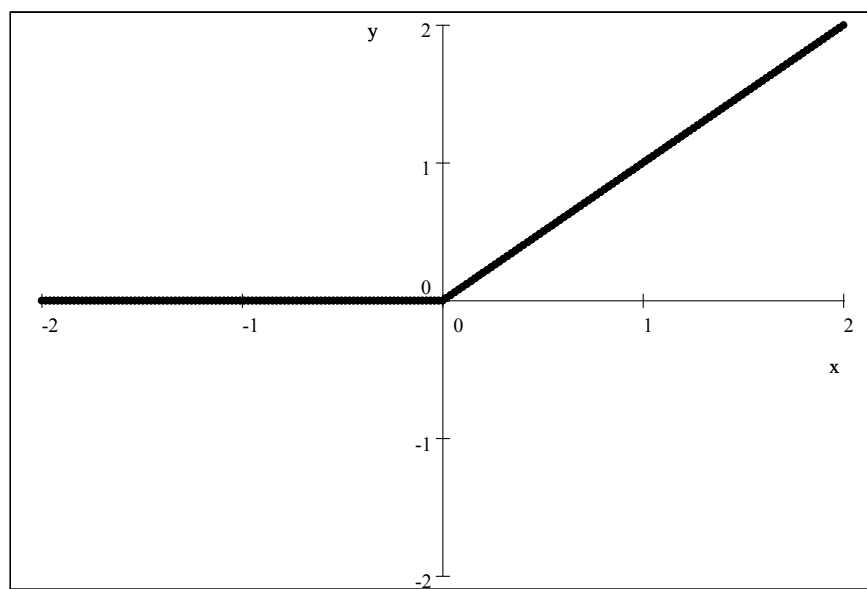
- Faça o gráfico da função de Heaviside
- Faça um esboço da função rampa $y = tH(t)$

Solução

a)



b)



9.6 Do Capítulo 6, Geometria Plana

Exercícios Resolvidos 1 do Capítulo 6

- 1) Encontre a equação reduzida da reta que passa pelos pontos $A(1, -1)$ e $B(-1, 5)$. Solução: $y = -3x + 2$
- 2) Trace a reta que passa pelos pontos $A(1, 1)$ e $B(-2, 2)$. Solução: $y = -\frac{x}{3} + \frac{4}{3}$
- 3) Obter a reta que s que passa por $P(3, -2)$ e é perpendicular à reta $r: 3x + 14y - 17 = 0$. Solução $14x - 3y - 48 = 0$.

Exercícios Resolvidos 2 do Capítulo 6

- 1) Calcular a distância entre os pontos $A(-3, 7)$ e $B(5, 1)$. Solução $d(A, B) = 10$
- 2) Determinar as coordenadas do ponto médio do segmento que une os pontos $A(1, 2)$ e $B(9, 14)$. Solução $M(5, 8)$

Exercícios Resolvidos 3 do Capítulo 3

- 1) Obter a equação da circunferência de centro $C(1, -2)$ que passa pelo ponto $P(4, 2)$. Solução $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$
- 2) Quais das equações abaixo representam uma circunferência:
 - a) $2x^2 + 2y^2 + xy - 1$. Solução: Não
 - b) $x^2 + y^2 + 2x + 3y + 4 = 0$. Solução: Circunferência imaginária
 - c) $2x^2 + 2y^2 - 3x - 3y + 2 = 0$. Solução: Sim
 - d) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = 0$. Solução: Um ponto
- 3) Representar graficamente os conjuntos:
 - a) $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 \leq 0\}$. Solução: A é o círculo de centro $C(1, 1)$ e raio 1
 - b) $B = \{(x, y) \mid x = 2 - \sqrt{9 - y^2}\}$. Solução: C é o arco da circunferência de centro $C(2, 0)$ e raio 3 onde figuram os pontos de abscissas $x \leq 2$.

