# 1 Introdução

Antes foi estudado a geometria, e com o enfoque no plano, por isso Geometria Plana, agora será a Geometria com o enfoque no espaço. E o que é o espaço?

Pelo conceito expresso, observa-se que vivemos em um ambiente tridimensional. Basta então conhecer as três direções para identificar a posição relativa que ocupamos.

Quando afirmamos que vamos andar para frente, para o lado e para cima, deve-se quantificar e identificar o *quanto* iremos nos deslocar nestas direções, logo se necessita conhecer uma *origem* para o *sistema* e identificar este ponto como ( 0, 0,0 ), pois se espera que ele esteja localizado a uma distância num ponto de referência para todos os outros pontos.

O sistema tridimensional é o conjunto de todos os *ternos ordenados* (x,y,z), sendo que a ordem não pode ser mudada sob pena de nos deslocarmos para outro lugar. A palavra cartesiano se deve a René Descartes, conhecido como *cartesius*. Onde x recebe o nome de *abscissa*, y o nome de *ordenada* e z o nome de *cota*.

Exemplificando, se um indivíduo está no centro da cidade em uma posição O =(0,0,0) e quer andar para frente 3 quadras, depois andar para o lado 5 quadras e depois subir até o 10º andar de um prédio a posição final do mesmo após o percurso será o ponto P = ( 3,5,10 ) e podemos observar que as unidades não são necessariamente as mesmas. Se este mesmo indivíduo se deslocasse para a posição final P = ( 3,10,5 ), certamente chegaria a um lugar diferente.

# 2 Elementos de Geometria Espacial

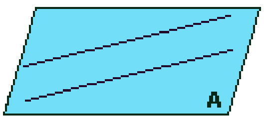
A Geometria espacial (euclidiana) funciona como uma ampliação da Geometria plana (euclidiana) e trata dos métodos apropriados para o estudo de objetos espaciais assim como a relação entre esses elementos. Os objetos primitivos do ponto de vista espacial são: pontos, retas, segmentos de retas, planos, curvas, ângulos e superfícies. Os principais tipos de cálculos que podemos realizar são: comprimentos de curvas, áreas de superfícies e volumes de regiões sólidas. Tomaremos *ponto*, *reta* e *plano* como conceitos primitivos, os quais serão aceitos sem definição.

## 2.1 Ponto, Plano, reta e ângulo

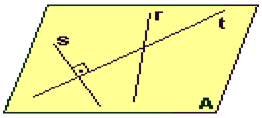
Um plano é um subconjunto do espaço $R^3$ de tal modo que quaisquer dois pontos desse conjunto, podem ser ligados por um segmento de reta inteiramente contido no conjunto.

Duas retas (segmentos de reta) no espaço $R^3$ podem ser: paralelas, concorrentes ou reversas.

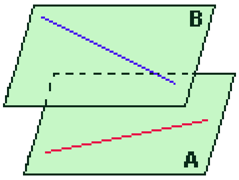
Retas paralelas: Duas retas são paralelas se elas não possuem interseção e estão em um mesmo plano.



Retas concorrentes: Duas retas são concorrentes se elas têm um ponto em comum. As retas perpendiculares são retas concorrentes que formam entre si um ângulo reto.




Retas reversas: Duas retas são ditas reversas quando uma não tem interseção com a outra e elas não são paralelas. Isto significa que elas estão em planos diferentes. Pode-se pensar de uma reta *r* desenhada no chão de uma casa e uma reta *s*, não paralela a *r*, desenhada no teto dessa mesma casa.




- **Posições de Pontos, Retas e Planos**

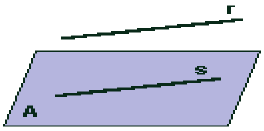
Um plano no espaço $R^3$ pode ser determinado por qualquer uma das situações:

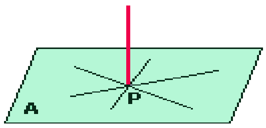
1. Três pontos não colineares (não pertencentes à mesma reta).
2. Um ponto e uma reta ou um segmento de reta que não contém o ponto.
3. Um ponto e um segmento de reta que não contém o ponto.
4. Duas retas paralelas que não se sobrepõe.
5. Dois segmentos de reta paralelos que não se sobrepõe.
6. Duas retas concorrentes.
7. Dois segmentos de reta concorrentes.

- **Posições de Retas e Planos**

Há duas relações importantes, relacionando uma reta e um plano no espaço $R^3$.

Reta paralela a um plano: Uma reta *r* é paralela a um plano no espaço $R^3$, se existe uma reta *s* inteiramente contida no plano que é paralela à reta dada.

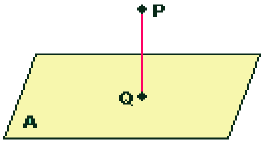





Reta perpendicular a um plano: Uma reta é perpendicular a um plano no espaço $R^3$, se ela intersecta o plano em um ponto P e todo segmento de reta contido no plano que tem P como uma de suas extremidades é perpendicular à reta.

- **Distância de um ponto a um plano**

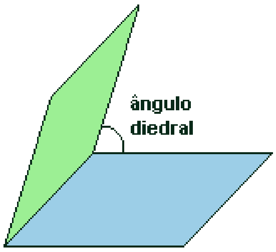
Seja P um ponto localizado fora de um plano. A distância do ponto ao plano é a medida do segmento de reta perpendicular ao plano em que uma extremidade é o ponto P e a outra extremidade é o ponto que é a interseção entre o plano e o segmento.




Se o ponto P estiver no plano, a distância é nula.

- **Posições entre planos**

1. Planos concorrentes no espaço $R^3$ são planos cuja interseção é uma reta.
2. Planos paralelos no espaço $R^3$ são planos que não tem interseção.
3. Diedro: Quando dois planos são concorrentes, dizemos que tais planos formam um *diedro*.

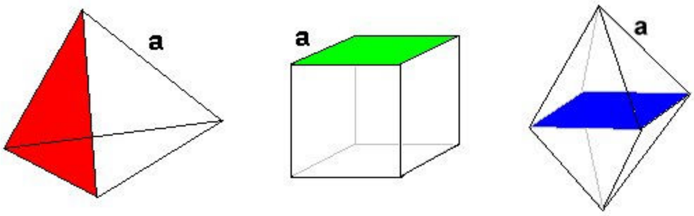



4. Ângulo diedral: É ângulo formado por dois planos concorrentes. Para obter o ângulo diedral, basta tomar o ângulo formado por quaisquer duas retas perpendiculares aos planos concorrentes.
5. Planos normais são aqueles cujo ângulo diedral é um ângulo reto (90 graus).

