

1 Introdução

Geometria significa medida da Terra. Terá sido para medir as suas terras que o Homem criou as primeiras idéias geométricas. Acredita-se em geral que a origem da Geometria se situa no Egito, o que é natural, pois, para a construção das pirâmides e outros monumentos desta civilização, seriam necessários conhecimentos geométricos. Estudos mais recentes contrariam esta opinião e referem que os Egípcios foram buscar aos Babilônios muito do seu saber.

Não é de admirar! Esta civilização criou a maravilhosa arquitetura dos jardins suspensos que, como se sabe, é uma das sete maravilhas do mundo. Logo, deviam saber alguma coisa de geometria.

Repara-se, no entanto que estas civilizações floresceram há cerca de 3500 anos. E antes disso? Onde foram estes povos buscar a sua inspiração? Será que não existia "geometria" antes deles?

É certo que sim. Ao longo de milhares de anos, o Homem foi adquirindo e melhorando o seu saber em Geometria. Tudo terá começado com o Homem do Paleolítico (20.000 a.C) que, ao observar a Natureza, teve necessidade de a representar. Realmente existem na Natureza muitas formas que terão despertado a sua atenção. Basta pensar, por exemplo, na forma hexagonal dos alvéolos das colméias, na forma pentagonal das estrelas marinhas, na forma circular da Lua e do Sol, na forma cilíndrica dos troncos das árvores.

Documentos sobre as antigas civilizações egípcia e babilônica comprovam bons conhecimentos do assunto, geralmente ligados à astrologia. Na Grécia, porém, é que o gênio de grandes matemáticos lhes deu forma definitiva. Dos gregos anteriores a Euclides, Arquimedes e Apolônio, consta apenas o fragmento de um trabalho de Hipócrates. E o resumo feito por Proclo ao comentar os "Elementos" de Euclides, obra que data do século V a.C. refere-se a Tales de Mileto como o introdutor da Geometria na Grécia, por importação do Egito.

Pitágoras deu nome a um importante teorema sobre o triângulo-retângulo, que inaugurou um novo conceito de demonstração matemática. Mas enquanto a escola pitagórica do século VI a.C. constituía uma espécie de seita filosófica, que envolvia em mistério seus conhecimentos, os "Elementos" de Euclides representam a introdução de um método consistente que contribui há mais de vinte séculos para o progresso das ciências. Trata-se do sistema axiomático, que parte dos conceitos e proposições admitidos sem demonstração (postulados os axiomas) para construir de maneira lógica tudo o mais. Assim, três conceitos fundamentais - o ponto, a reta e o círculo - e cinco postulados a eles referentes servem de base para toda Geometria chamada euclidiana, útil até hoje, apesar da existência de geometrias não-euclidianas baseadas em postulados diferentes (e contraditórios) dos de Euclides.

2 Ponto, Reta, Plano e Ângulo

Primeiramente define-se ponto, reta e plano para posteriormente partir para o estudo de ângulo dentro da geometria plana.

2.1 Ponto, Reta e Plano

Os conceitos geométricos são estabelecidos por meio de definições através das noções primitivas para daí formar idéias, na verdade então, serão aceitos sem definição aquelas acostumadas por nós dentro da hermenêutica e semântica.

Podemos ilustrar com as seguintes idéias para entender alguns conceitos primitivos em Geometria:

Ponto: uma estrela, um pingo de caneta, um furo de agulha,

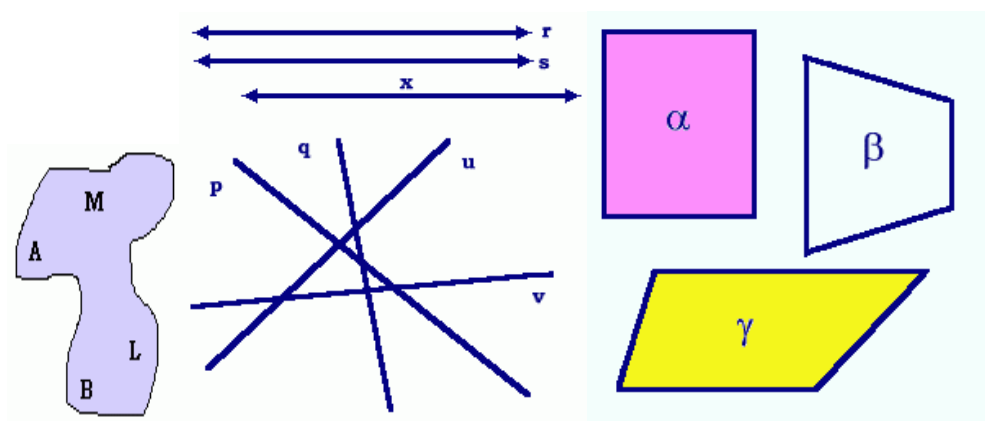
Reta: fio esticado, lados de um quadro,

Plano: o quadro negro, a superfície de uma mesa,

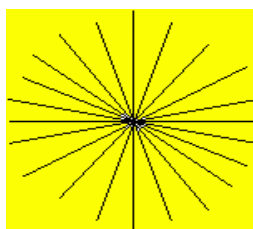
Antes de se definir ângulo vai-se dissecar o estudo de reta

Notações de Ponto, Reta e Plano: as suas representações podem ser realizadas por letras, da seguinte forma:

- Pontos $\Rightarrow$ A, B, L e M representados por letras maiúsculas;
- Retas $\Rightarrow$ r, s, x, p, q, u e v representados por letras minúsculas;
- Planos $\Rightarrow$ Alfa, Beta e Gama representados por letras gregas minúsculas. Plano Alfa, Plano Beta e Plano Gama.



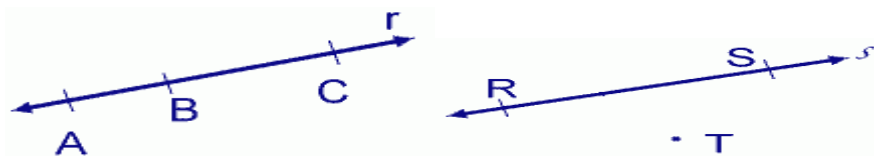
Observação: Por um único ponto passam infinitas retas. De um ponto de vista prático, imagine o Pólo Norte e todas as linhas meridianas (imaginárias) da Terra passando por este ponto. Numa reta, bem como fora dela, há infinitos pontos, mas dois pontos distintos determinam uma única reta. Em um plano e também fora dele, há infinitos pontos.



As expressões "infinitos pontos" ou "infinitas retas", significam "tantos pontos ou retas quantas você desejar".

Pontos Colineares, semi-retas e segmentos de reta

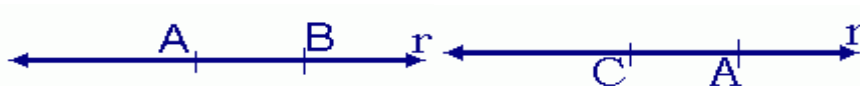
Pontos colineares: são pontos que pertencem a uma mesma reta. Na figura da esquerda, os pontos A, B e C são colineares, pois todos pertencem à mesma reta r. Na figura da direita, os pontos R, S e T não são colineares, pois T não pertence a reta s.



Semi-retas: Um ponto O sobre uma reta s , divide esta reta em duas semi-retas. O ponto O é a origem comum às duas semi-retas que são denominadas semi-retas opostas.



O ponto A é a origem da semi-reta que contém os pontos A e B e também é a origem da semi-reta que contém os pontos A e C , nas duas figuras ao lado. A semi-reta que contém os pontos A e B e a semi-reta que contém os pontos A e C são semi-retas opostas. A notação XY para uma semi-reta significa uma semi-reta que contém os pontos X e Y .



As semi-retas AB e AC estão na mesma reta, têm a mesma origem e são infinitas em sentidos contrários, isto é, iniciam em um ponto e se prolongam infinitamente.

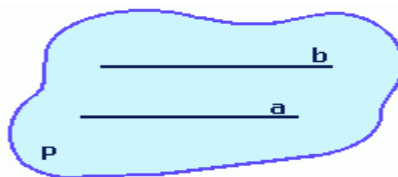


Segmento de Reta: dada uma reta s e dois pontos distintos A e B sobre a reta, o conjunto de todos os pontos localizados entre A e B , inclusive os próprios A e B , recebe o nome de segmento de reta, neste caso, denotado por AB , onde A passa a ser **origem** e B a **extremidade**.



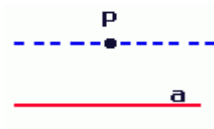
• Retas Paralelas

Duas retas são paralelas se estão em um mesmo plano e não possuem qualquer ponto em comum. Se as retas são coincidentes ("a mesma reta") elas são paralelas.



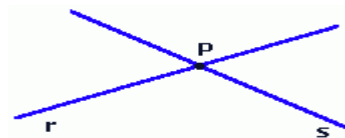
É usual a notação $a \parallel b$, para indicar que as retas a e b são paralelas.

Por um ponto localizado fora de uma reta dada, pode ser traçada apenas uma reta paralela. Este fato é verdadeiro apenas na Geometria Euclidiana, que é a Geometria do nosso cotidiano.



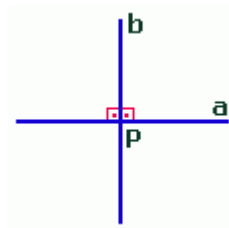
- **Retas Concorrentes**

Duas retas são concorrentes se possuem um único ponto em comum. Um exemplo de retas concorrentes pode ser obtido pelas linhas retas que representam ruas no mapa de uma cidade e a concorrência ocorre no cruzamento das retas (ruas).