Exercícios de Fixação do capítulo 6

- 1) Encontre a distância entre A e B e determine o ponto médio deste segmento de reta
 - a) $A(2, 5)$ e $B(1, -1)$. Solução: $d = 5, M = (\frac{1}{2}, 3)$
 - b) $A(7, 1)$ e $B(1, 9)$. Solução: $d = 10; M(4, 5)$
- 2) Prove que é isósceles o triângulo de vértices $V_1(5, -2), V_2(6, 5)$ e $V_3(2, 2)$. Sugestão: Calcular distâncias entre vértices e comparar
- 3) Prove que os pontos $P(0, -2), Q(-4, 8)$ e $R(3, 1)$ estão sobre um círculo de centro $C(-2, 3)$. Sugestão: Com um dos pontos e o centro encontre o raio.
- 6) Obter o ponto de interseção das retas $3x + 4y - 12 = 0$ e $2x - 4y + 7 = 0$. Solução: $P(1, \frac{9}{4})$
- 7) Mostrar que as retas $r: 2x + 3 = 0$ e $s: y - 11 = 0$ são perpendiculares. Solução $r \parallel y$ e $s \parallel x \Rightarrow r \perp s$
- 8) Calcular a distância entre as retas $r: 7x + 24y - 1 = 0$ e $s: 7x + 24y + 49 = 0$. Solução: $d = 2$
- 9) Encontre o centro e o raio de cada circunferência
 - a) $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 20 = 0$. Solução $C(-4, 3), r = \sqrt{5}$
 - b) $4x^2 + 4y^2 - 8x + 12y + 1 = 0$. Solução $C(1, -\frac{3}{2}), r = \sqrt{3}$
 - c) $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$. Solução $C(2, 0), r = 1$
 - d) $3x^2 + 3y^2 - 7y = 0$. Solução $C(0, \frac{7}{6}), r = \frac{7}{6}$
- 10) Obter a interseção das circunferências: $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ e $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 13 = 0$. Solução: $P(2, 1)$

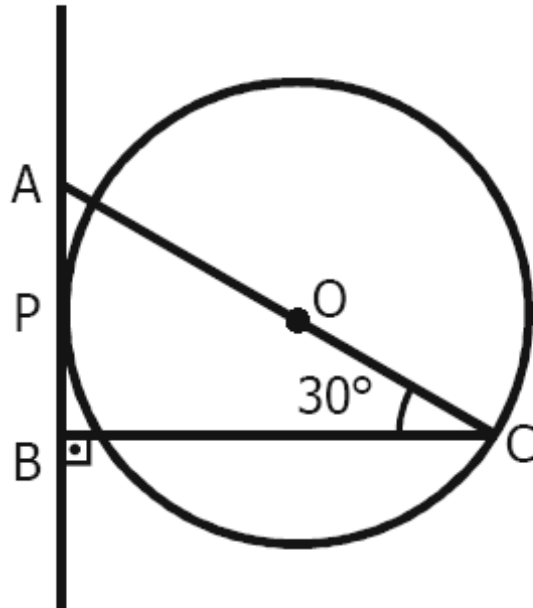


Figura 9.2:

11) Obter a equação da reta que passa pelas interseções das circunferências $x^2 + y^2 + 3x - y = 0$ e $3x^2 + 3y^2 + 2x + y = 0$. Solução: $7x - 4y = 0$.

9.7 Do Capítulo 7, Trigonometria

Exercício Resolvido

2) Na figura, a circunferência de centro O é tangente à reta AB no ponto P. Se $AC = 2$, determine o comprimento do raio da circunferência

♡RESOLVER ESTE PROBLEMA♡

2) Mostre que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°

Primeira sugestão

Segunda sugestão

9.8 Exercício Resolvido

Exercícios de Fixação do Capítulo 7

1) Expressar em radianos

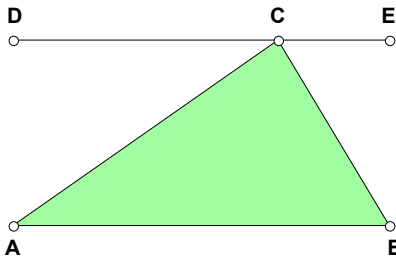


Figura 9.3:

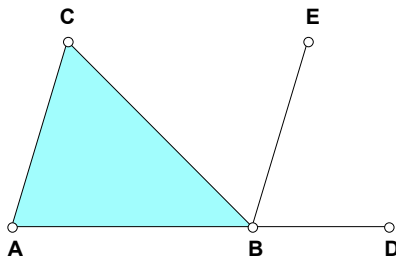
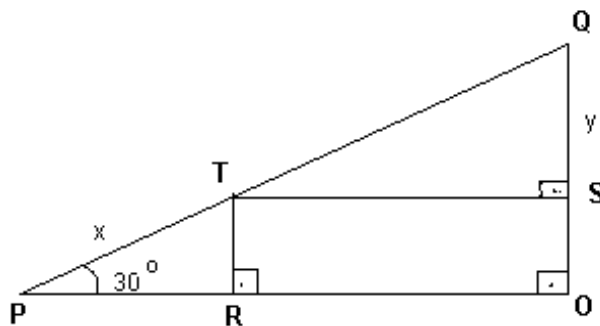


Figura 9.4:

- a) $36^\circ \Rightarrow \frac{\pi}{5}$ b) $135^\circ \Rightarrow \frac{3\pi}{4}$ c) $300^\circ \Rightarrow \frac{5\pi}{3}$
- 2) Expressar em graus
- a) $\frac{\pi}{6} \text{ rad} \Rightarrow 30^\circ$ b) $\frac{\pi}{4} \text{ rad} \Rightarrow 45^\circ$ c) $\frac{\pi}{3} \text{ rad} \Rightarrow 60^\circ$ d) $\frac{7\pi}{4} \text{ rad} \Rightarrow 315^\circ$
- 3) Quanto mede, em radianos,
- a) um arco de $22^\circ 30'$ $\Rightarrow \frac{\pi}{8} \text{ rad}$ b) um arco de $56^\circ 15'$ $\Rightarrow \frac{5\pi}{16} \text{ rad}$
- 4) Mostre que um arco de 1 rad mede aproximadamente 57°
- 5) Um móvel faz um percurso de meio quilômetro sobre uma circunferência de diâmetro 200 metros. Qual a medida do ângulo central correspondente ao percurso? Solução: 5 rad
- 6) Calcular o menor ângulo entre os ponteiros de um relógio nos seguintes instantes
- a) 10h 30min $\Rightarrow 135^\circ$ b) 2h 15 min $\Rightarrow 22^\circ$ c) 13h 35 min $\Rightarrow 162^\circ 30'$
- 7) Determine a fórmula para a área A de um setor circular em termos de seu raio e do comprimento de arco L . Solução $A = \frac{1}{2}Lr$
- 8) Determine a área lateral S de um cone circular reto de raio r e de geratriz L . Solução: $S = \pi rL$
- 9) Encontre os valores de x e y na figura abaixo:



- Dados: $PQ = 10m$, $TR = 2,3m$, $PT = x$, $QS = y$
- Solução: $x = 4,6m$ $y = 2,7m$
- 10) Um carro numa via plana inclinada de 20° em relação à horizontal quanto sobe verticalmente ao percorrer 1 km. Dado: $\sin 20 = 0,34$
- Solução: 340m
- 11) Se θ é um ângulo agudo, use identidades fundamentais para escrever a primeira expressão em função da segunda:
- a) $\cot \theta; \sin \theta \Rightarrow \cot \theta = \frac{\sqrt{1-\sin^2 \theta}}{\sin \theta}$
- b) $\sec \theta; \sin \theta \Rightarrow \sec \theta = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 \theta}}$
- c) $\tan \theta; \cos \theta \Rightarrow \tan \theta = \frac{\sqrt{1-\cos^2 \theta}}{\cos \theta}$
- d) $\csc \theta; \cos \theta \Rightarrow \csc \theta = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 \theta}}$
- e) $\tan \theta; \sec \theta \Rightarrow \tan \theta = \sqrt{\sec^2 \theta - 1}$

12) Fazendo a substituição trigonométrica $x = a \sin \theta$ para $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, escreva $\sqrt{a^2 - x^2}$ em termos de uma função trigonométrica de θ . Solução: $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos \theta$

13) Usando a substituição indicada simplifique os radicais:

Solução: Em caso de dúvida chame o professor

14) Determine os intervalos de crescimento e decrescimento para a função $f(x) = \cos x$ definida para $x \in [0, 2\pi]$

15) $\frac{1}{1+\sin^2 x} + \frac{1}{1+\cos^2 x} + \frac{1}{1+\sec^2 x} + \frac{1}{1+\cos \sec^2 x}$ é igual a: 2

16) Os valores que m pode assumir para que exista um arco x satisfazendo a igualdade $\sin x = m - 4$ são: $3 \leq m \leq 5$

17) A expressão $\cos^2 x + \cos^2 x \tan^2 x + \tan^2 x$ é igual a: $\sec^2 x$

18) Determine as soluções das equações em $[0, 2\pi)$

a) $2 \sin^2 u = 1 - \sin u \Rightarrow u = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$

b) $\cos \lambda - \sin \lambda = 1 \Rightarrow \lambda = 0, \frac{3\pi}{2}$

c) $2 \tan \varpi - \sec^2 \varpi = 0 \Rightarrow \varpi = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

d) $\sin x + \cos x \cot x = \csc x \Rightarrow x \in \mathbb{R}$

e) $\sin 2t + \sin t = 0 \Rightarrow t = 0, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}$

f) $\cos \mu + \cos 2\mu = 0 \Rightarrow \mu = \pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