# 3 Poliedros Regulares

Poliedro é um sólido limitado externamente por planos no espaço $R^3$. As regiões planas que limitam este sólido são as **faces** do poliedro. As interseções das faces são as **arestas** do poliedro. As interseções das arestas são os **vértices** do poliedro.

Um poliedro é dito regular se todas as suas faces são regiões poligonais regulares com **n** lados, o que significa que o mesmo número de arestas se encontram em cada vértice.




Existem algumas características gerais que são válidas para todos os poliedros regulares. Se **n** é o número de lados da região poligonal, **a** é a medida da aresta A e **z = m/V** é a divisão do número de ângulos diedrais ( m ) pelo número de vértices ( V ), então:

Se **V** é o número de vértices, **F** é o número de faces, **A** é o número de arestas e **m** é o número de ângulos entre as arestas de um poliedro, então:

$$V + F = A + 2 \qquad m = 2A \Longrightarrow \boxed{\text{Relações de EULER}}$$

Segundo as relações de Euler, a Tabela a seguir demonstra para os poliedros regulares a relação entre o número de vértices **V**, o número de faces **F**, o número de arestas **A** e o número de ângulos entre as arestas **m** dos poliedros regulares.

| Poliedro regular | Cada face é um | Faces **F** | Vértices **V** | Arestas **A** | Ângulos entre as arestas **m** |
|---|---|---|---|---|---|
| **Tetraedro** | triângulo eqüilátero | 4 | 4 | 6 | 12 |
| **Hexaedro (CUBO)** | quadrado | 6 | 8 | 12 | 24 |
| **Octaedro** | triângulo eqüilátero | 8 | 6 | 12 | 24 |
| **Dodecaedro** | pentágono regular | 12 | 20 | 30 | 60 |
| **Icosaedro** | triângulo equilátero | 20 | 12 | 30 | 60 |

| Poliedro regular | Raio do círculo inscrito ( **r** ) | Raio do círculo circunscrito ( **R** ) | Ângulo diedral ( d ) |
|---|---|---|---|
| **Tetraedro** | $(a/12)\sqrt{6}$ | $(a/4)\sqrt{6}$ | 70°31'44" |
| **Hexaedro** | a/2 | $(a/2)\sqrt{3}$ | 90°00'00" |
| **Octaedro** | $(a/6)\sqrt{6}$ | $(a/2)\sqrt{2}$ | 109°28'16" |

## 4 Volume

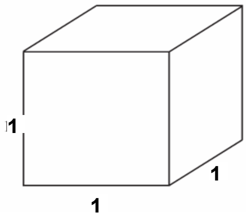
Se no estudo de área, foram feitas primeiramente algumas considerações acerca de cheio e de vazio de figura geométrica, e é claro, no plano.

Já no espaço, foco atual deste estudo, a figuração de "cheio" e "vazio", agora não mais uma figura geométrica do plano (polígono), mas sim um poliedro.

A grosso modo se pode dizer que o volume de um poliedro é a quantidade de espaço por ele ocupado.

Para medir esta grandeza chamada volume, deve-se compará-la com uma unidade e, tradicionalmente, a unidade de volume é o Cubo cuja aresta mede uma unidade de comprimento, denominado de cubo unitário.

Por exemplo, se um cubo tem 1cm de aresta, seu volume é a unidade chamada de centímetro cúbico ($cm^3$).




1 unidade de volume

Pois, o volume desenvolve-se a partir da superfície (ou da área da base), então $V = A_b \times h = (1 \times 1) \times 1 = 1$ (no caso, é claro, do cubo unitário).

Ou seja, para o caso geral, onde as medidas das arestas do bloco retangular são números reais positivos quaisquer, o volume é ainda o produto dessas medidas. Considera-se, portanto estabelecido que o volume de um bloco retangular cujas arestas medem x, y e z, é dado por V = xyz.

Só que esta idéia toda parece soar de forma muito simplista, pois se tem que pensar também na não uniformidade dos sólidos.

## 4.1 Princípio de Cavalieri

O cálculo dos volumes dos diversos sólidos só vai avançar com esta nova ferramenta. Deve-se imaginar inicialmente um sólido qualquer **S** apoiado em um plano horizontal **H.** Deve-se imaginar também que **S** tenha sido cortado por planos paralelos a **H** em fatias muito finas, todas de mesma altura. Observe então que o sólido **S** pode mudar de forma quando deslizamos ligeiramente cada fatia em relação com a que está abaixo dela. Podemos assim obter um outro sólido **S'**, diferente de **S**, mas *com o mesmo volume* de **S**, uma vez que eles são constituídos das mesmas fatias (figura A).

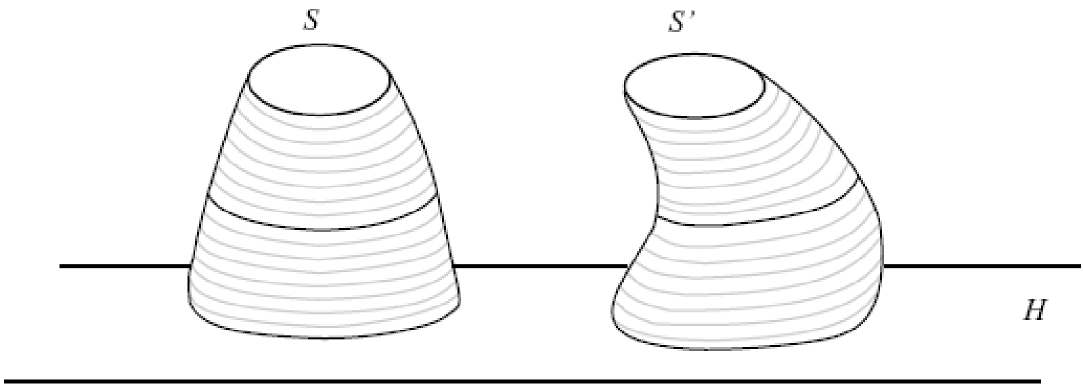



**Figura A**

Esta idéia inicial já conduz a dois importantes resultados.

a) Dois prismas de mesma base e mesma altura têm mesmo volume (Figura B).