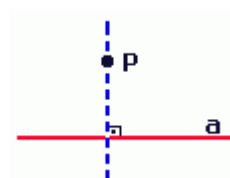


- **Retas Perpendiculares**

São retas concorrentes que formam ângulos de 90 graus. Usamos a notação $a \perp b$ para indicar que as retas **a** e **b** são **perpendiculares**.



⇒ Por um ponto localizado fora de uma reta dada, pode ser traçada apenas uma reta perpendicular.



Falou-se aqui em ângulo, e até agora não se definiu ângulo. Passa-se então ao estudo de ângulos.

2.2 Ângulo

Lembramos que um segmento de reta orientado AB é um segmento de reta que tem início em A e final em B.

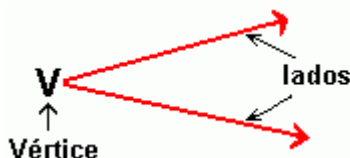


Uma semi-reta orientada AB é a parte de uma reta que tem início em A, passa por B e se prolonga indefinidamente.



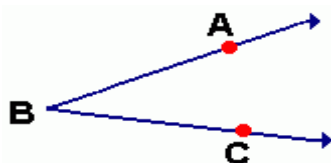
Conceituações

Ângulo é a reunião de dois segmentos de reta orientados (ou duas semi-retas orientadas) a partir de um ponto comum.



A interseção entre os dois segmentos (ou semi-retas) é denominada vértice do ângulo e os lados do ângulo são os dois segmentos (ou semi-retas).

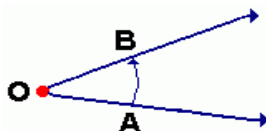
Podem ser usadas três letras, por exemplo, ABC para representar um ângulo, sendo que a letra do meio B representa o vértice, a primeira letra A representa um ponto do primeiro segmento de reta (ou semi-reta) e a terceira letra C representa um ponto do segundo segmento de reta (ou semi-reta).



Usa-se a notação $\angle$ para um ângulo, como por exemplo: $\angle ABC$.

O mesmo ângulo poderia ser representado pelas letras CBA, e neste caso, deve ficar claro que foi escolhido como primeiro segmento (ou semi-reta) aquele que contém o ponto C, enquanto que o segundo segmento (ou semi-reta) foi escolhido como aquele que contém o ponto A, sendo o vértice do ângulo o mesmo da situação anterior.

Um ângulo pode ser orientado da seguinte forma. Centramos um compasso no vértice **O** do ângulo e com uma certa abertura positiva (raio) traçamos um arco de circunferência a partir de um ponto A localizado em um dos segmentos (ou semi-retas) até que este arco toque o outro segmento de reta (ou semi-reta) em um ponto B.

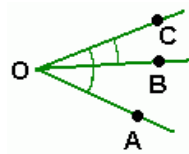


O $\widehat{AÔB}$ está orientado positivamente se o arco foi construído no sentido anti-horário enquanto o ângulo $\widehat{BOA}$ está orientado negativamente, isto é, o arco foi construído no sentido horário, aquele sentido seguido pelos ponteiros de um relógio.

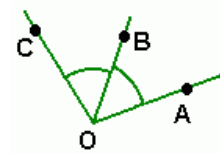
Quando não houver dúvida ou necessidade de orientação, podemos indicar o ângulo simplesmente pela letra que representa o vértice, como por exemplo: $\widehat{O}$. Uma outra notação para ângulo é $\widehat{AÔB}$, sendo O o vértice do mesmo e as letras A e B localizadas nos lados do ângulo.

- **Ângulos Consecutivos e Adjacentes**

Ângulos são consecutivos: Se um dos lados de um deles coincide com um dos lados do outro ângulo.

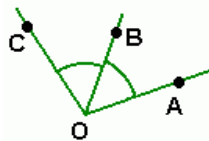


AÔC e BÔC são consecutivos
OC é o lado comum



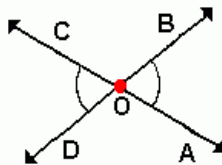
AÔB e BÔC são consecutivos
OB é o lado comum

Ângulos adjacentes: Dois ângulos consecutivos são adjacentes se, não têm pontos internos comuns. Na figura em anexo, AÔB e BÔC são ângulos adjacentes.



- **Ângulos Opostos pelo Vértice e Ângulos Congruentes**

Ângulos Opostos pelo Vértice (alternos externos): Consideremos duas retas concorrentes cuja interseção seja o ponto O. Estas retas determinam quatro ângulos. Os ângulos que não são adjacentes são opostos pelo vértice.



Na figura anterior, AÔB e CÔD são ângulos opostos pelo vértice e também AÔD e BÔC são ângulos opostos pelo vértice, ou mesmo, alternos externos..

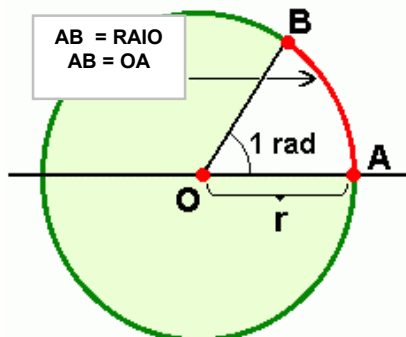
Ângulos Congruentes: A congruência entre ângulos é uma noção primitiva. Dizemos que dois ângulos são congruentes se, superpostos um sobre o outro, todos os seus elementos coincidem.

⇒ Dois ângulos opostos pelo vértice são sempre congruentes.

- **Unidades de Medidas**

A unidade de medida de ângulo no Sistema Internacional é o **radiano**, onde o processo de formação do radiano é o seguinte:

Toma-se um segmento de reta AO = raio do círculo e comprimento de AB = comprimento AO , o ângulo entre os segmentos de reta OA . e OB é igual a 1 radiano (1 rad).

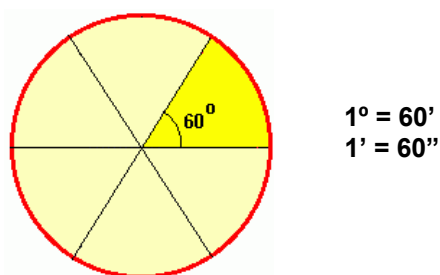


Outra unidade que é muito utilizada é o **grau**. Ela é obtida pela divisão da circunferência em 360 partes iguais, obtendo-se assim um ângulo de um grau, sendo que a notação desta medida usa um pequeno $^{\circ}$ colocado como expoente do número, como 1° .

Não se sabe ao certo quais as razões pelas quais, foi escolhido o número 360 para se dividir a circunferência, sabe-se apenas que o número 60 é um dos menores números menores do que 100 que possui uma grande quantidade de divisores distintos, a saber: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60, razão forte pela qual este número tenha sido adotado.

O primeiro astrônomo grego a dividir o círculo em 360 partes foi Hipsicles (180 a. C.), seguido pelos caldeus. Por volta de 150 a. C. encontramos uma generalização de Hiparco para este procedimento.

Como o sistema sexagesimal (base 60) influenciou a escolha da divisão do círculo em 360 partes iguais, assim também, como a divisão de cada uma dessas partes em 60 partes menores (minutos – ‘) e também na divisão de cada uma dessas sub-partes em 60 partes menores (segundos – “), além do que 60 (ou 60°) também é a 6ª parte do círculo, e dividir um círculo em 6 partes iguais era algo muito simples para os especialistas daquela época.



É mais usual a unidade de medida de ângulo com graus, minutos e segundos. Na verdade a unidade de medida de ângulo do Sistema Internacional é o *radiano*, que foi uma unidade alternativa criada pelo matemático Thomas Muir e o físico James T. Thomson, de uma forma independente.

- **Classificação dos Ângulos:**

- ⇒ **Agudo:** $0^{\circ} < \text{Ângulo} < 90^{\circ}$.
- ⇒ **Reto:** $\text{Ângulo} = 90^{\circ}$.
- ⇒ **Obtuso:** $\text{Ângulo} > 90^{\circ}$.
- ⇒ **Raso:** $\text{Ângulo} = 180^{\circ}$.

Exemplo:

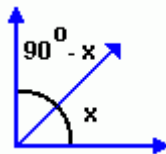
Expressar a medida do ângulo $41^{\circ} 37' 41''$ como fração decimal do grau.

$$\begin{aligned} 41^{\circ} 37' 41'' &= 41^{\circ} + 37' + 41'' = \\ &= 41^{\circ} + (37/60)^{\circ} + (41/3600)^{\circ} \\ &= 41^{\circ} + 0,62^{\circ} + 0,01^{\circ} \\ &= 41,63^{\circ} \end{aligned}$$

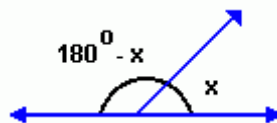
- **Ângulos Complementares, Suplementares e Replementares**

Dois ângulos são denominados:

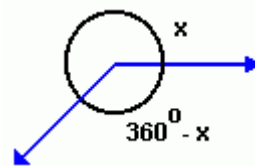
Complementares: se a soma de suas medidas é igual a $90^{\circ} \Rightarrow (90^{\circ} - x)$ e neste caso, um ângulo é o complemento do outro.