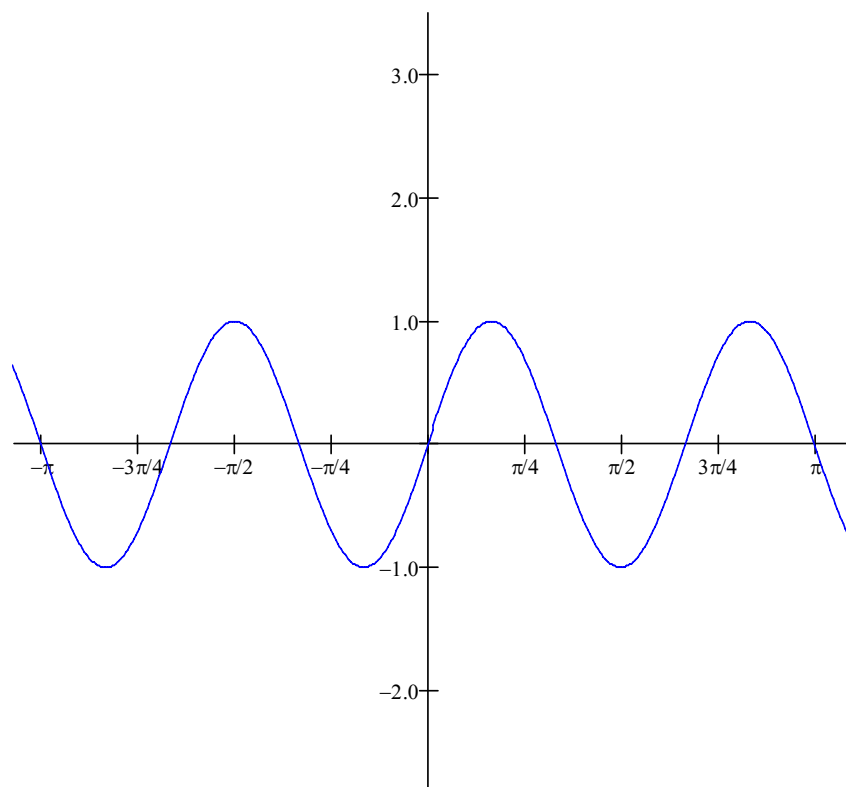
g) $\tan 2x = \tan x \Rightarrow x = 0$ e $x = \pi$

h) $\sin \frac{u}{2} + \cos u = 1 \Rightarrow u = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$.

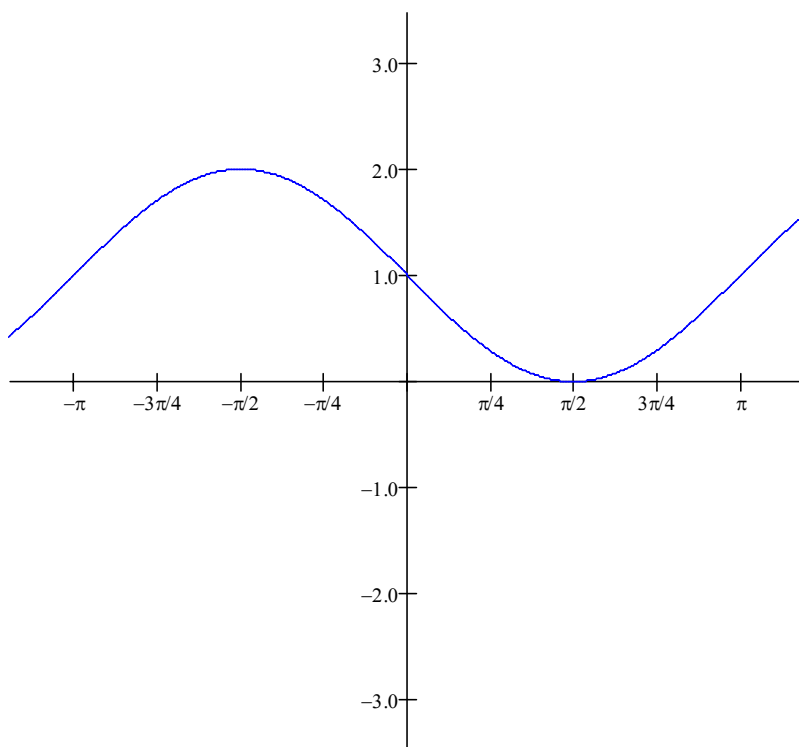
19) Sugestão: Use a lei dos cossenos ou calcule diretamente usando relações trigonométricas

20) Desenhe o gráfico das seguintes funções:

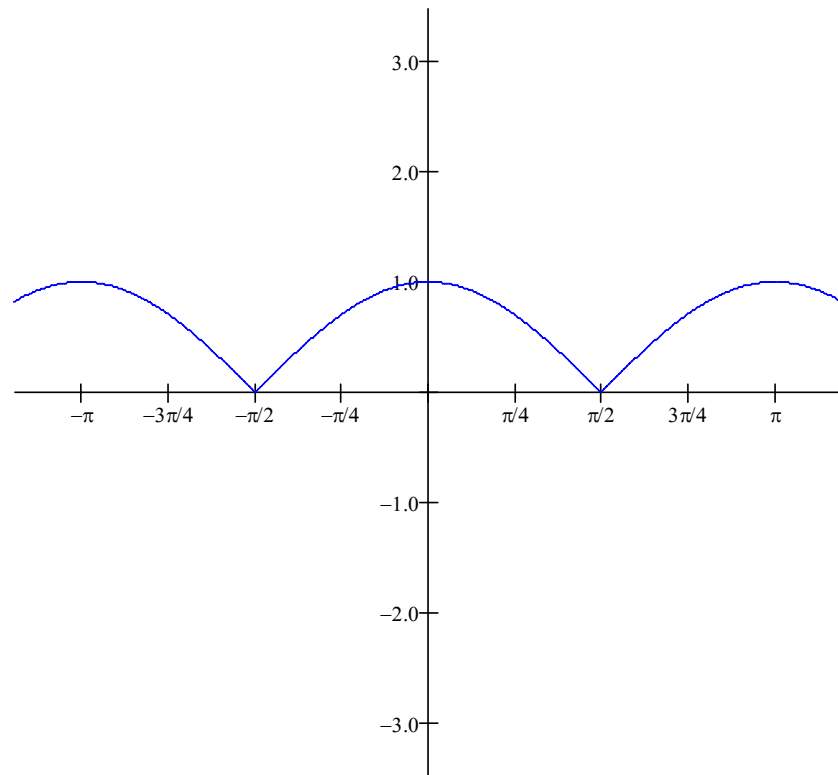
a) $y = \sin(3x)$



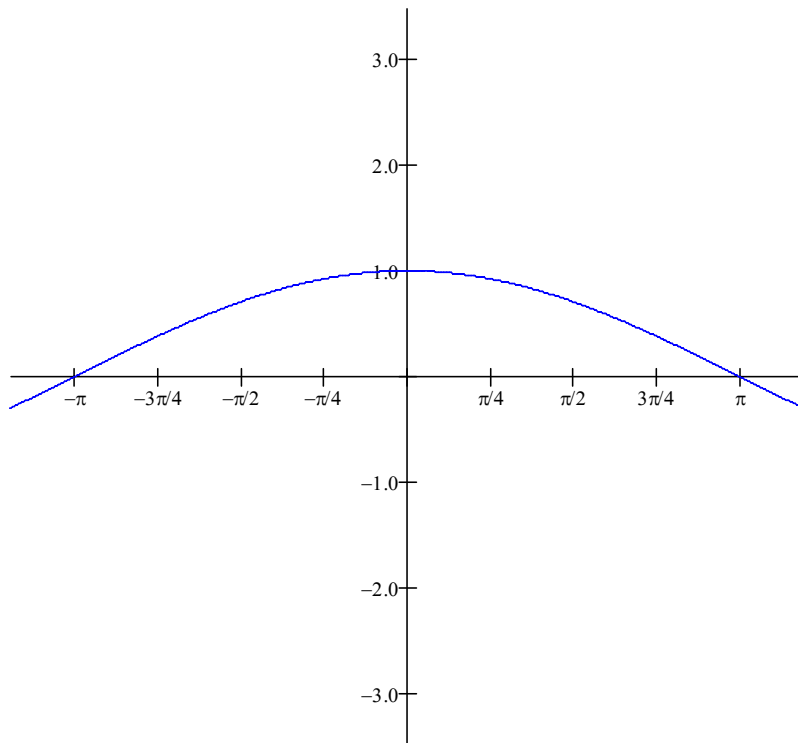
b) $y = 1 - \sin x$



c) $y = |\cos x|$



d) $y = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$



9.9 Do Capítulo 8, Revisão Geral

Lista de Exercícios- Matemática Básica

1. Resolva as inequações em $\mathbb{R}$

(a) $1 - x - 2x^2 \geq 0 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x \leq \frac{1}{2}\}$

(b) $2x - 5 < \frac{1}{3} + \frac{3x}{4} + \frac{1-x}{3} \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} / x < \frac{68}{19}\}$

(c) $\frac{x+1}{2-x} < \frac{x}{3+x} \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} / x < -3 \text{ ou } x > 2\}$

(d) $|5 - 6x| \geq 9 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} / x \leq -\frac{2}{3} \text{ ou } x \geq \frac{7}{3}\}$

(e) $\left| \frac{x - \frac{1}{2}}{x + \frac{1}{2}} \right| < 1 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$

