TRIGONOMETRIA

1 Introdução

Descutir-se qual o significado que se deve dar ao termo ***Trigonometria****;* tomando-se como a ciência analítica estudada atualmente, tem-se então a origem da Trigonometria no século XVII, após o desenvolvimento do simbolismo algébrico. Mas se considerar o significado da geometria acoplada à Astronomia, as origens remontarão aos trabalhos de Hiparco, no século **II** a.C embora existam traços anteriores de seu uso.

Se ao considerar, ainda, para significar literalmente medidas do triângulo a origem será no segundo ou terceiro milênio antes de Cristo.

Estudar a história da trigonometria também permite observar o surgimento e o progresso da Análise e da Álgebra, campos da Matemática nela contidos de forma embrionária. A trigonometria, mais que qualquer ramo da matemática, desenvolveu-se no mundo antigo a partir de necessidades práticas, principalmente ligadas à Astronomia, Agrimensura e Navegação.

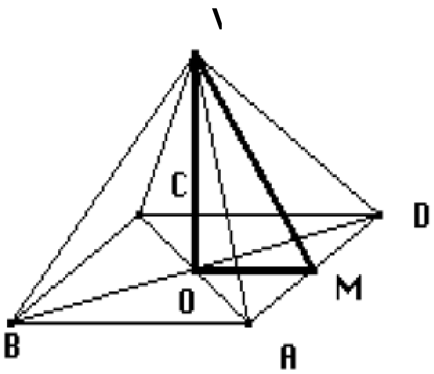
Os primeiros indícios de rudimentos de trigonometria surgiram tanto no Egito quanto na Babilônia, a partir do cálculo de razões entre números e entre lados de triângulos semelhantes.

No Egito, isto pode ser observado no Papiro **Ahmes,** conhecido como Papiro **Rhind[3]**, que data de aproximadamente 1650 a.C., e contém 84 problemas, dos quais quatro fazem menção ao **seqt** de um ângulo. Ahmes não foi claro ao expressar o significado desta palavra mas, pelo contexto, pensa-se que o **seqt** de uma pirâmide regular seja equivalente, hoje, à cotangente do ângulo **OMV** .

Exemplo:

Seja **OV** = 40 e **OM** = 80,
então o **seqt** = 80/40

isto é: **seqt = 2**



Na construção das pirâmides era essencial manter uma inclinação constante das faces, o que levou os egípcios a introduzirem o conceito de **seqt**, que representava a razão entre afastamento horizontal e elevação vertical.

Além da utilização da trigonometria nas medições das pirâmides, apareceu no Egito (1500 a.C. aproximadamente) a idéia de associar sombras projetadas por uma vara vertical a seqüências numéricas, relacionando seus comprimentos com horas do dia (relógios de sol).

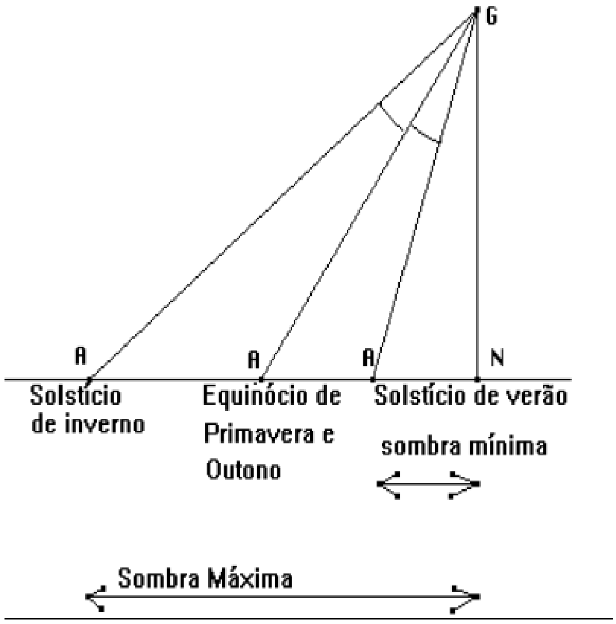
Poderíamos dizer então que essas idéias estavam anunciando a chegada, séculos depois, das **funções,** tangente e cotangente. Os predecessores da tangente e da cotangente, no entanto, surgiram de modestas necessidades de medição de alturas e distâncias.