Suplementares: se a soma de suas medidas é igual a $180^{\circ} \Rightarrow (180^{\circ} - x)$ e neste caso, um ângulo é o suplemento do outro.



Replementares: se a soma de suas medidas é igual a $360^{\circ} \Rightarrow (360^{\circ} - x)$ e neste caso, um ângulo é o replemento do outro.



2.3 Mudança de unidades

Consideremos um arco AB de medida R em radianos, esta medida corresponde a G graus. A relação entre estas medidas é obtida pela seguinte proporção,

$$\begin{aligned} 2\pi \text{ rad} &\Rightarrow 360 \text{ graus} \\ R \text{ rad} &\Rightarrow G \text{ graus} \end{aligned}$$

Assim, temos a igualdade $R/2\pi = G/360$, ou ainda, $\frac{R}{\pi} = \frac{G}{180} \therefore R = \frac{G}{180} \pi \text{ rad}$

Exemplo

Para determinar a medida em radianos de um arco de medida 60 graus, faz-se:

$$R = \frac{60}{180} \pi \text{ rad} = \frac{1}{3} \pi \text{ rad} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

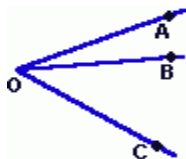
Exemplos:

1) Que parte fracionária de 1° é $48'$?

Resolução:

$$1^\circ = 60' \therefore \text{tem-se que estabelecer a relação} \Rightarrow \frac{48}{60} = \frac{4}{5}$$

2) De acordo com a figura, tem-se que $\widehat{AOC} = 62^\circ 20'$ e $\widehat{AOB} = 32^\circ 40'$ pede-se determinar $\widehat{BOC}$:



Resolução:

$$\widehat{BOC} = \widehat{AOC} - \widehat{AOB} = 62^\circ 20' - 32^\circ 40'$$

Como na aritmética, não se pode subtrair um número maior de um número menor ($20' - 40'$), então “empresta-se” $1^\circ = 60'$ e fica então:

$$\widehat{BOC} = \widehat{AOC} - \widehat{AOB} = 61^\circ 80' - 32^\circ 40' = \mathbf{29^\circ 40'}$$

3) A soma de dois ângulos adjacentes é 120 graus. Calcule a medida de cada ângulo, sabendo que a medida de um deles é o triplo da medida do outro menos 40 graus.

Resolução:

Pode-se, para facilitar, chamar os ângulos de **x** e **y** por exemplo; e que o **x** é o maior e **y** o menor, então:

Tem-se que: $x + y = 120^\circ$ e $x = 3y - 40^\circ$, logo temos duas equações e duas incógnitas $\Rightarrow$

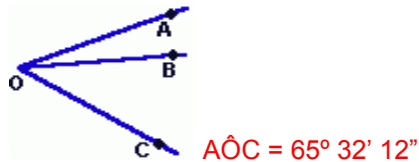
$$\begin{cases} x + y = 120 & \text{I} \\ x - 3y = -40 & \text{II} \end{cases} \quad (x-1) \Rightarrow \begin{cases} x + y = 120 & \text{I} \\ -x + 3y = +40 & \text{II} \end{cases}$$

$$4y = 160 \therefore \mathbf{y = 40^\circ}$$

$$y = 40^\circ \text{ substituindo em I} \rightarrow x + y = 120 \therefore x + 40 = 120 \therefore \mathbf{x = 80^\circ}$$

Exercícios Propostos

- 1) De acordo com a figura, tem-se que $\hat{A}OB = 43^\circ 42' 20''$ e $\hat{B}OC = 21^\circ 49' 52''$ pede-se determinar $\hat{A}OC$:



- 2) Dois ângulos são suplementares, a medida de um deles é 24 graus menor do que o dobro da medida do outro. Calcule a medida de cada ângulo. $x + y = 180^\circ$ e $x = 2y - 24^\circ \Rightarrow x = 112^\circ$ e $y = 68^\circ$.

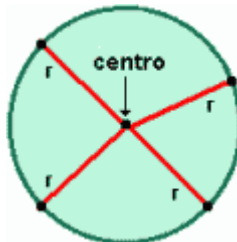
3 Circunferência e Círculo

A circunferência possui características não comumente encontradas em outras figuras planas, como o fato de ser a única figura plana que pode ser rodada em torno de um ponto sem modificar sua posição aparente. É também a única figura que é simétrica em relação a um número infinito de eixos de simetria.

A circunferência é importante em praticamente todas as áreas do conhecimento como nas Engenharias, Matemática, Física, Química, Biologia, Arquitetura, Astronomia, Artes e também é muito utilizado na indústria e bastante utilizada nas residências das pessoas e começou a ser estudado há aproximadamente 4000 anos.

3.1 Definições

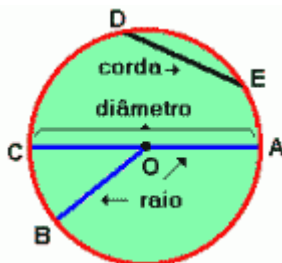
Circunferência: A circunferência é o lugar geométrico de todos os pontos de um plano que estão localizados a uma mesma distância r de um ponto fixo denominado o centro da circunferência. Esta talvez seja a curva mais importante no contexto das aplicações.



Círculo: (ou disco) é o conjunto de todos os pontos de um plano cuja distância a um ponto fixo O é menor ou igual que uma distância r dada. Quando a distância é nula, o círculo se reduz a um ponto. O círculo é a reunião da circunferência com o conjunto de pontos localizados dentro da mesma. No gráfico acima, a circunferência é a linha de cor escura que delimita externamente, ou mesmo, que envolve a região verde, enquanto o círculo é toda a região pintada reunida com a circunferência.

- **Raio, Corda e Diâmetro**

Raio: Raio de uma circunferência (ou de um círculo) é um segmento de reta com uma extremidade no centro da circunferência e a outra extremidade num ponto qualquer da circunferência. Na figura, os segmentos de reta OA , OB e OC são raios.



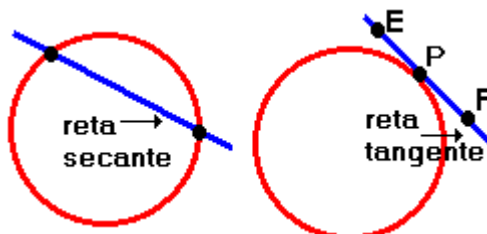
Corda: Corda de uma circunferência é um segmento de reta cujas extremidades pertencem à circunferência. Na figura, os segmentos de reta AC e DE são cordas.

Diâmetro: Diâmetro de uma circunferência (ou de um círculo) é uma corda que passa pelo centro da circunferência. Observamos que o diâmetro é a maior corda da circunferência. Na figura, o segmento de reta AC é um diâmetro.

3.2 Posições relativas de uma reta e uma circunferência

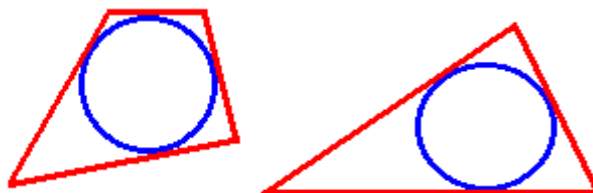
Reta secante: Uma reta é secante a uma circunferência se essa reta intercepta a circunferência em dois pontos quaisquer, podemos dizer também que é a reta que contém uma corda.

Reta tangente: Uma reta tangente a uma circunferência é uma reta que intercepta a circunferência em um único ponto P. Este ponto é conhecido como ponto de tangência ou ponto de contato. Na figura ao lado, o ponto P é o ponto de tangência e a reta que passa pelos pontos E e F é uma reta tangente à circunferência.



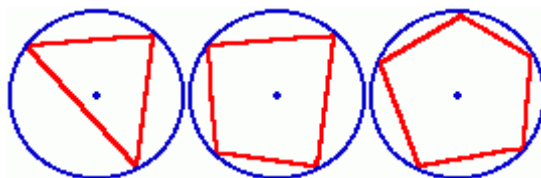
3.3 Polígonos circunscritos e inscritos

Polígono circunscrito a uma circunferência é o que possui seus lados tangentes à circunferência. Ao mesmo tempo, dizemos que esta circunferência está inscrita no polígono.



Se um quadrilátero é circunscrito a uma circunferência, a soma de dois lados opostos é igual a soma dos outros dois lados.

Polígono inscrito em uma circunferência se cada vértice do polígono é um ponto da circunferência e neste caso dizemos que a circunferência é circunscrita ao polígono.



Se um quadrilátero está inscrito em uma circunferência então os ângulos opostos são suplementares, isto é a soma dos ângulos opostos é 180 graus e a soma de todos os quatro ângulos é 360 graus.

$\begin{aligned}\hat{A} + \hat{I} &= 180^\circ \\ \hat{E} + \hat{O} &= 180^\circ \\ \hat{A} + \hat{E} + \hat{I} + \hat{O} &= 360^\circ\end{aligned}$	
--	--

3.4 O número Pi (π)

Desde os tempos mais remotos, remotos mesmo, coisa de 2.000 a 3.000 a. C, os matemáticos já perceberam que havia uma relação constante e misteriosa no estudo da figura geométrica: *circunferência*.

Indubitavelmente, π é um dos números irracionais mais famosos da *História da Matemática*, este número representa entre outros a relação entre o comprimento (L) de uma circunferência e o diâmetro da mesma (d).

$$L = \pi \cdot d = 2 \cdot \pi \cdot r$$

Na realidade, como número irracional, π é expresso por uma dízima infinita não periódica, que nos dias de hoje com a ajuda dos computadores já é possível determinar com centenas de milhares de casas decimais.