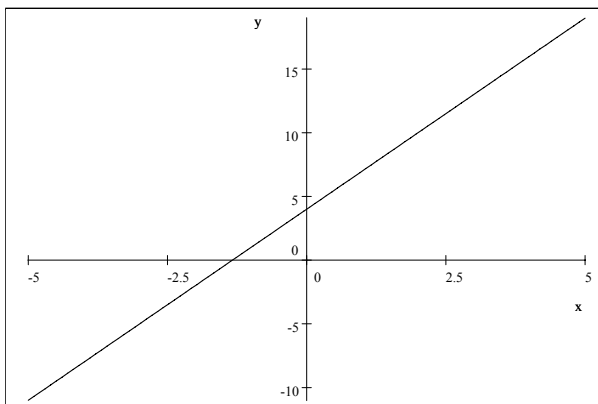
(f) $\frac{(x-4)^6}{(x-2)(x+1)} > 0 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} / x > 2 \text{ ou } x < -1\} - \{4\}$

(g) $\frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 + x - 2} < 0 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} / x > -2\}$

2. Resolva as equações em $\mathbb{R}$

(a) $|5x - 3| = 12 \Rightarrow x = 3 \text{ e } x = -\frac{9}{5}$

- (b) $(x-3)(x+1)(x+4) = 0 \Rightarrow x = 3, x = -1 \text{ e } x = -4$
- (c) $\left| \frac{3x+8}{2x-3} \right| = 4 \Rightarrow x = 4 \text{ e } x = \frac{4}{11}$
- (d) $2x - 7 = |x| + 1 \Rightarrow x = 8$
3. Dados os conjuntos: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -10 < x < 8\}$, $B = (-3, 5]$ e $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$ determine:
- (a) $A \cup B \cup C = (-10, +\infty)$
- (b) $B \cap (A \cup C) = (-3, 5]$
- (c) $A \cup (B \cap C) = (-10, 8)$
- (d) $A - B = (-10, -3] \cup (5, 8)$
- (e) $C - (A \cap C) = [8, +\infty)$
4. O consumo C de água em m^3 , pela população de uma cidade em função do tempo t , em segundos, é dado pela equação $C = 2000t$.
- (a) Qual o consumo de água dessa população em 10 segundos? $C = 2 \cdot 10^4 m^3$
- (b) Qual é o consumo de água dessa população em 10 horas? $C = 72 \cdot 10^6 m^3$
- (c) Em quantos segundos essa população consome $48.000 m^3$ de água?
 $t = 24s$
5. Dada a função $f(x) = 3x + 4$ determine:
- (a) $f(-1) = 1$
- (b) o valor de x tal que $f(x) = 10 \Rightarrow x = 2$
- (c) Faça a representação gráfica dessa função



6. Determine os zeros das funções reais:

(a) $f(x) = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow x = 1; x = 3$

(b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x \Rightarrow x = 0; x = 2; x = 4$

(c) $y = \frac{x+1}{2} - \frac{5x+3}{4} \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$

7. Determine o domínio das funções:

(a) $f(x) = \frac{x+1}{x-2} \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{2\}$

(b) $g(x) = (x+1)\sqrt{x-4} \Rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 4\} = [4, +\infty)$

(c) $h(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-3} \Rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -2 \text{ e } x \neq 3\}$

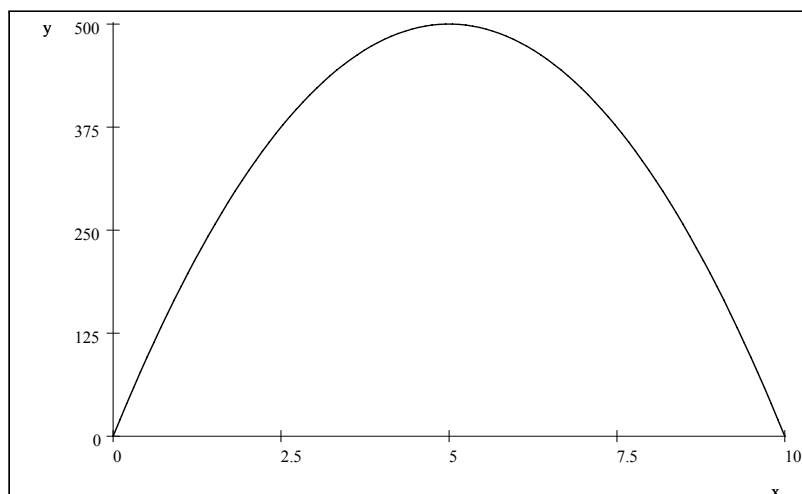
(d) $l(x) = \ln(x+5) \Rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} / x > -5\} = (-5, +\infty)$

8. Sabe-se que, sob um certo ângulo de tiro, a altura atingida por uma bala, em metros, em função do tempo, em segundos, é dada por $h(t) = -20t^2 + 200t$.