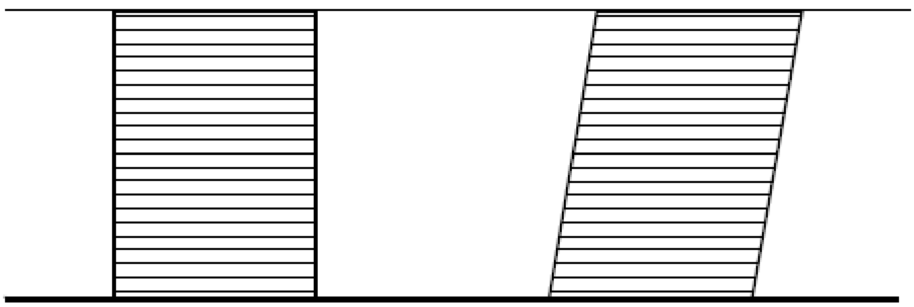


**Figura B**

b) Duas pirâmides de mesma base e mesma altura possuem mesmo volume (Figura C).

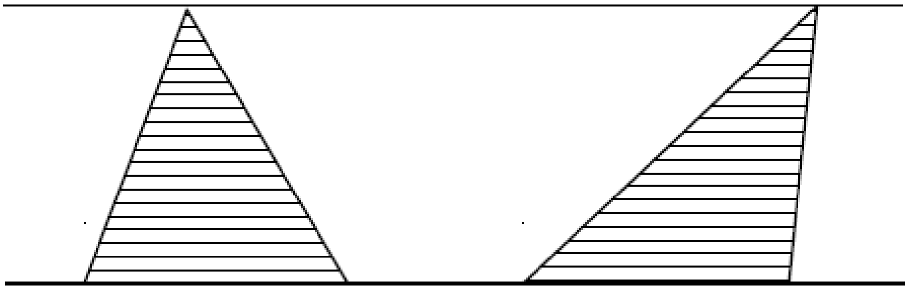


**Figura C**

Estes dois resultados que ora se apresentaram constituem um caso bastante particular do princípio que se vai enunciar. Aqui, fatias que estão na mesma altura nos dois sólidos são congruentes. Mas, em uma situação mais geral, considerando dois sólidos quaisquer A e B (Figura D), se as duas fatias que estiverem na mesma altura tiverem mesma área então, como possuem mesma espessura, terão muito aproximadamente volumes iguais. Tanto mais aproximadamente quanto mais finas forem. Sendo o volume de cada sólido a soma dos volumes das respectivas fatias, e a aproximação entre os volumes das fatias podendo tornar-se tão precisa quanto se deseje, conclui-se que os volumes de A e B são iguais.

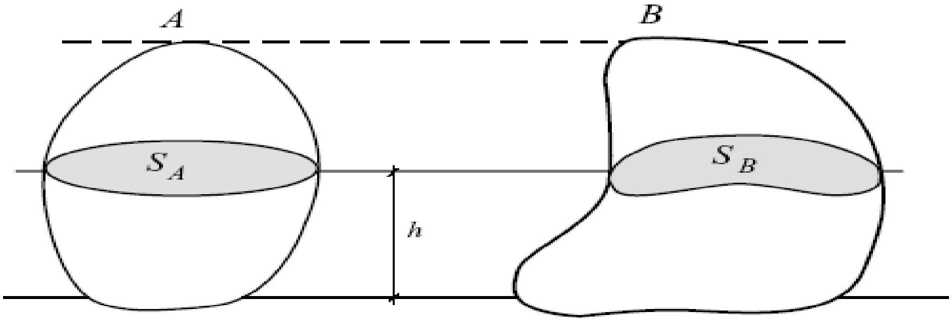



**Figura D**

- **Princípio de Cavalieri**

*"Sejam* A *e* B *dois sólidos. Se qualquer plano horizontal secciona* A *e* B *segundo figuras planas de mesma área, então estes sólidos têm volumes iguais."*

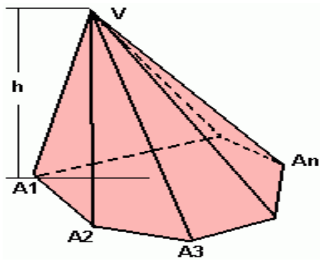
É preciso deixar claro que o Princípio de Cavalieri não pode ser demonstrado com apenas os recursos da Matemática elementar. Porém, ele deve ser incorporado à teoria como um axioma.

# 5 Pirâmide e Cone

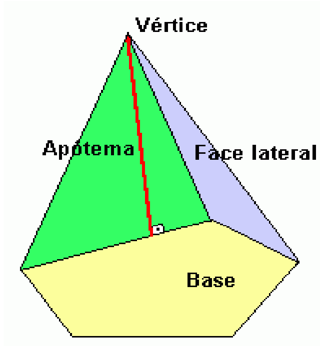
## 5.1 Pirâmide

As formas piramidais há muito vêm sendo utilizado pela humanidade. No Egito, foram utilizadas as Pirâmides como Mausoléus dos Faraós, isto há mais de 4.000 anos atrás; no México e nos Andes, há alguns séculos atrás, as Pirâmides, eram utilizadas para adoração aos seus deuses. Já na América do Norte, também há alguns séculos atrás, os índios, se utilizavam desta forma para conceber suas habitações (as barracas) e, até hoje ainda usadas por escoteiros.

Para se conceituar Pirâmide, considera-se um polígono contido em um plano (por exemplo, o plano horizontal) e um ponto V localizado fora desse plano. Uma Pirâmide é a reunião de todos os segmentos que têm uma extremidade em V e a outra num ponto qualquer do polígono (A1,A2,...,An). O ponto V recebe o nome de vértice da pirâmide.