Aqui aparecem as primeiras cinquenta:

$$\pi = 3, 1415926535897932384626433832795028841971693993751 \quad \swarrow \swarrow \swarrow$$

A existência de uma relação constante entre a circunferência de um círculo e o seu diâmetro era conhecido por muitas das civilizações antigas. Tanto os Babilônios como os Egípcios sabiam que esta razão era maior que três.

É atribuído aos egípcios que aproximadamente 2000 a.C, obtiveram o valor:

$$\pi = \left[\frac{4}{3} \right]^4 = 3,160493827$$

Aproximadamente, 2000 a.C. também na mesma época os indianos usavam a raiz quadrada de 10 para π , observe que em nota o atual $\sqrt{10} = 3,26227766 \dots$.

Vituvius, na Grécia, determinou o valor de π (20 a.C) com uma aproximação de uma casa decimal, ele descobre que $\pi = 3,1$.

Ptolomeo aproximadamente em 150 d.C. determina um valor para π com três casas decimais, dá para o seguinte valor:

$$\pi = \frac{377}{120} = 3,141$$

Isaac Newton por volta do ano 1666, através da série:

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24 \left[\frac{1}{12} - \frac{1}{5 \times 2^5} - \frac{1}{28 \times 2^7} - \frac{1}{72 \times 2^9} \dots \right]$$

Obtém π com 16 casas decimais

Embora as pessoas se tenham interessado durante séculos pela razão do círculo, o uso da letra grega π como um símbolo que designa esta razão é relativamente recente. O inglês William Jones (1675-1749) é reconhecido como o primeiro a usar o símbolo π para esta razão. O símbolo apareceu no seu livro *Synopsis Palmariorum Matheseos*, publicado em 1706, o qual incluía 100 casas decimais para π calculado por John Machin (1680 - 1752). A fórmula da autoria de Machin (1706) é dada por:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \cdot \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

Em Outubro de 1996, o francês Fabrice Bellard de 25 anos, calcula o valor de π mas em numeração binária, atingindo sucessivamente as faixas de 400 bilhões, mas em setembro de 1997 ele consegue atingir 1000 bilhões de casas decimais para π , ao fim de 25 dias de cálculo intensivo em computadores ligados em rede através da Internet, tendo sido usada uma fórmula desenvolvida em 1995 por matemáticos da Universidade Simon Fraser, mas aperfeiçoada por Bellard.

A precisão de π não foi reclamada por exigências práticas. O motivo desta busca por parte de tantos matemáticos ao longo da história foi a tendência vaidosa de demonstrar sua arte no cálculo, ou o esforço ingênuo de encarar diretamente o cálculo do problema da natureza de π .

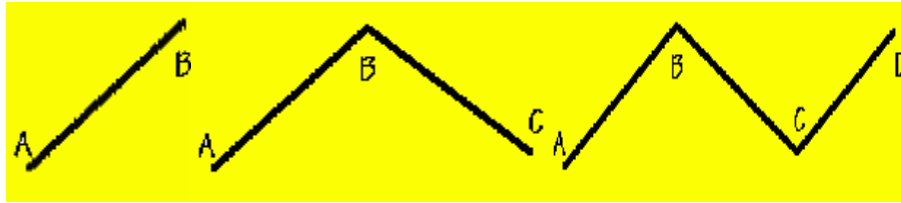
Na atualidade, segue-se calculando mais casas decimais para π , embora como foi dito somente para mostrar arte da habilidade no cálculo.

4 Triângulo e Polígonos

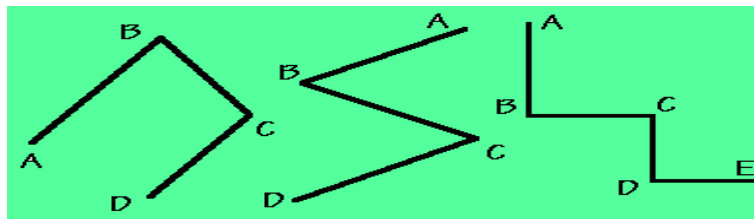
Antes de se partir para o fechamento (que é o polígono) tem-se que introduzir os conceitos iniciais, ou seja, antes do fechamento quando ainda aberto.

4.1 Segmentos Lineares e poligonais abertas

Na que segue, se apresenta um segmento, dois segmentos consecutivos e três segmentos consecutivos. Segmentos consecutivos são aqueles em que a extremidade final do primeiro segmento é a extremidade inicial do segundo e a extremidade final do segundo é a extremidade inicial do terceiro e assim por diante.

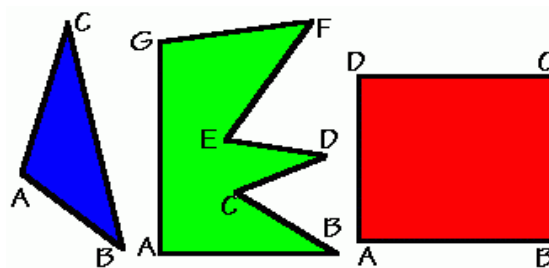


Uma linha poligonal aberta é formada por segmentos de reta consecutivos e não colineares, ou seja, segmentos de reta que não estão alinhados na mesma reta e que não se fecham.



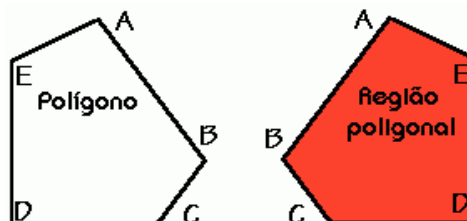
4.2 Polígono e Região poligonal

Polígono é uma figura geométrica cuja palavra é proveniente do grego que quer dizer: pol (muitos) + gonos (ângulos). Um polígono é uma linha poligonal fechada formada por segmentos consecutivos, não colineares que se fecham.



A região interna a um polígono é a região plana delimitada por um polígono.

Muitas vezes encontra-se na literatura sobre Geometria a palavra polígono identificada com a região localizada dentro da linha poligonal fechada; é bom deixar claro que polígono representa apenas a linha. Quando não há perigo na informação sobre o que se pretende obter, pode-se usar a palavra num ou no outro sentido.



Considerando a figura acima, observa-se que:

- 1 Os segmentos AB, BC, CD, DE e EA são os lados do polígono e da região poligonal.
- 2 Os pontos A, B, C, D, E são os vértices da região poligonal e do polígono.
- 3 Os ângulos da linha poligonal, da região poligonal fechada e do polígono são: A, B, C, D e E.

4.3 Denominação dos Polígonos

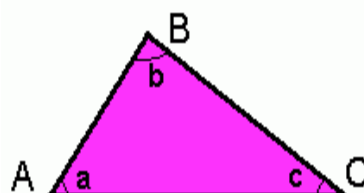
Dependendo do número de lados, um polígono recebe os seguintes nomes de acordo com a tabela:

Nº. de lados	Polígono	Nº. de lados	Polígono
1	não existe	11	undecágono
2	não existe	12	dodecágono
3	triângulo	13	tridecágono
4	quadrilátero	14	tetradecágono
5	pentágono	15	pentadecágono
6	hexágono	16	hexadecágono
7	heptágono	17	heptadecágono
8	octógono	18	octadecágono
9	eneágono	19	eneadecágono
10	decágono	20	icoságono

Polígono Regular: É o polígono que possui todos os lados congruentes (iguais) e todos os ângulos internos congruentes (iguais).

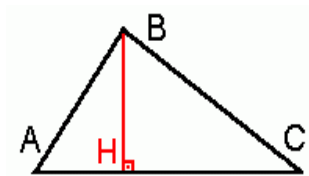
• TRIÂNGULO

Triângulo é um polígono de três lados. É o polígono que possui o menor número de lados. Talvez seja o polígono mais importante que existe. Todo triângulo possui alguns elementos e os principais são: vértices, lados, ângulos, alturas, medianas e bissetrizes.

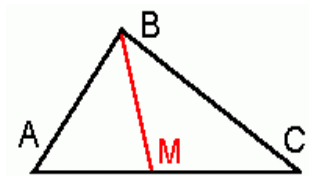


1. Vértices: A,B,C.
2. Lados: AB,BC e AC.
3. Ângulos internos: a, b e c.

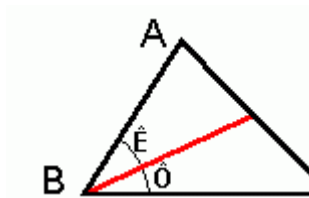
Altura: É um segmento de reta traçado a partir de um vértice de forma a encontrar o lado oposto ao vértice formando um ângulo reto. BH é uma altura do triângulo.



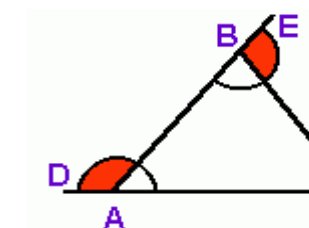
Mediana: É o segmento que une um vértice ao ponto médio do lado oposto. BM é uma mediana.



Bissetriz: É a semi-reta que divide um ângulo em duas partes iguais. O ângulo B está dividido ao meio e neste caso os ângulos $\hat{E} = \hat{O}$.