No mundo Ocidental, o saber dos egípcios foi seguido pelo dos gregos. É reconhecido que, se os egípcios foram seus mestres, não tardou para que estes fossem superados pelos discípulos. Na Grécia a Matemática teve um grande desenvolvimento, e a civilização grega passou a servir de preceptora a todas as outras nações.

Segundo o historiador **Heródoto** (490 - 420 a.C.), foram os gregos que deram o nome **gnômon** ao relógio de sol que chegou até eles através dos babilônios, embora já tivesse sido utilizado pelos egípcios antes de 1500 a.C..

O mais antigo gnômon de que temos conhecimento e que chegou até nossos dias, está no museu de Berlim (Eves, 1995). Ele evidencia e reforça a hipótese de que a trigonometria foi uma ferramenta essencial para observação dos fenômenos astronômicos pelos povos antigos, uma vez que a documentação relativa a esse período é praticamente inexistente.

O gnômon era uma vareta (GN na figura abaixo) que se espetava no chão, formando com ele um ângulo de 90º, e o comprimento de sua sombra (AN) era observado, num horário determinado: meio dia. Uma observação dos limites da sombra permitia medir a duração do ano e o movimento lateral diário do ponto A permitia medir a duração do dia.



Como o tamanho do gnômon era constante, ou seja, usava-se sempre a mesma vareta, na mesma posição, o comprimento de **AN** ao meio dia variava com o ângulo **A**. Para nós isto significa uma colocação de **AN**, ou **AN/GN** como uma função do ângulo **A,** nos dias de hoje denominada cotangente. Porém, não temos nenhum vestígio do nome no período.

O desenvolvimento da trigonometria está intimamente ligado ao da geometria. Neste campo, a Grécia produziu grandes sábios; entre eles **Thales** (625 - 546 a.C.), com seus estudos de semelhança que embasam a trigonometria, e seu discípulo **Pitágoras** (570 - 495 a.C.). Conjectura-se que este último tenha feito a primeira demonstração do teorema que leva seu nome: *"Em todo triângulo retângulo a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos."* Deste teorema deriva a relação fundamental da trigonometria.

2 O Triângulo Retângulo e Pitágoras

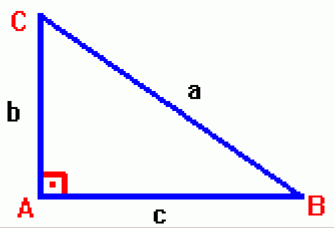
Foi visto anteriormente, que um triângulo possui um ângulo reto, isto é, um dos seus ângulos mede noventa graus, daí o nome triângulo retângulo. Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, então os outros dois ângulos medirão 90°.

Observação: Se a soma de dois ângulos mede 90°, estes ângulos são denominados complementares, portanto podemos dizer que o triângulo retângulo possui dois ângulos complementares.

2.1 Nomenclatura do Triângulo Retângulo

Os lados de um triângulo retângulo recebem nomes especiais. Estes nomes são dados de acordo com a posição em relação ao ângulo reto. O lado oposto ao ângulo reto é a **hipotenusa**. Os lados que formam o ângulo reto (adjacentes a ele) são os **catetos**.

Para padronizar o estudo da Trigonometria, adota-se as seguintes notações:

Letra	Lado	Triângulo	Vértice = Ângulo	Medida
a	Hipotenusa		A = Ângulo reto	A =90°
b	Cateto		B = Ângulo agudo	B <90°
c	Cateto		C = Ângulo agudo	C <90°

2.2 Teorema de Pitágoras

Como já mencionado anteriormente no módulo de Geometria Plana e agora na introdução, Pitágoras, um grande matemático grego, discípulo de Thales, formulou um Teorema estabelecendo uma relação entre os lados do triângulo retângulo, onde este Teorema passou a se chamar **Teorema de Pitágoras**; e assim estabelecido:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

Ou seja, Esse talvez seja o principal teorema que expressa uma relação métrica para os lados de um triângulo retângulo.

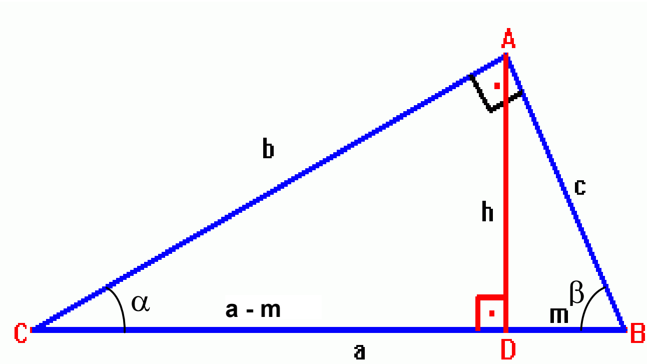
"O quadrado da medida da hipotenusa de um triangulo retângulo é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos".