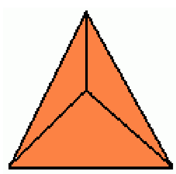
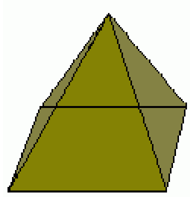
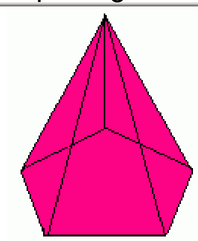
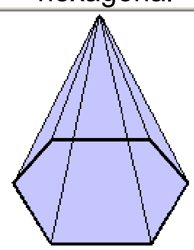



**Elementos de uma Pirâmide**



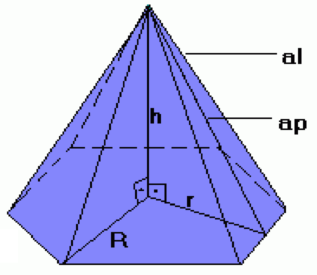

1. Base: A base da pirâmide é a região plana poligonal sobre a qual se apoia a pirâmide.
2. Vértice: O vértice da pirâmide é o ponto isolado P mais distante da base da pirâmide.
3. Eixo: Quando a base possui um ponto central, isto é, quando a região poligonal é simétrica ou regular, o eixo da pirâmide é a reta que passa pelo vértice e pelo centro da base.
4. Altura: Distância do vértice da pirâmide ao plano da base.
5. Faces laterais: São regiões planas triangulares que passam pelo vértice da pirâmide e por dois vértices consecutivos da base.
6. Arestas Laterais: São segmentos que têm um extremo no vértice da pirâmide e outro extremo num vértice do polígono situado no plano da base.
7. Apótema: É a altura de cada face lateral.
8. Superfície Lateral: É a superfície poliédrica formada por todas as faces laterais.
9. Aresta da base: É qualquer um dos lados do polígono da base.

- **Classificação das Pirâmides pelo número de lados da base**

| triangular | quadrangular | pentagonal | hexagonal |
|---|---|---|---|
|  |  |  |  |
| base:triângulo | base:quadrado | base:pentágono | base:hexágono |

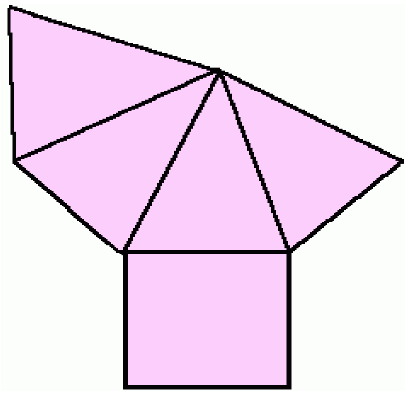
- **Pirâmide Regular Reta**

Pirâmide regular reta é aquela que tem uma base poligonal regular e a projeção ortogonal do vértice V sobre o plano da base coincide com o centro da base.

| | | |
|---|---|---|
|  | R | raio do circulo circunscrito |
| | r | raio do círculo inscrito |
| | ℓ | aresta da base |
| | ap | apótema de uma face lateral |
| | h | altura da pirâmide |
| | al | aresta lateral |
| As faces laterais são triângulos isósceles congruentes | | |

- **Área Lateral de uma Pirâmide**

Considerando-se uma pirâmide regular cuja base tem **n** lados e indicando-se por **A ( face )** a área de uma face lateral da pirâmide, então a soma das áreas das faces laterais recebe o nome de área lateral da pirâmide e pode ser obtida por:



$\mathbf{A_L}$ ( lateral ) = **n A** ( face )

- **Volume de uma Pirâmide**

O volume de uma pirâmide pode ser obtido como um terço do produto da área da base pela altura da pirâmide, isto é: $\mathbf{V_P = (A_B \times h)/3}$.

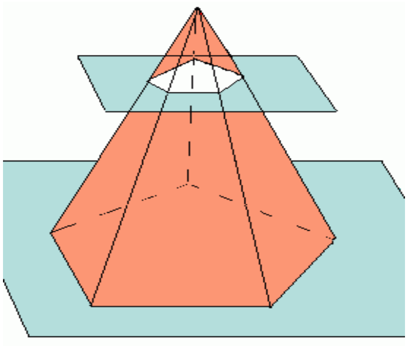
## Tronco de Pirâmide ou Seção Transversal de uma Pirâmide

Seção transversal de uma pirâmide é a interseção da pirâmide com um plano paralelo à base da mesma. A seção transversal tem a mesma forma que a base, isto é, as suas arestas correspondentes são proporcionais. A razão entre uma aresta da seção transversal e uma aresta correspondente da base é dita razão de semelhança.

**Observações sobre seções transversais:**

1. Em uma pirâmide qualquer, a seção transversal e a base são regiões poligonais semelhantes. A razão entre a área da seção transversal e a área da base é igual ao quadrado da razão de semelhança.

2. Ao seccionar uma pirâmide por um plano paralelo à base, obtemos outra pirâmide menor (acima do plano) semelhante em todos os aspectos à pirâmide original.
3. Se duas pirâmides têm a mesma altura e as áreas das bases são iguais, então as seções transversais localizadas à mesma distância do vértice têm áreas iguais.

| | | |
|---|---|---|
|  | V(seção) | Volume da seção até o vértice (volume da pirâmide menor) |
| | V(piram) | Volume da pirâmide (maior) |
| | A(seção) | Área da seção transversal (base da pirâmide menor) |
| | A(base) | Área da base da pirâmide (maior) |
| | h | Distância do vértice à seção (altura da pirâmide menor) |
| | H | Altura da pirâmide (maior) |

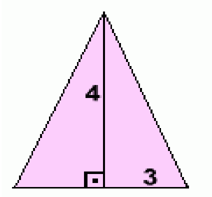
se $\dfrac{A(\text{seção})}{A(\text{base})} = \dfrac{h^2}{H^2}$ , e também $\dfrac{V(\text{seção})}{V(\text{base})} = \dfrac{A(\text{seção}) \times h}{A(\text{base}) \times H}$ então $\Rightarrow \dfrac{V(\text{seção})}{V(\text{base})} = \dfrac{h^3}{H^3}$

Exemplos:

1) Calcular a área lateral de uma pirâmide regular quadrangular cuja aresta da base mede 6 cm e a apótema mede 4 cm.

Resolução:

Se a pirâmide é regular e quadrangular a base é um quadrado e, se a aresta da base mede 6 cm, então se tem um quadrado de lado é igual a 6 cm; e se o apótema é igual a 4 cm, então cada face vai se ter um triângulo isósceles igual a $\Rightarrow$

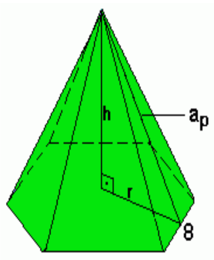



A (face) = ( b . h ) / 2 = ( 6 . 4 ) / 2 = 12 cm²
$A_L$ = n A ( face ) = 4 . 12 = 48 cm²

2) Calcular a área lateral de uma pirâmide regular hexagonal cuja aresta da base mede 8 cm e a altura mede 10 cm.