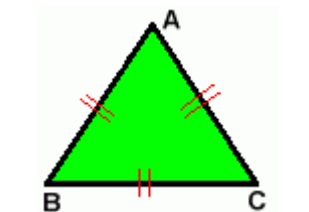
Ângulo Interno: É formado por dois lados do triângulo. Todo triângulo possui três ângulos internos.



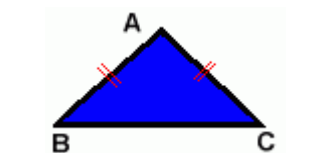
Ângulo Externo: É formado por um dos lados do triângulo e pelo prolongamento do lado adjacente (ao lado).

- Classificação dos triângulos quanto aos lados**

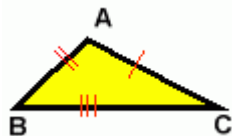
⇒ Triângulo Equilátero : os três lados tem medidas iguais $AB = BC = CA$.



⇒ Triângulo Isósceles: dois lados têm a mesma medida $AB = AC$.

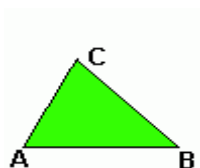


⇒ Triângulo Escaleno: Todos os três lados têm medidas diferentes.

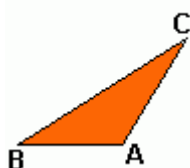


- **Classificação dos triângulos quanto aos ângulos internos**

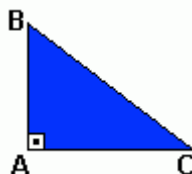
⇒ Triângulo Acutângulo : todos os ângulos internos são agudos, isto é, todos os ângulos internos são $< 90^\circ$.



⇒ Triângulo Obtusângulo : um ângulo interno é obtuso, isto é, possui um ângulo interno $> 90^\circ$.

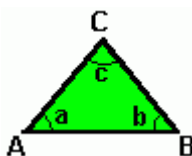


⇒ Triângulo Retângulo : possui um ângulo interno reto ($= 90^\circ$).



- **Medidas dos Ângulos de um Triângulo**

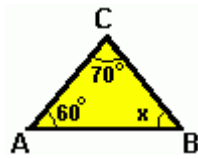
Ângulos Internos: Considera-se o triângulo ABC. Pode-se identificar com as letras **a**, **b** e **c** as medidas dos ângulos internos desse triângulo. Em alguns locais se escreve as letras maiúsculas A, B e C para representar os ângulos.



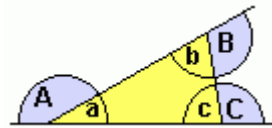
A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre igual a 180 graus, isto porque, a soma dos ângulos internos de um polígono é dado por $\Rightarrow S_i = (n-2) \cdot 180^\circ$, onde n é o número de lados, então para o triângulo:

$$a + b + c = 180^\circ$$

Exemplo: Considerando o triângulo abaixo, pode-se escrever que: $70^\circ + 60^\circ + x = 180^\circ$ e dessa forma, obtém-se $x = 180^\circ - 70^\circ - 60^\circ = 50^\circ$.



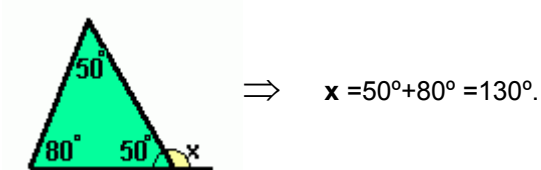
Ângulos Externos: Considera-se o triângulo ABC. Como se observa no desenho, a seguir, as letras minúsculas representam os ângulos internos e as respectivas letras maiúsculas os ângulos externos.



Todo ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a esse ângulo externo. Assim: $A = b + c$; $B = a + c$; $C = a + b$

Exemplo:

Do triângulo a seguir determinar o ângulo x :

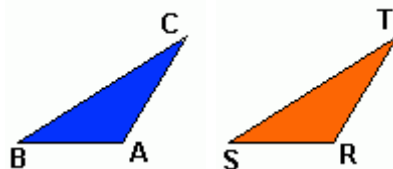


• Congruência e Semelhança de Triângulos

CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

Duas figuras planas são congruentes quando têm a mesma forma e as mesmas dimensões, isto é, o mesmo tamanho.

Para escrever que dois triângulos ABC e RST são congruentes, usa-se a notação: $ABC \sim RST$



Existe a congruência entre os lados, tal que: $AB \sim RS$, $BC \sim ST$, $CA \sim TR$

E entre os ângulos: $A \sim R$, $B \sim S$, $C \sim T$

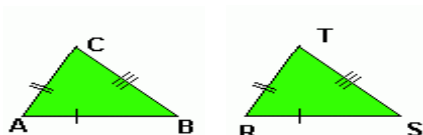
Dois triângulos são congruentes, se os seus elementos correspondentes são ordenadamente congruentes, isto é, os três lados e os três ângulos de cada triângulo têm respectivamente as mesmas medidas.

Para verificar se um triângulo é congruente a outro, não é necessário saber a medida de todos os seis elementos, basta conhecer três elementos, entre os quais esteja presente pelo menos um lado.

Casos de Congruências:

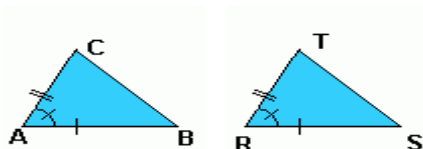
1. **LLL (Lado, Lado, Lado):** Os três lados são conhecidos.

Dois triângulos são congruentes quando têm, respectivamente, os três lados congruentes. Observe que os elementos congruentes têm a mesma marca.



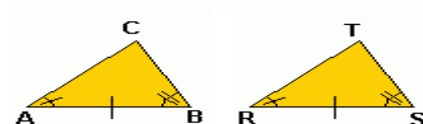
2. **LAL (Lado, Ângulo, Lado):** Dados dois lados e um ângulo

Dois triângulos são congruentes quando têm dois lados congruentes e os ângulos formados por eles também são congruentes.



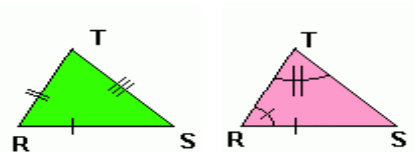
3. **ALA (Ângulo, Lado, Ângulo):** Dados dois ângulos e um lado

Dois triângulos são congruentes quando têm um lado e dois ângulos adjacentes a esse lado, respectivamente, congruentes.



4. **LAAo (Lado, Ângulo, Ângulo oposto):** Conhecido um lado, um ângulo e um ângulo oposto ao lado.

Dois triângulos são congruentes quando têm um lado, um ângulo, um ângulo adjacente e um ângulo oposto a esse lado respectivamente congruentes.



SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Para a semelhança de triângulos, há a necessidade antes de se relembrar conceitos de proporcionalidade, uma vez que, congruência remete a idéia de igualdade, já semelhança não. Por exemplo, se em dois triângulos acontece de se ter o mesmo conjunto de três ângulos internos iguais, não necessariamente se tem dois triângulos congruentes, porém se tem dois triângulos semelhantes como vai ser visto mais adiante.

Proporção é a igualdade entre duas razões equivalentes. De forma semelhante aos que já se estudou com números racionais, é possível estabelecer a proporcionalidade entre segmentos de reta, através das medidas desses segmentos.

Considera-se primeiramente um caso particular com quatro segmentos de reta:

AB = 2 cm	A _____ B	P _____ Q	PQ = 4 cm
CD = 3 cm	C _____ D	R _____ S	RS = 6 cm

A razão entre os segmentos AB e CD e a razão entre os segmentos PQ e RS, são dadas por frações equivalentes, isto é: $AB/CD = 2/3$; $PQ/RS = 4/6$

e como $2/3 = 4/6$, segue a existência de uma proporção entre esses quatro segmentos de reta. Isto nos conduz à definição de segmentos proporcionais.

Diz-se que os quatro segmentos de reta, AB, BC, CD e DE, nesta ordem, são proporcionais se:

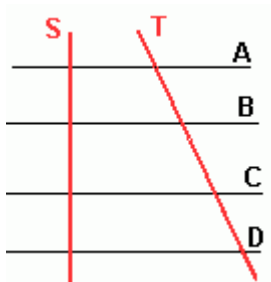
$$AB/BC = CD/DE$$

Os segmentos AB e DE são os segmentos extremos e os segmentos BC e CD são os segmentos meios.

A proporcionalidade acima é garantida pelo fato que existe uma proporção entre os números reais que representam as medidas dos segmentos.

• Feixe de retas paralelas

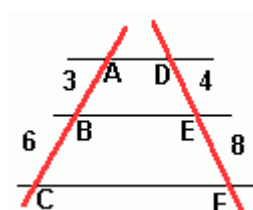
Se um conjunto de três ou mais retas, do tipo como as retas **A**, **B**, **C** e **D** que aparecem no desenho a seguir, formam um feixe de retas paralelas, enquanto que as retas **S** e **T** são retas transversais, isto tudo, num mesmo plano.



Teorema de Tales: Um feixe de retas paralelas determina sobre duas transversais quaisquer, segmentos proporcionais. A figura anterior representa uma situação onde aparece um feixe de três retas paralelas cortado por duas retas transversais.

Exemplo:

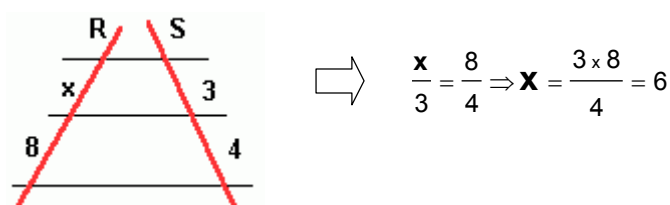
Considerar a figura a seguir com um feixe de retas paralelas, sendo as medidas dos segmentos indicadas.