Veja que na figura abaixo, há uma série de semelhanças de triângulos. No caso, as mais interessantes na demonstração do teorema são: ΔBEA ≈ ΔCAE ≈ ΔABC. Com isso é possível estabelecer algumas relações que:

$$\frac{h}{c} = \frac{b}{a} \Rightarrow h = \frac{b.c}{a} \quad (\text{I})$$

Existe também a relação:

$$\frac{a - m}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow b^2 = a^2 - a.m \quad (\text{II})$$



E ainda uma terceira relação $\rightarrow \frac{m}{c} = \frac{h}{b} \Rightarrow m = \frac{c.h}{b}$ (III)

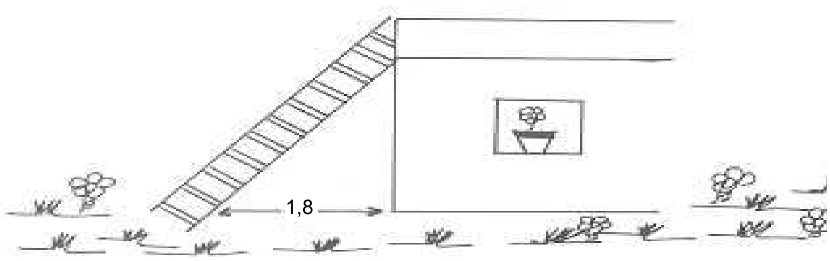
Substituindo (I) em (III) $\Rightarrow m = \frac{c.h}{b} \Rightarrow m = \frac{c}{b} \cdot \frac{b.c}{a} = \frac{c^2}{a} \therefore m = \frac{c^2}{a}$ (IV)

Substituindo (IV) em (II) $\Rightarrow b^2 = a^2 - a.\frac{c^2}{a} \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 \therefore$ **$a^2 = b^2 + c^2$**

Que é o que queríamos demonstrar

Exemplos:

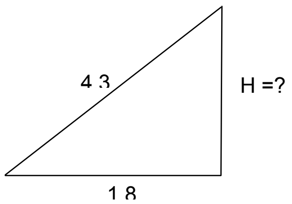
1) Para executar um serviço, o trabalhador apoiou na laje de sua casa a escada de 4,3 m de comprimento como mostra o esquema abaixo:



A base da escada, apoiada sobre um piso horizontal está afastada 1,8 m da parede. Qual é a altura aproximada da construção?

Resolução:

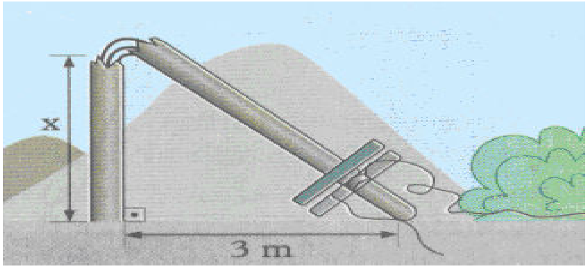
Se a escada tem comprimento de 4,3 m então a hipotenusa é o próprio comprimento da escada:



Então se tem um triângulo retângulo onde a hipotenusa é 4,3 m e a altura que deseja-se saber é um dos catetos, então:

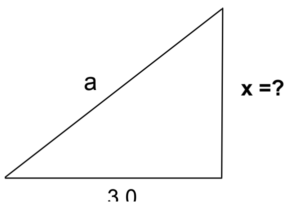
$4{,}3^2 = 1{,}8^2 + H^2 \Rightarrow H^2 = 4{,}3^2 - 1{,}8^2 \Rightarrow H^2 = 15{,}25 \therefore$ **H = 3,90 m**

2) (UFPel-RS) Em um recente vendaval, um poste de luz de 9 metros de altura quebrou-se em um ponto a distância x do solo. A parte do poste acima da fratura inclinou-se e sua extremidade superior encostou no solo a uma distância de 3 m da base do mesmo. A que altura x do solo o poste quebrou?