Resolução:

Se a pirâmide é regular e hexagonal a base é um hexágono e, se a aresta da base mede 8 cm, então se tem um hexágono de lado é igual a 8 cm; e se a altura é igual a 10 cm, então $\Rightarrow$




Primeiramente calcula-se o raio inscrito ( **r** ), e para isso $\rightarrow$ r = a/2 (relacionado nas págs 4 e 6), onde a = 8 cm $\rightarrow$ r = 8/2 = 4 cm $\therefore a_p^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow a_p^2 = 4^2 + 10^2 = 116 \therefore$

$\Rightarrow a_p = \sqrt{116} \therefore$

A (face) = ( b . h ) / 2 = ( 8 . $\sqrt{116}$ ) / 2 = 4$\sqrt{116}$ cm²
$A_L$ = n A ( face ) = 6 . 4$\sqrt{116}$ = 24$\sqrt{116}$ cm² = 259,20 cm²

3) Uma pirâmide tem a altura medindo 9 cm e área da base medindo 36 cm². Qual é o Volume do Tronco desta pirâmide, obtido pelo corte desta pirâmide por uma plano paralelo à base da mesma, sabendo-se que a altura do tronco da pirâmide é 3 cm?.

Resolução:

Primeiramente, há que se determinar o volume da Pirâmide maior, para que se possam estabelecer as relações.

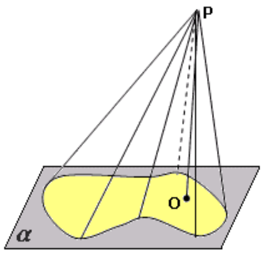
$\Rightarrow V_{(pir)} = \frac{A(base).H}{3} = \frac{36.9}{3} = 108cm^3$, então a altura da Pirâmide menor = 9 – 3 = 6 cm $\therefore$

$\Rightarrow \frac{V(pir.menor)}{V(pir.maior)} = \frac{h^3}{H^3} = \frac{V(pir.menor)}{108} = \frac{6^3}{9^3}$, então o V (pir. menor) = 32 cm³ e se $\Rightarrow$

V (pir. maior) = V (pir. menor) + V (tronco) $\therefore$ **V (tronco) =** 108 – 32 **= 76 cm³**

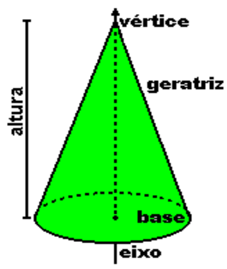
## 5.2 Cone

Considere uma região plana limitada por uma curva suave (sem quinas), fechada e um ponto P fora desse plano.




Da mesma forma que àquela utilizada para Pirâmide, denomina-se cone ao sólido formado pela reunião de todos os segmentos de reta que têm uma extremidade em um ponto P (vértice) e a outra num ponto qualquer da região.

**Elementos de um Cone**

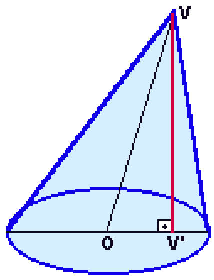



1. Vértice de um cone é o ponto P, onde concorrem todos os segmentos de reta.
2. Base de um cone é a região plana contida no interior da curva, inclusive a própria curva.
3. Eixo do cone é quando a base do cone é uma região que possui centro, o eixo é o segmento de reta que passa pelo vértice P e pelo centro da base.
4. Geratriz é qualquer segmento que tenha uma extremidade no vértice do cone e a outra na curva que envolve a base.
5. Altura é a distância do vértice do cone ao plano da base.

6. Superfície lateral de um cone é a reunião de todos os segmentos de reta que tem uma extremidade em P e a outra na curva que envolve a base.
7. Superfície do cone é a reunião da superfície lateral com a base do cone que é o círculo.
8. Seção meridiana de um cone é uma região triangular obtida pela interseção do cone com um plano que contem o eixo do mesmo.

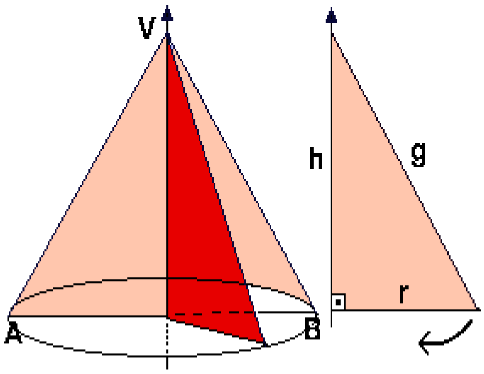
**Classificação do Cone**

Observando-se a posição relativa do eixo em relação à base, os cones podem ser classificados como retos ou oblíquos. Um cone é dito reto quando o eixo é perpendicular ao plano da base e é oblíquo quando não é um cone reto.



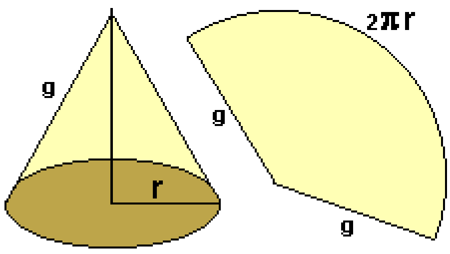

**Cone Regular Reto (Cone de Revolução)**

Um cone circular reto é denominado cone de revolução por ser obtido pela rotação (revolução) de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos




A seção meridiana do cone circular reto é a interseção do cone com um plano que contem o eixo do cone. Na figura anterior, a seção meridiana é a região triangular limitada pelo triângulo isósceles de cor mais escura.

Em um cone circular reto, todas as geratrizes são congruentes entre si. Se g é a medida da geratriz então, pela relação entre os lados de um triângulo retângulo já mencionado no módulo anterior (página 28), temos uma relação notável no cone: $g^2 = h^2 + r^2$, que pode ser "vista" na figura abaixo:



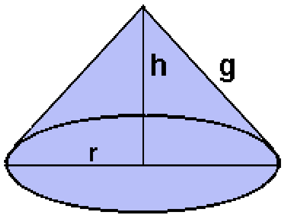

$A_L = \pi \cdot r \cdot g$

$A_{TOTAL} = A_L + A_B = \pi \cdot r \cdot g + \pi \cdot r^2 = \pi \cdot r\,(g + r)$

$V_C = (A_B \times h)/3 = (\pi \cdot r^2 \times h)/3$

**Cone Eqüilátero**

Um cone reto é eqüilátero se a sua seção meridiana é uma região triangular eqüilátera e neste caso a medida da geratriz é igual à medida do diâmetro da base, então g = 2 r.




Pela mesma relação já citada anteriormente, ligada ao triângulo retângulo, onde relaciona os seus lados tem-se $\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$, onde "a" é o lado oposto ao ângulo reto e "b" e "c" são os dois outros dois lados.