Assim:

$$\begin{aligned} BC/AB &= EF/DE \\ AB/DE &= BC/EF \\ DE/AB &= EF/BC \end{aligned}$$

Observa-se que uma proporção pode ser formulada de várias maneiras. Se um dos segmentos do feixe de paralelas for desconhecido, a sua dimensão pode ser determinada com o uso de razões proporcionais.



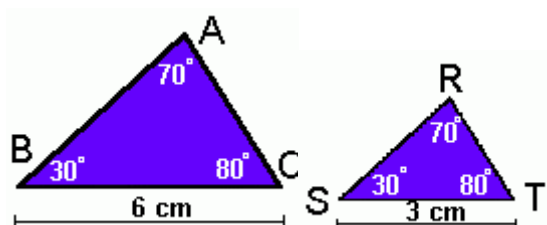
Finalmente então, figuras são semelhantes quando têm a mesma forma, mas não necessariamente o mesmo tamanho.



Se duas figuras R e S são semelhantes, denotamos: $R \sim S$.

Exemplo:

As ampliações e as reduções fotográficas são figuras semelhantes. Para os dois triângulos a seguir:



os três ângulos são respectivamente congruentes, isto é: $A \sim R$, $B \sim S$, $C \sim T$

$\Rightarrow$ Dados dois triângulos semelhantes, tais triângulos possuem lados proporcionais e ângulos congruentes. Se um lado do primeiro triângulo é proporcional a um lado do outro triângulo, então estes dois lados são ditos homólogos. Nos triângulos acima, todos os lados proporcionais são homólogos.

Realmente:

$$AB \sim RS \Rightarrow AB/RS = 2$$

$$BC \sim ST \Rightarrow BC/ST = 2$$

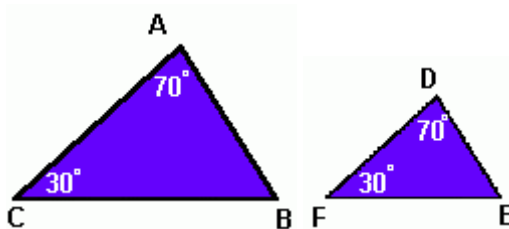
$$AC \sim RT \Rightarrow AC/RT = 2$$

Como as razões acima são todas iguais a 2, este valor comum é chamado razão de semelhança entre os triângulos. Pode-se concluir que o triângulo ABC é semelhante ao triângulo RST.

Dois triângulos são semelhantes se, têm os 3 ângulos e os 3 lados correspondentes proporcionais, mas existem alguns casos interessantes a analisar.

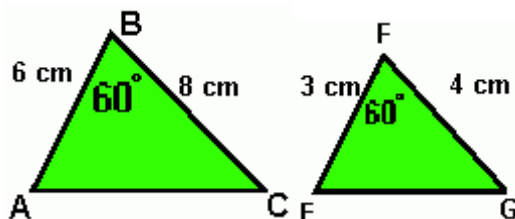
• Casos de Semelhanças de Triângulos

Dois ângulos congruentes (na verdade são três ângulos congruentes): Se dois triângulos tem dois ângulos correspondentes congruentes, então os triângulos são semelhantes.



Se $A \sim D$ e $C \sim F$ então $\Rightarrow ABC \sim DEF$

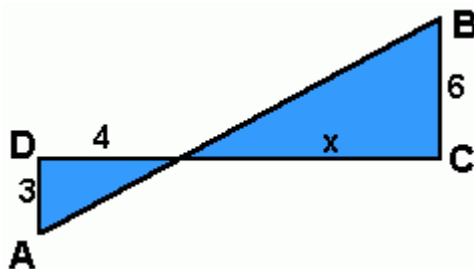
Dois lados congruentes: Se dois triângulos tem dois lados correspondentes proporcionais e os ângulos formados por esses lados também são congruentes, então os triângulos são semelhantes.



Como $AB/EF = BC/FG = 2 \Rightarrow ABC \sim EFG$

Exemplo:

Na figura a seguir, calcular o valor de x .



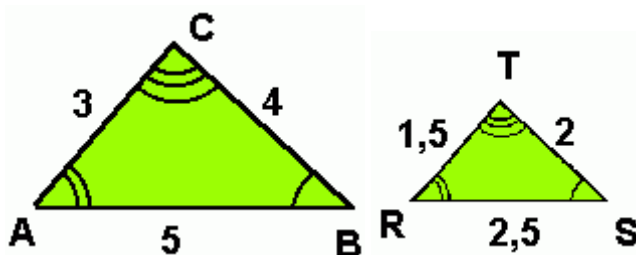
Resolução:

Observa-se que um triângulo pode ser "rodado" sobre o outro para gerar dois triângulos semelhantes, pois os três ângulos são congruentes.

Realmente, x pode ser determinado a partir da semelhança de triângulos. Identifica-se daí os lados homólogos e com eles constrói-se a proporção:

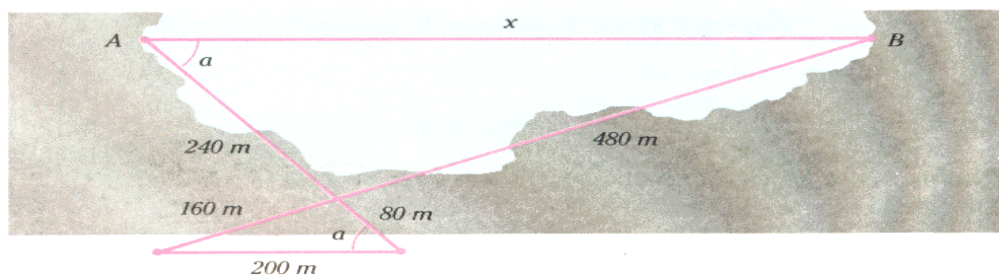
$$\frac{x}{4} = \frac{6}{3} \Rightarrow x = \frac{4 \times 6}{3} = 8$$

Três lados proporcionais: Se dois triângulos têm os três lados correspondentes proporcionais, então os triângulos são semelhantes.



Exercícios Propostos:

1) Determinar a largura do lago do rio (x)

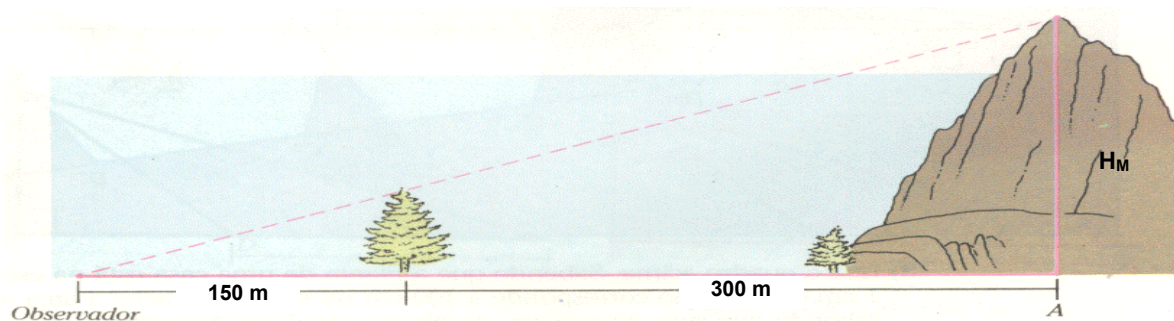


Resolução:

Pela posição dos triângulos, são triângulos semelhantes invertidos. Logo, as proporções a serem estabelecidas pelos lados homólogos podem ser $\Rightarrow 480/160 = x/200$ ou $240/80 = x/200$, qualquer uma das duas levam ao mesmo resultado.

$$\rightarrow \frac{x}{200} = \frac{480}{160} \Rightarrow x = 200 \times 3 = 600$$

2) Um observador deseja conhecer a altura de um morro (H_M), porém não dispõe de instrumentos de medidas para isso, mas não se intimida por isso, pois alguns dados e trena ele tem. Ele sabe que a árvore fica exatamente 300 m do morro e que a árvore tem altura de 25 m. Ele descobre uma saída de descobrir a altura do morro quando se afasta exatamente 150 m da árvore e deste ponto consegue de uma única visada, visa tanto o ponto máximo do morro quanto a árvore.



Resolução:

Pela posição dos triângulos, são triângulos semelhantes. Logo, as proporções a serem estabelecidas pelos lados homólogos são $\Rightarrow H_M/(150+300) = \text{altura da árvore}/150$

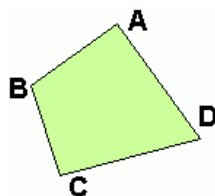
$$\rightarrow \frac{H_M}{450} = \frac{25}{150} \Rightarrow H_M = \frac{450 \times 25}{150} = 75 \text{ m}$$

Agora que se esgotou o estudo de triângulos (antes de trigonometria), continua-se em polígonos; parte-se então para aqueles que são os polígonos mais utilizados, ou estudados, depois (ou conjuntamente) aos triângulos, que são os **QUADRILÁTEROS**.