Resolução:

O triângulo retângulo é constituído, além da altura "x" de incógnita, também da hipotenusa "a" :



Porém é sabido que o poste (x + a) mede 9,0 m $\therefore$ x + a = 9 $\rightarrow$ a = 9 – x (I)

Relaciona-se então os lados pelo Teorema de Pitágoras $\Rightarrow$ $a^2 = 3^2 + x^2$ (II);

Substituindo (I) em (II) $\Rightarrow$ $(9 - x)^2 = 9 + x^2 \rightarrow 9^2 - 18x + x^2 = 9 + x^2 \rightarrow 81 - 18x = 9 \Rightarrow$ **x = 4,0 m**

3 Razões Trigonométricas e Círculo Trigonemétrico

3.1 Razões Trigonométricas

Tendo como base o triângulo retângulo da página 3 que relaciona a semelhança entre triângulos (ΔBEA $\approx$ ΔCAE $\approx$ ΔABC) para demonstrar o Teorema de Pitágoras, podemos definir algumas relações que envolvem os ângulos (α) e (β) do triângulo retângulo. São elas o **seno, o co-seno** e a **tangente**. Definimos essas linhas trigonométricas da seguinte forma:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{cat. oposto à } \alpha}{\text{hipotenusa}} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{cat. adjacente à } \alpha}{\text{hipotenusa}} \qquad \tan\alpha = \frac{\text{cat. oposto à } \alpha}{\text{cat. adjacente à } \alpha}$$

Tem-se então o quadro a seguir:

ângulos	*sen*	*cos*	*tan*
α	$\text{sen}\,\alpha = \frac{c}{a}$	$\cos\alpha = \frac{b}{a}$	$\tan\alpha = \frac{c}{b}$
β	$\text{sen}\,\beta = \frac{b}{a}$	$\cos\beta = \frac{c}{a}$	$\tan\beta = \frac{b}{c}$

Percebe-se que para quaisquer α e β ⇒ sen α = cos β e sen β = cos α assim, fica aqui então estabelecida uma das relações mais importantes da Trigonometria:

$$\text{sen}\,\alpha = \cos(90° - \alpha)$$

"O seno de um ângulo é igual ao cosseno do seu complementar"

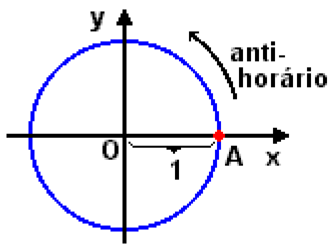
Existem outras razões trigonométricas chamadas de cosecante (cosec), secante (sec) e cotangente (cotan) que nada mais são do que os inversos dos anteriores respectivamente.

Será percebido no próximo item, que para cada ângulo corresponde um valor de uma razão trigonométrica pré-estabelecida e tabelada, no caso, atualmente (não tão atualmente mais) nas calculadoras científicas já constam tais valores embutidos.

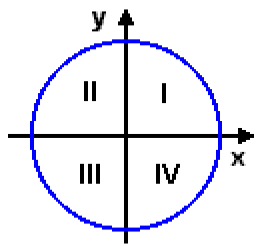
Mas como isto? Com o assunto do círculo trigonométrico ficará claro o entendimento.

3.2 Círculo Trigonométrico

Considere uma circunferência de raio unitário com centro na origem de um sistema cartesiano ortogonal e o ponto A=(1,0). O ponto A será tomado como a origem dos arcos orientados nesta circunferência e o sentido positivo considerado será o anti-horário. A região contendo esta circunferência, e todos os seus pontos interiores, é denominada ***círculo trigonométrico.***



Os eixos OX e OY decompõem o círculo trigonométrico em quatro quadrantes que são enumerados como segue:

II° quadrante abscissa: negativa ordenada: positiva 90º<ângulo<180º		**I° quadrante** abscissa: positiva ordenada: positiva 0º<ângulo<90º
III° quadrante abscissa: negativa ordenada: negativa 180º<ângulo<270º		**IV° quadrante** abscissa: positiva ordenada: negativa 270º<ângulo<360º

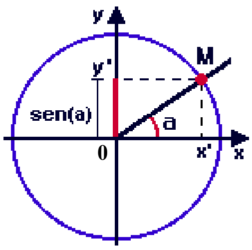
Os quadrantes são usados para localizar pontos e a caracterização de ângulos trigonométricos. Por convenção, os pontos situados sobre os eixos não pertencem a qualquer um dos quadrantes.