Para o caso do Cone então $\Rightarrow g^2 = r^2 + h^2$ e como é um cone eqüilátero $\Rightarrow (2r)^2 = r^2 + h^2 \rightarrow 4r^2 = r^2 + h^2$ $\therefore h^2 = 3r^2$

$h = r\sqrt{3}$ , logo se tem para um cone a relação da altura em função do raio da base.

Então $\Rightarrow$ $AL_{CE} = \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot r \cdot 2r = 2\pi r^2 \therefore$ $\mathbf{AL_{CE} = 2\pi r^2}$ e $\mathbf{A_{TOTAL}} =$ $A_L + A_B = 2\pi r^2 + \pi \cdot r^2 = \mathbf{3\pi r^2}$
e $V_{CE} = (A_B \times h)/3 = \mathbf{(}\pi \cdot r^2 \times r\sqrt{3})/3 \Rightarrow \mathbf{V_{CE} = (\pi \cdot r^3 \sqrt{3})/3}$

## Tronco de Cone

As observações feitas para Tronco de Pirâmide ficam sendo válidas também para Tronco de Cone, claro que com as peculiaridades que cabem aqui, porém as relações entre as seções e volumes ficam sendo também válidas.

EXEMPLO:

1) Tem-se um Monumento em forma de Cone Regular Reto onde o raio da base é 7,0 m e a geratriz é 3r. Deseja-se fazer este cone de dois materiais diferentes (Tronco de cone de concreto e ponta de aço) onde um dos materiais (concreto) será revestido com pastilhas. (a) Quer se saber a que altura da base ( $H_{BTC}$ ) deve estar situado então o "plano fictício" que "secciona" o cone inicial determinando um volume de concreto de 650 m³ e (b) qual deverá ser a área a ser "pastilhada"?

Resolução:

(a) Primeiramente, há que se determinar o volume do Cone maior (ou Inicial), para que se possam estabelecer as relações.

$\Rightarrow$ se $g = 3r \therefore g = 3 \cdot 7 = 21$ m

$\Rightarrow$ pela relação $g^2 = H^2 + r^2 \rightarrow H^2 = g^2 - r^2 = 21^2 - 7^2 = 392 \therefore H = 19{,}8$ m

$\Rightarrow V_C = \dfrac{A(\text{base}).H}{3} = \dfrac{3{,}14.(7{,}00)^2.(19{,}8)}{3} = 1015{,}5\,m^3$ , se o $V_{TC} = 650$ e que $VC_{Maior} = VC_{Menor} + V_{TC} \therefore$

$\Rightarrow VC_{Menor} = VC_{Maior} - V_{TC} = 1015{,}5 - 650 = 365{,}5\ m^3$

$\Rightarrow \dfrac{V(\text{cone menor})}{V(\text{cone maior})} = \dfrac{h^3}{H^3} = \dfrac{365{,}5}{1015{,}5} = \dfrac{h^3}{19{,}8^3} \rightarrow h = 14{,}1$ m $\therefore$ o Cone menor tem altura de 14,1 m

(a) $H_{BTC} = HC_{Maior} - HC_{Menor} = 19{,}8 - 14{,}1 =$ **5,70 m**

(b) Para se determinar a área a ser pastilhada, nada mais é do que se determinar a área lateral do Tronco do cone.

$\Rightarrow AL_{TC} = AL_{CMa} - AL_{CMe}$ ; porém para se determinar área lateral de cone necessita-se das medidas do raio da base e da geratriz.

Do cone maior tem-se as duas medidas, já do cone menor necessita-se determinar $\therefore$

$$\Rightarrow \frac{A(\text{seção})}{A(\text{base})} = \frac{h^2}{H^2} \text{ ou seja } \Rightarrow \frac{A(\text{base cone menor})}{A(\text{base cone maior})} = \frac{h^2}{H^2} = \frac{A(\text{base cone menor})}{3{,}14.(7{,}0)^2} = \frac{14{,}10^2}{19{,}80^2}$$

$\Rightarrow AB_{CMe} = 78{,}0\ m^2 \therefore AB_{CMe} = \pi .( rB_{CMe} )^2 \rightarrow .( rB_{CMe} )^2 = AB_{CMe} / \pi = 24{,}8 \therefore rB_{CMe} \cong 5{,}0\ m$

$\Rightarrow$ pela relação: $g^2 = r^2 + h^2 \rightarrow (gB_{CMe})^2 = 5{,}0^2 + 14{,}1^2 \therefore gB_{CMe} = 15{,}0\ m$

$\Rightarrow$ como $AL = \pi . r. g \therefore AL_{CMa} = 3{,}14 . 7{,}0 . 21{,}0 = 461{,}6\ m^2$ e $AL_{CMe} = 3{,}14 . 5{,}0 . 15{,}0 = 235{,}5\ m^2$

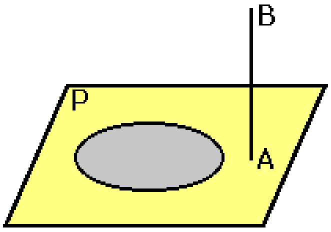
(b) como $AL_{TC} = AL_{CMa} - AL_C = 461{,}6 – 235{,}5 \Rightarrow$ $\mathbf{AL_{TC} = 226{,}1\ m^2}$

# 6 Cilindro e Prisma

## 6.1 Cilindro

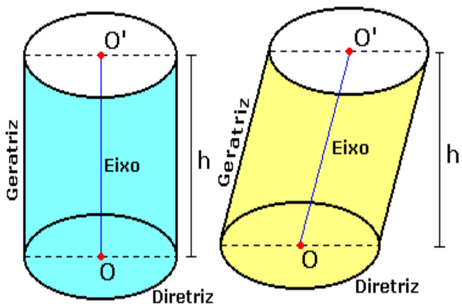
A forma cilíndrica é muito freqüente a sua utilização e a sua apresentação no dia-a-dia, seja no formato de um cigarro, ou numa caixa d’água externa de grandes volumes, entre outros.

Para a concepção do Cilindro passa-se então para um plano ( P ) e nele constrói-se um círculo de raio r e toma-se também um segmento de reta AB que não seja paralelo ao plano P e nem esteja contido neste plano P. Um cilindro circular é a reunião de todos os segmentos congruentes e paralelos a AB com uma extremidade no círculo.




A reta que contém o segmento AB é denominada **geratriz** e a curva que fica no plano do "chão" é a **diretriz**.