(a) Qual a altura máxima atingida pela bala? $h = 500m$

(b) Em quanto tempo, após o tiro, a bala atinge a altura máxima? $t = 5s$

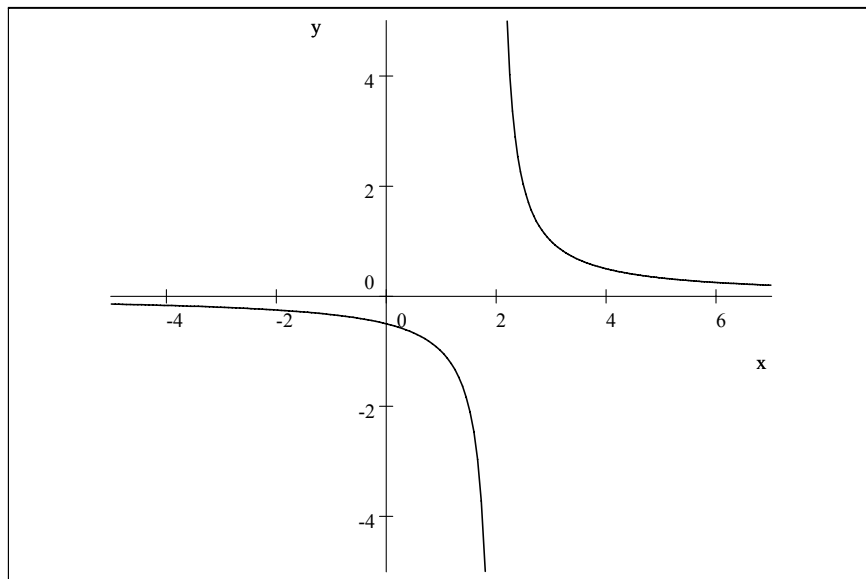
(c) faça uma representação gráfica dessa situação.



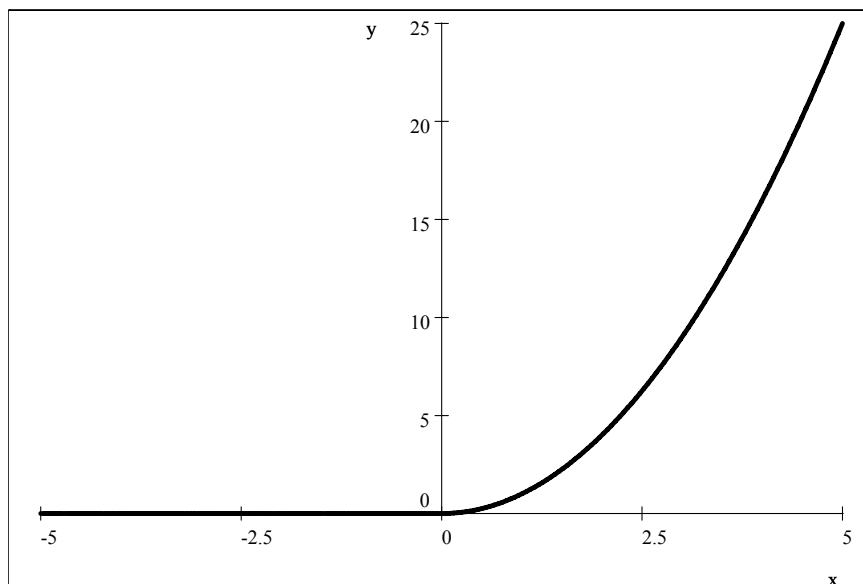
9. Em uma pista de atletismo circular com quatro raias, a medida do raio da circunferência até o meio da primeira raia (onde o atleta corre) é 100 metros e a distância entre cada raia é de 2 metros. Se todos os atletas corressem até completar uma volta inteira, quantos metros cada um dos atletas correria? $A_1 = 2\pi 100m$, $A_2 = 2\pi 102m$, $A_3 = 2\pi 104m$, $A_4 = 2\pi 106m$