As razões trigonométricas são estipuladas (ou encontradas) pelo círculo trigonométrico a saber:

- **Seno**

No plano cartesiano, consideremos uma circunferência trigonométrica, de centro em (0,0) e raio unitário. Seja M=(x',y') um ponto desta circunferência, localizado no primeiro quadrante, este ponto determina um arco AM que corresponde ao ângulo central a. A projeção ortogonal do ponto M sobre o eixo OX determina um ponto C=(x',0) e a projeção ortogonal do ponto M sobre o eixo OY determina outro ponto B=(0,y').

A medida do segmento OB coincide com a ordenada y' do ponto M e é definida como o seno do arco AM que corresponde ao ângulo a, denotado por sen(AM) ou sen(a).



Como tem-se várias determinações para o mesmo ângulo, escreve-se ⇒

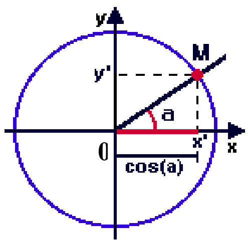
$$\mathbf{sen(AM) = sen(a) = sen(a+2k\pi) = y'}$$

Na verdade, o seno representa a medida de projeção do eixo **y** do ângulo **a** no círculo trigonométrico de raio unitário, ou mesmo, pela relação anteriormente passada, agora para o triângulo **0x'M** ⇒

$\text{sen}\,\mathbf{a} = \dfrac{x'M}{0M}$ Porém, $x'M = y'$ e $0M = 1 \therefore \text{sen}\,\mathbf{a} = y'$, **onde os valores variam de 0 a 1 para os ângulos do I° e II° Quadrantes; e variam de 0 a -1 para ângulos do III° e IV° Quadrantes.**

- **Cosseno**

O cosseno do arco AM correspondente ao ângulo **a**, denotado por cos(AM) ou cos(a), é a medida do segmento 0C, que coincide com a abscissa x' do ponto M.



Como antes, existem várias determinações para este ângulo, razão pela qual, escreve-se ⇒

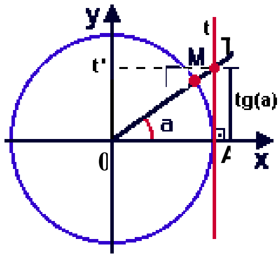
$$\mathbf{cos(AM) = cos(a) = cos(a+2k\pi) = x'}$$

Na verdade, o co-seno representa a medida de projeção do eixo **x** do ângulo **a** no círculo trigonométrico de raio unitário, ou mesmo, pela relação anteriormente passada, agora para o triângulo **0x'M** ⇒

$\cos\mathbf{a} = \dfrac{0x'}{0M}$ Porém, $0x' = x'$ e $0M = 1 \therefore \cos\mathbf{a} = x'$, **onde os valores variam de 0 a 1 para os ângulos do I° e IV° Quadrantes; e variam de 0 a -1 para ângulos do II° e III° Quadrantes.**

- **Tangente**

Seja a reta t tangente à circunferência trigonométrica no ponto A =(1,0). Tal reta é perpendicular ao eixo OX. A reta que passa pelo ponto M e pelo centro da circunferência intersecta a reta tangente t no ponto T=(1,t'). A ordenada deste ponto T, é definida como a tangente do arco AM correspondente ao ângulo a.



Assim a tangente do ângulo **a** é dada pelas suas várias determinações⇒

tan(AM) = tan(a) = tan(a+kπ) = AT = medida do segmento AT, onde os valores variam de 0 a + ∞ para os ângulos do I° e III° Quadrantes; e variam de 0 a -∞ para ângulos do II° e IV° Quadrantes.

Deve-se ressaltar aqui uma importante relação trigonométrica, se para o mesmo triângulo que se tiraram as razões trigonométricas fazer-se as seguintes considerações:

$\text{sen}\,\alpha = \frac{c}{a} \Rightarrow c = \text{sen}\,\alpha.a$ e $\cos\alpha = \frac{b}{a} \Rightarrow b = \cos\alpha.a$, e se $\tan\alpha = \frac{c}{b} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha.\cancel{a}}{\cos\alpha.\cancel{a}}$

$\therefore\ \tan\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$ ⇒ **tangente em função do seno e co-seno**.