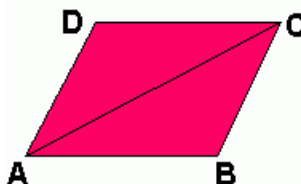
• Quadriláteros

Quadrilátero é um polígono com quatro lados e os principais quadriláteros são: quadrado, retângulo, losango, trapézio e trapezóide.

A seguir tem-se um quadrilátero qualquer e a partir dele algumas observações podem ser feitas assim como nos triângulos:



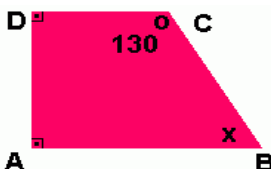
1. Os vértices são os pontos: A, B, C e D.
2. Os ângulos internos são: A, B, C e D.
3. Os lados são os segmentos AB, BC, CD e DA.
4. Ao unir os vértices opostos de um quadrilátero qualquer, obtemos sempre dois triângulos.



e como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180 graus, concluímos que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360 graus.

Exemplo:

Determinar a medida do ângulo x no quadrilátero a seguir.



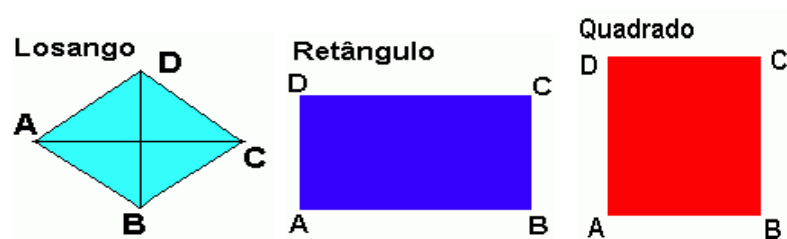
Resolução:

$$x = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 130^\circ) = 360^\circ - 310^\circ = 50^\circ$$

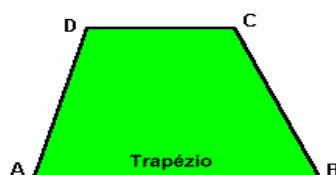
• Classificação dos Quadriláteros

Paralelogramo: É o quadrilátero que tem lados opostos paralelos. Num paralelogramo, os ângulos opostos são congruentes. Os paralelogramos mais importantes recebem nomes especiais:

1. Losango: 4 lados congruentes
2. Retângulo: 4 ângulos retos (90 graus)
3. Quadrado: 4 lados congruentes e 4 ângulos retos.



Trapézio: É o quadrilátero que tem apenas dois lados opostos paralelos. Alguns elementos gráficos de um trapézio (parecido com aquele de um círculo).



1. AB é paralelo a CD
2. BC não é paralelo a AD
3. AB é a base maior
4. DC é a base menor

Os trapézios recebem nomes de acordo com os triângulos que têm características semelhantes. Um trapézio pode ser:

1. Retângulo: dois ângulos retos
2. Isósceles: lados não paralelos congruentes
3. Escaleno: lados não paralelos diferentes

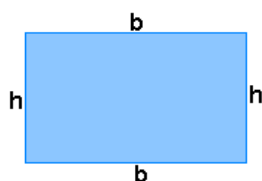


5 Perímetros e Áreas

5.1 Perímetro

Perímetro de um polígono é a soma das medidas dos seus lados, ou seja, é o somatório dos lados que circundam o polígono.

- **Perímetro do retângulo**

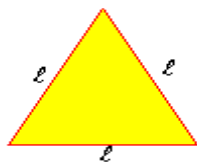


b - base ou comprimento

h - altura ou largura

$$\text{Perímetro} = P = 2b + 2h = 2(b + h)$$

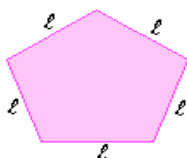
- **Perímetro dos polígonos regulares**



Triângulo equilátero

$$P = l + l + l$$

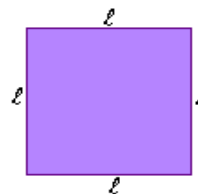
$$P = 3 \cdot l$$



Pentágono

$$P = l + l + l + l + l$$

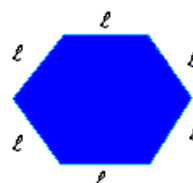
$$P = 5 \cdot l$$



Quadrado

$$P = l + l + l + l$$

$$P = 4 \cdot l$$



Hexágono

$$P = l + l + l + l + l + l$$

$$P = 6 \cdot l$$

l - medida do lado do polígono regular

P - perímetro do polígono regular

Para um polígono de **n** lados, temos:

$$P = n \cdot l$$

Comprimento (ou perímetro) da Circunferência

No item 2.4.1 deste módulo, quando se falou do número Pi (π), já se definiu o comprimento da circunferência $\Rightarrow C = \pi \cdot d = 2 \cdot \pi \cdot r$.

5.2 Área

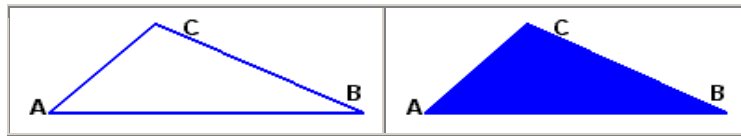
Para se estudar área, primeiramente há que se fazerem algumas considerações acerca de cheio e de vazio, para isso, parte-se da primeira figura geométrica.

• Triângulo e região triangular

No desenho a seguir, o triângulo ABC é a reunião dos segmentos de reta AB, BC e AC. A reunião de todos os pontos localizados no triângulo e também dentro do triângulo é chamada uma região triangular. A região triangular ABC é limitada pelo triângulo ABC. Os pontos dos lados do triângulo ABC bem como os pontos do interior do triângulo ABC são pontos da região triangular.

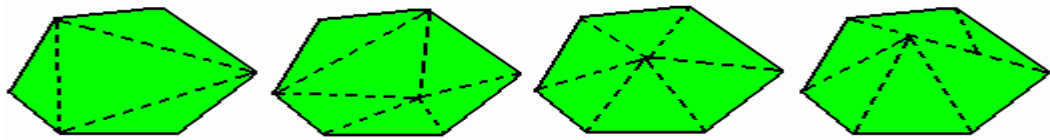
Triângulo ABC

Região triangular ABC



- **Região Poligonal**

Uma região poligonal pode ser decomposta em várias regiões triangulares e isto pode ser feito de várias maneiras.



O estudo de área de regiões poligonais depende de alguns conceitos primitivos:

1. A cada região poligonal corresponde um único número real positivo chamado área.
2. Se dois triângulos são congruentes então as regiões limitadas por eles possuem a mesma área.
3. Se uma região poligonal é a reunião de n regiões poligonais não-sobrepostas então sua área é a soma das áreas das n -regiões.

- **Unidade de Área**

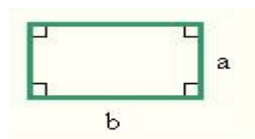
Para a unidade de medida de área, traçamos um quadrado cujo lado tem uma unidade de comprimento.

1 unidade
quadrada

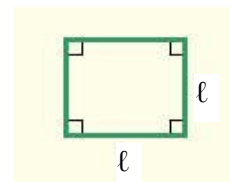
Esta unidade pode ser o metro, o centímetro, o quilômetro, etc.

RETÂNGULO e QUADRADO

Em figuras de lados a e b e ℓ , onde:



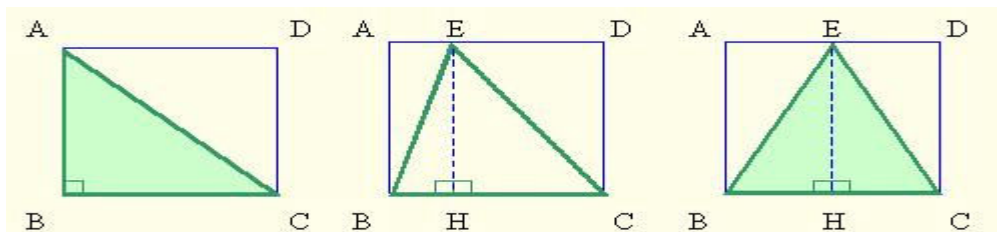
Área do retângulo = $b \cdot a$



Área do quadrado = $\ell \cdot \ell$

TRIÂNGULO

Considerar as seguintes figuras:



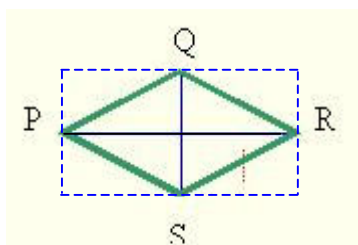
Observa-se que, em qualquer uma das três figuras, a área do triângulo destacada é igual à metade da área do retângulo ABCD. Assim, de modo geral, tem-se:

$$\text{Área do triângulo} = (b \cdot h) / 2$$

Neste caso, pode-se considerar qualquer lado do triângulo como base. A altura a ser considerada é a relativa a esse lado.

Ainda é cedo para as ditas demonstrações, já que se refere a Módulo (Trigonometria) a ser estudado mais a seguir, mas se pode adiantar, que no triângulo retângulo pode-se estabelecer uma relação entre os lados, ou seja; chamemos o maior lado de **a** (lado oposto ao ângulo de 90°) e os outros lados de **b** e **c** respectivamente, então por ora fica estabelecido que: **$a^2 = b^2 + c^2$** .