Em função da inclinação do segmento AB em relação ao plano do "chão", o cilindro será chamado reto ou oblíquo, respectivamente, se o segmento AB for perpendicular ou oblíquo ao plano que contém a curva diretriz.




**Elementos de um Cilindro**

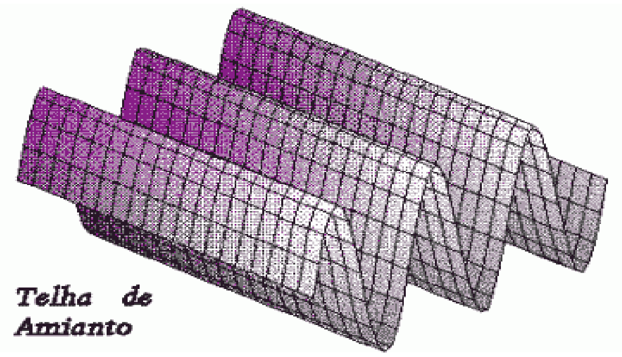
Em um cilindro, podemos identificar vários elementos:

1. Base: É a região plana contendo a curva diretriz e todo o seu interior. Num cilindro existem duas bases.
2. Eixo: É o segmento de reta que liga os centros das bases do "cilindro".
3. Altura: A altura de um cilindro é a distância entre os dois planos paralelos que contêm as bases do "cilindro".
4. Superfície Lateral: É o conjunto de todos os pontos do espaço, que não estejam nas bases, obtidos pelo deslocamento paralelo da geratriz sempre apoiada sobre a curva diretriz.
5. Superfície Total: É o conjunto de todos os pontos da superfície lateral reunido com os pontos das bases do cilindro.
6. Área lateral: É a medida da superfície lateral do cilindro.
7. Área total: É a medida da superfície total do cilindro.
8. Seção meridiana de um cilindro: É uma região poligonal obtida pela interseção de um plano vertical que passa pelo centro do cilindro com o cilindro.

As características apresentadas antes para cilindros circulares, são também possíveis para outros tipos de curvas diretrizes, como: elipse, parábola, hipérbole, seno ou outra curva simples e suave num plano.

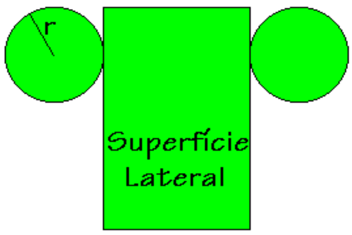
Mesmo que a diretriz não seja uma curva conhecida, ainda assim existem cilindros obtidos quando a curva diretriz é formada por uma reunião de curvas simples. Por exemplo, se a diretriz é uma curva retangular, temos uma situação patológica e o cilindro recebe o nome especial de *prisma*.

Em função da curva diretriz, o cilindro terá o nome de cilindro: elíptico, parabólico, hiperbólico, sinuzoidal (telha de eternit).




- **Área Lateral e Área Total de um Cilindro**

Em um cilindro circular reto, a área lateral é dada por **$A_L = 2\pi.r.h$**, onde r é o raio da base e h é a altura do cilindro, ou seja, a Área Lateral é igual a área de um retângulo, onde um dos lados é a altura do cilindro e o outro é o perímetro da base. A área total corresponde à soma da área lateral com o dobro da área da base, $A_T = 2\pi.r.h + 2\,\pi\,.r^2 \Rightarrow$ **$A_T = 2\pi.r\,(\,h + r\,)$** .



- **Volume de um Cilindro**

Em um cilindro, o volume é dado pelo produto da área da base pela altura $\Rightarrow V_{Cl} = A_B \times h$, onde a base é um círculo $\therefore V_{Cl} = \pi .r^2 .h$

- **Cilindro Eqüilátero**

Um cilindro circular equilátero é aquele cuja altura é igual ao diâmetro da base, isto é h = 2r. Neste caso, para calcular a área lateral, a área total e o volume, podemos usar as fórmulas, dadas por:

$A_L = 4\,\pi\, r^2$
$A_B = \pi\, r^2$
$A_T = A_L + 2\,A_B = 6\,\pi\, r^2$
$V_{Cl} = A_B\, .\, h = \pi\, r^2 .\, 2r = 2\,\pi\, r^3$

EXEMPLO:

1) Seja um Cilindro Circular reto de raio igual a 2 e altura 3 cm. Calcular a área lateral, área total e Volume

Resolução:

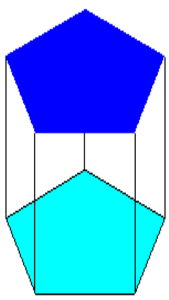
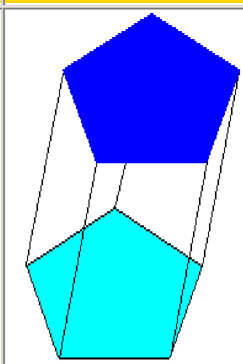
$\Rightarrow$ $A_L = 4\,\pi\, r^2 = 4\,.3{,}14\,.\,2{,}0^2 =$ cm²

$\Rightarrow$ $A_T = 6\,\pi\, r^2 = 6\,.3{,}14\,.\,2{,}0^2 =$ cm²

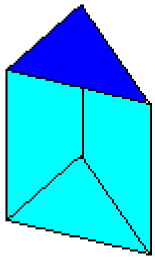
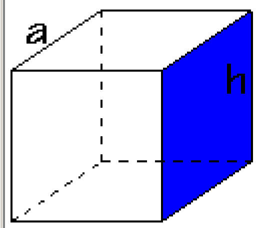
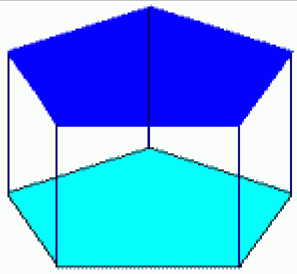
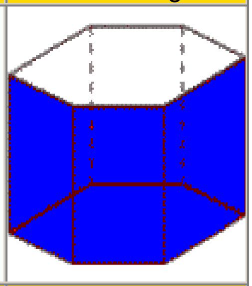
$\Rightarrow$ $V_{Cl} = 2\,\pi\, r^3 = 2\,.\,3{,}14\,.\,2{,}0^3 =$ cm³

### 3.6.2 Prisma

Prisma é um sólido geométrico delimitado por faces planas, no qual as bases se situam em planos paralelos. Quanto à *inclinação* das arestas laterais, os prismas podem ser retos ou oblíquos.