10. Um engenheiro deve medir a largura de um rio. Para isso, fixa um ponto A na margem em que se encontra e um ponto B na margem oposta. A seguir desloca-se 40m perpendicularmente à reta AB até o ponto C e mede o ângulo $\widehat{ACB}$, obtendo 44° . Qual é a largura do rio? (dados: $\sin 44 = 0,69$, $\cos 44 = 0,71$). Solução: $l = 38,87m$
11. Calcule o valor da expressão: $E = \frac{\sin(\frac{11\pi}{2}) - \sin(\frac{9\pi}{2})}{\cos 48\pi - \cos 33\pi} = -1$
12. Resolver a equação $\sec^2 x + \tan x = 1$ para $0 \leq x \leq 2\pi \Rightarrow x = 0, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{7\pi}{4}$.
13. Determine o valor de x sabendo que $(\log_x b)(\log_b c)(\log_c d)(\log_d 729) = 6$. Resposta $x = 3$
14. Resolva o sistema de equações $\begin{cases} 2\log_2 x + \log_2 y = 5 \\ \log_2 x - 2\log_2 y = -1 \end{cases}$. Resposta: $x^{\frac{2}{5}}$ e $y = 2^{\frac{7}{5}}$
15. Determine o conjunto solução do sistema de equações $\begin{cases} 2^{2x+y} = 4 \\ 2^{x-y} = 2^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$. Resposta: $x = \frac{1}{2}$ e $y = 1$
16. Determinar a solução da equação exponencial: $5^{x+2} - 95^x = 2^{x+9} + 1132^x$. Resposta: $x = 4$
17. Determine a equação da reta que é tangente à parábola de equação $y = 2x^2 + 3$ e que é paralela à reta de equação $y = 8x + 3$. Resposta: $y = 8x - 5$
18. Para que valores de a e b a parábola $y = ax^2 + b$ tangencia a reta $y = x$. Resposta: $ab = \frac{1}{4}$.
19. Resolva cada equação em x
- $\ln x + \ln x^2 = -1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{e}$
 - $\ln(2x - 1) - \ln(\frac{x+2}{e^3}) = 3 \Rightarrow x = 3$
 - $e^{3x-2} = 4 \Rightarrow x = \frac{2+\ln 4}{3}$
 - $e^{ax} = Ce^{bx}$, onde C é uma constante e $a \neq b \Rightarrow x = \frac{\ln C}{a-b}$
 - $\ln(\ln(x^2)) = 1 \Rightarrow x = \sqrt{e^{(e^2)}}$
20. Se a população de bactérias começa com 200 e dobra a cada 4 horas, então o número de bactérias após t horas é $n = f(t) = 200 \cdot 2^{\frac{t}{4}}$:
- Encontre a função inversa e explique seu significado. A função inversa é $f^{-1}(x) = \log_2(\frac{x}{200})^4$, ela indica o tempo necessário para se ter x bactérias
 - Quando a população atingirá 200.000 bactérias? Solução: $t = \log_2 1000^4$

21. Após acionado o Flash de uma câmera, a bateria imediatamente começa a recarregar o capacitor do flash, o qual armazena uma carga elétrica dada por $Q(t) = 10(1 - e^{-\frac{t}{4}})$
- (a) Encontre a função inversa e explique seu significado.
- (b) Quanto tempo levará para o capacitor recarregar 50% da sua capacidade?
22. Se $f(x) = \ln x$ e $g(x) = x$, encontre as funções $f \circ g, g \circ f, f \circ f, g \circ g$.
23. Expresse a função $F(x) = \frac{1}{\sqrt{x+e^x}}$ como uma composta de três funções.
 Solução: Considere $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = x + e^x \Rightarrow F(x) = (f \circ g \circ h)(x)$
24. Faça o gráfico da função $y = \frac{1}{x-2}$



25. A função de Heaviside H é definida por $H(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 0 \\ 1, & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$. Essa função é usada no estudo de circuitos elétricos para representar o surgimento repentino de corrente elétrica, ou voltagem, quando uma chave é instantaneamente ligada:
- (a) Faça o gráfico $g(x) = |H(x)|$. Solução $g(x) = |H(x)| = H(x)$ e veja Ex 17 da lista Exercícios de Fixação do Capítulo 5
- (b) Faça um esboço da função $y = t^2 H(t)$



26. Mostre que a função $f(x) = \cos(x)$ é uma função par e que $g(x) = \sin(x)$ é uma função ímpar.

27. Solução:

$$\begin{aligned}\cos(-x) &= \cos(0 - x) = \cos 0 \cos x + \sin 0 \sin x = \cos x \Rightarrow f \text{ é par}; \\ \sin(-x) &= \sin(0 - x) = \cos x \sin 0 - \cos 0 \sin x = -\sin x \Rightarrow g \text{ é ímpar}.\end{aligned}$$

28. Mostre que $h(x) = \tan x$ é uma função ímpar. Solução $\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$

29. Dada uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ determine duas funções $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ onde g é par e h é ímpar tais que $f(x) = g(x) + h(x)$.

Solução:

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{e} \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

30. Se f é uma função par e g é uma função ímpar o que podemos dizer a respeito das funções

- (a) $l(x) = f(x) + g(x) \Rightarrow$ nada se pode afirmar sobre a paridade de l
- (b) $h(x) = (f \circ g)(x) \Rightarrow h$ é uma função par
- (c) $m(x) = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow h$ é uma função ímpar
- (d) $v(x) = |f(x)| |g(x)| \Rightarrow h$ é uma função par