LOSANGO



PR → representa diagonal maior (D)

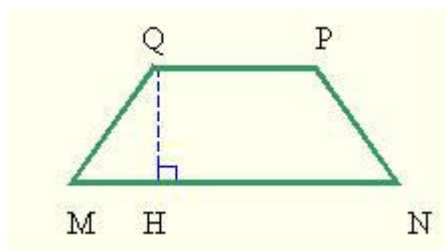
QS → representa diagonal menor (d)

Percebe-se que a área do losango PQRS é igual à metade da área do retângulo (tracejado), então:

$$\text{Área do losango} = (D \cdot d) / 2$$

TRAPÉZIO

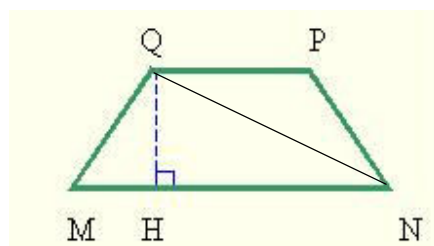
Considerando o Trapézio a seguir, pode-se destacar:



MN → representa base maior (B)

PQ → representa base menor (b)

HQ → distância entre as bases é a altura do trapézio (h)



Com a diagonal QN, se obtém deste trapézio, dois triângulos, QPN e QMN, que têm a mesma altura de medida h.

- área do trapézio MNPQ = área do triângulo QPN + área do triângulo QMN

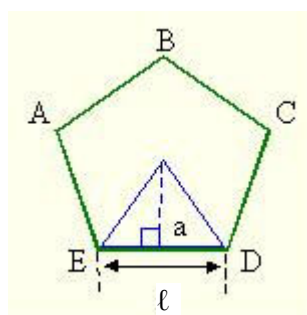
- área do trapézio = $(B \cdot h)/2 + (b \cdot h)/2$ (em função das bases e da altura)

- área do trapézio = $(B \cdot h + b \cdot h)/2$

$$\text{Área do trapézio} = (B + b) \cdot h / 2$$

POLÍGONO REGULAR

Considerando o polígono regular da figura abaixo, que é um pentágono.



A partir do centro decompõe-se esse pentágono em triângulos que são isósceles e congruentes, em cada um desses triângulos tem-se:

* base do triângulo, que corresponde ao lado do polígono e cuja medida vai-se indicar por ℓ .

* altura relativa à base do triângulo, que corresponde ao **apótema** do polígono e cuja medida vai-se indicar por **a**.

A área de cada triângulo é dada por $(\ell \cdot a)/2$.

Como são cinco triângulos, a área do polígono seria dada por:

$$5 \cdot (\ell \cdot a) / 2$$

Logo, a área de um polígono regular, é dada por $n \cdot (\ell \cdot a) / 2$, onde $n = n^\circ$ de lados do polígono.

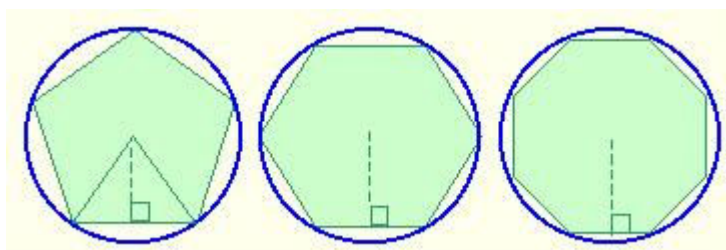
$$\text{Área de um polígono regular} = n \cdot (\ell \cdot a) / 2$$

- Ressalta-se aqui que a apótema é o maior cateto do triângulo retângulo formado pela hipotenusa que é o raio da circunferência a qual o polígono regular está circunscrito e o ângulo entre a hipotenusa (raio) e o cateto (lado do polígono/2) deverá ser obtido da fórmula:

$$A_i = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}, \text{ onde } n \text{ é o número de lados do polígono regular e } A_i \text{ deve ainda ser dividido por } 2.$$

CÍRCULO

Observa-se a seqüência de polígonos regulares inscritos numa Circunferência.



Repara-se que a medida que o número de lados aumenta, o polígono regular tende a se confundir com a região limitada pela **CIRCUNFERÊNCIA**, ou seja, o **CÍRCULO**. Assim:

* o perímetro do polígono regular tende a se confundir com o comprimento da **CIRCUNFERÊNCIA** ($C = 2 \cdot \pi \cdot r$).

* o semi-perímetro do polígono tende ao valor $2 \cdot \pi \cdot r / 2 = \pi \cdot r$.

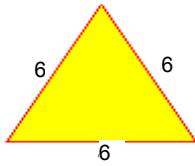
* o apótema do polígono, tende a coincidir com a altura, o raio do círculo, então:

$$\text{Área de um círculo} = \pi \cdot r \cdot r = \pi \cdot r^2$$

Exemplo:

- Tem-se um triângulo equilátero de lado 6 cm. Qual é o perímetro e qual é a área deste triângulo, sabendo-se que a altura é 6,71cm, independente ao lado que se referencia?

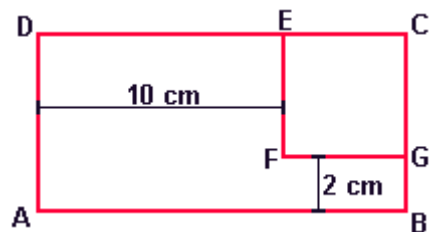
Resolução: O triângulo equilátero é o triângulo de três lados iguais, consequentemente três ângulos iguais
 $a \Rightarrow \hat{A} = 180^\circ / 3 = 60^\circ$



Tem-se que o perímetro de um triângulo é $P = 3 \cdot \ell = 3 \times 6 = 18 \text{ cm}$ e,

a área $\Rightarrow$ Área do triângulo $= (b \cdot h) / 2 = (6 \times 6,71) / 2 = 20,13 \text{ cm}^2$

- O retângulo ABCD tem área 105 m^2 . Qual a medida do lado do quadrado EFGC?



Resolução:

Como EFGC é um quadrado, e um quadrado é polígono de quatro lados iguais; vai-se pode-atribuir x ao seu lado.

Já para o retângulo ABCD, tem-se que a área $= 105 \text{ cm}^2$ e que também a área de um retângulo por definição é o produto dos lados, então:

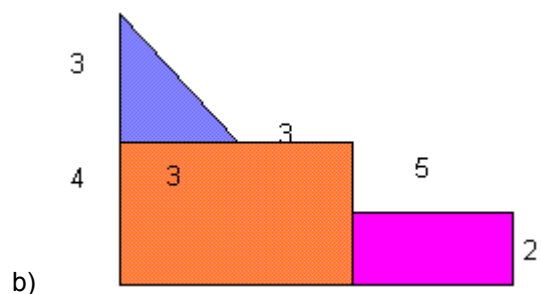
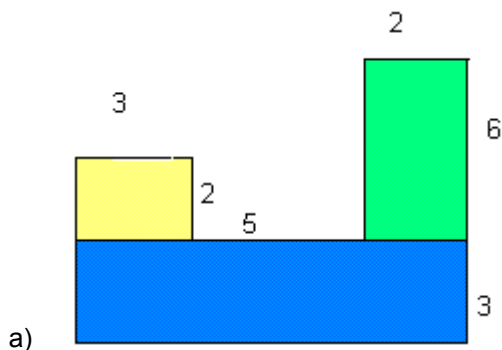
$$(10 + x) \times (2 + x) = 105 \rightarrow 20 + 10x + 2x + x^2 = 105 \rightarrow x^2 + 12x - 85 = 0$$

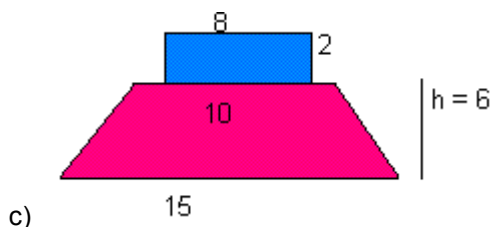
$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4(1 \cdot -85)}}{2 \cdot 1} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 340}}{2} = \frac{-12 \pm \sqrt{484}}{2} = \frac{-12 \pm 22}{2}$$

$x_1 = 5 \text{ cm}$ e $x_2 = -17 \text{ cm}$, como medida não pode ser negativa, logo só pode ser levada em consideração uma resposta $\Rightarrow x = 5 \text{ cm}$.

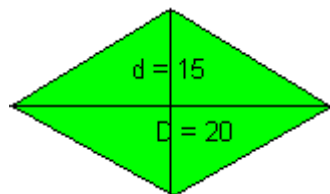
Exercícios Propostos:

1) Determine a área das seguintes figuras (em cm):





d)



Respostas: a) 33 cm^2 b) $38,5 \text{ cm}^2$ c) 91 cm^2 d) 150 cm^2

2) Um trapézio tem a base menor igual a 2, a base maior igual a 3 e a altura igual a 10. Qual a área deste trapézio? $\Rightarrow 25$

3) Sabendo que a área de um quadrado é 36 cm^2 , qual é seu perímetro? $\Rightarrow A = 36$, mas $A = \ell \cdot \ell \therefore \ell = \sqrt{A}$
 $\therefore \ell = \sqrt{36} = 6 \therefore P = 4 \cdot \ell = 24 \text{ cm}$

4) Calcular a área dos quadriláteros indicados a seguir:

- Quadrado com perímetro 12 cm . $\Rightarrow 9 \text{ cm}^2$
- Retângulo com comprimento 3 cm e perímetro 10 cm . $\Rightarrow 6 \text{ cm}^2$
- Quadrado com perímetro $12\sqrt{3} \text{ cm}$. $\Rightarrow 27 \text{ cm}^2$