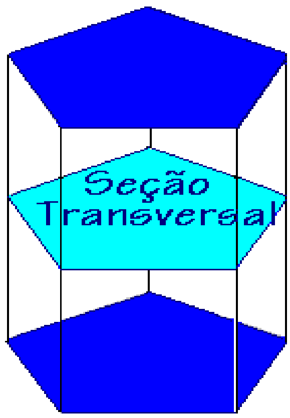
| Prisma reto | Aspectos comuns | Prisma oblíquo |
|---|---|---|
|  | Bases são regiões poligonais congruentes<br>A altura é a distância entre as bases |  |
| | Arestas laterais são paralelas com as mesmas medidas | |
| | Faces laterais são paralelogramos | |

Quanto à *base*, os prismas mais comuns estão mostrados na tabela:

| Prisma triangular | Prisma quadrangular | Prisma pentagonal | Prisma hexagonal |
|---|---|---|---|
|  |   |  |  |
| Base:Triângulo | Base:Quadrado | Base:Pentágono | Base:Hexágono |

- **Seções de um Prisma**

Seção transversal: É a região poligonal obtida pela interseção do prisma com um plano paralelo às bases, sendo que esta região poligonal é congruente a cada uma das bases.




Seção reta (seção normal): É uma seção determinada por um plano perpendicular às arestas laterais.

Princípio de Cavalieri: Consideremos um plano P sobre o qual estão apoiados dois sólidos com a mesma altura. Se todo plano paralelo ao plano dado interceptar os sólidos com seções de áreas iguais, então os volumes dos sólidos também serão iguais.

| Objeto | Prisma reto | Prisma oblíquo |
|---|---|---|
| Arestas laterais | têm a mesma medida | têm a mesma medida |
| Arestas laterais | são perpendiculares ao plano da base | são oblíquas ao plano da base |
| Faces laterais | são retangulares | não são retangulares |

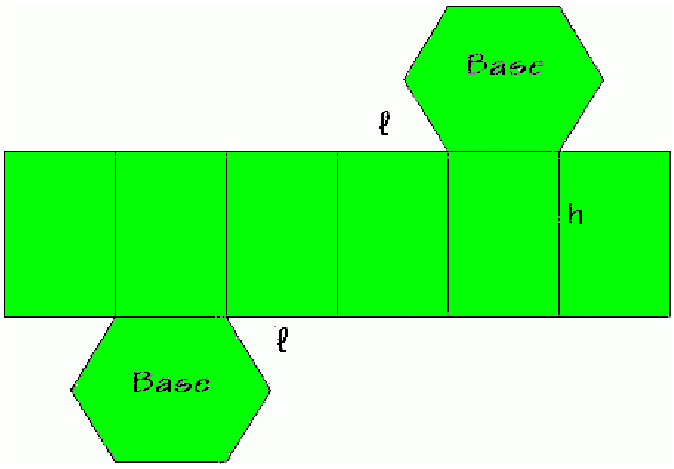
- **Prisma Regular**

É um prisma reto cujas bases são regiões poligonais regulares.

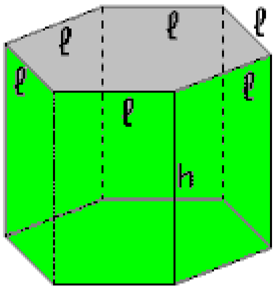
Exemplos: Um prisma triangular regular é um prisma reto cuja base é um triângulo equilátero. Um prisma quadrangular regular é um prisma reto cuja base é um quadrado.

- **Planificação de um Prisma**

Um prisma é um sólido formado por todos os pontos do espaço localizados dentro dos planos que contêm as faces laterais e os planos das bases.




As faces laterais e as bases formam a envoltória deste sólido. Esta envoltória é uma "superfície" que pode ser planificada no plano cartesiano. Tal planificação se realiza como se cortássemos com uma tesoura esta envoltória exatamente sobre as arestas para obter uma região plana formada por áreas congruentes às faces laterais e às bases. A planificação é útil para facilitar os cálculos das áreas lateral e total.




- **Área Lateral de um Prisma**

A área lateral de um prisma reto que tem por base uma região poligonal regular de n lados é dada pela soma das áreas das faces laterais. Como neste caso todas as áreas das faces laterais são iguais, basta tomar a área lateral como ⇒ **$A_L$ = n A(Face Lateral)**

Uma forma alternativa para obter a área lateral de um prisma reto tendo como base um polígono regular de n lados é tomar P como o perímetro desse polígono e h como a altura do prisma ⇒

$$A_L = P.h$$

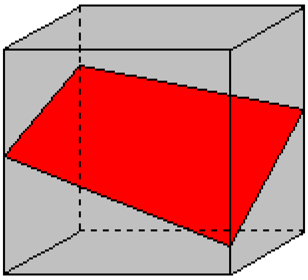
- **Volume de um Prisma**

| O volume de um prisma é dado por ⇒ **$V_{PR}$ = A(base).h** |
|---|

E aqui vai depender de que seção é formada a base, triangular? Retangular? Heganol? Etc

- **Tronco de Prisma**

Quando se passa um plano seccionando um prisma por um plano não paralelo aos planos das bases, a região espacial localizada dentro do prisma, acima da base inferior e abaixo do plano seccionante é denominado tronco de prisma. Para calcular o volume do tronco de prisma, multiplicamos a média aritmética das arestas laterais do tronco de prisma pela área da base.



## 7 Esfera

Sejam dados um ponto O e um numero real r positivo.

O conjunto de todos os pontos P do espaço cujas distancias ao ponto O são iguais a r é denominado **superfície esférica de centro** O **e raio** r.

O sólido limitado por uma superfície esférica chama-se esfera. Desse modo, a esfera de centro O e raio r é o conjunto dos pontos no espaço cujas distancias ao ponto O são menores ou iguais a r.

De uma forma bastante simples podemos dizer que a superfície esférica é a casaca enquanto a esfera é a reunião da “casca com o miolo”.

Naturalmente, as denominações dentro e raio são aplicadas indiferentemente a uma superfície esférica ou a esfera por ela limitada.

- **Área da superfície (ou Área Lateral) da esférica**

  A superfície de uma esfera de raio r é dado por $\Rightarrow$ $\mathbf{S=4\pi\ r^2}$

- **Volume da esfera**

  O volume de uma esfera de raio r é dado por $\Rightarrow$ $V_E = 4/3\ \pi\ r^3$