Mais uma relação que se pode observar é que, ao se observar o círculo trigonométrico novamente, e notar-se que Ox'M é um triângulo retângulo onde os lados Ox' = x' = cos a e x'M = y' = sen a são os catetos, e ainda, OM = 1 é a própria hipotenusa, então pela relação Pitagórica, pode-se afirmar que:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

A título de informação e ilustração, passa-se a seguir como era feito antes do aparecimento das calculadoras científicas; ou seja, eram utilizadas tabelas de senos e co-senos; hoje em dia (e já há algum tempo) estes valores já constam embutidos nas calculadoras.

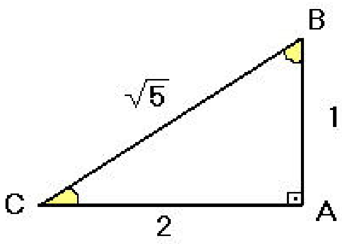
Ao final deste Módulo vão-se repassar as Tabelas Trigonométricas, onde são relacionados os valores de seno, co-seno e tangente para os ângulos 0° a 90°.

Existem alguns ângulos notáveis e é necessário que se conheça o seno, o cosseno e a tangente desses arcos. Veja a tabela abaixo:

Ângulos	0°	30°	45°	60°	90°
seno	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cosseno	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
tangente	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	∞

Exemplos:

1) Calcular o sen, cos e tg dos ângulos agudos (B e C) do triângulo retângulo abaixo:



Resolução:

$\textbf{sen}\,C = \frac{C.O}{HIP} = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0{,}447 \therefore \quad \textbf{sen}\,C = 0{,}447 \qquad \textbf{sen}\,B = \frac{C.O}{HIP} = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0{,}894 \therefore \quad \textbf{sen}\,B = 0{,}894$

$\cos C = \frac{C.A}{HIP} = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0{,}894 \therefore \quad \textbf{cos}\,C = 0{,}894 \qquad \textbf{cos}\,B = \frac{C.A}{HIP} = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0{,}447 \therefore \quad \textbf{cos}\,B = 0{,}447$

$\tan C = \frac{C.O}{C.A} = \frac{1}{2} = 0{,}500 \therefore \quad \textbf{tan}\,C = 0{,}500 \qquad \tan B = \frac{C.O}{C.A} = \frac{2}{1} = 2{,}000 \therefore \quad \textbf{tan}\,B = 2{,}000$

Pode-se ainda, e o que é o mais usual, descobrir-se ângulos de um triângulo retângulo em função dos lados.

Então no caso, com o auxílio das Tabelas Trigonométricas, das páginas 13 a 18, com as razões trigonométricas pode encontrar-se, também, o valor dos ângulos agudos dos triângulos retângulos.

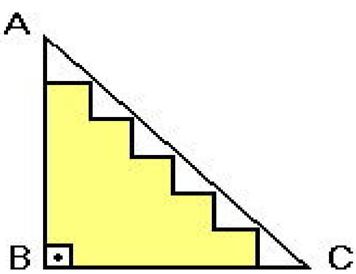
Neste caso $\Rightarrow$ para o ângulo C, por exemplo pega-se o seno = 0,447 $\rightarrow$ pág. 13 (podia ser pego o cosseno ou mesmo a tangente que remeteria ao mesmo ângulo) $\rightarrow \hat{C} \cong 26°\ 30'$

$\Rightarrow$ para o ângulo B, por exemplo pega-se o seno = 0,894 $\rightarrow$ pág. 14 (podia ser pego o cosseno ou mesmo a tangente que remeteria ao mesmo ângulo) $\rightarrow \hat{B} \cong 63°\ 30'$

É facilmente percebido que os dois ângulos são complementares, como não poderia deixar de ser.

2) A figura representa o perfil de uma escada cujos degraus têm todos a mesma extensão, além da mesma altura. Se AB = 2 m e BCA mede 30º, então a medida da extensão de cada degrau é:

Resolução:



Tem-se o ângulo C = 30° e o lado AB = 2,0 m, ou seja, AB é o cateto oposto ao ângulo C.

$\therefore$ a extensão de cada degrau será a medida AC dividida por 6, que é justamente a quantidade de degraus.

$\therefore$ o que se quer saber então é a hipotenusa; se o que se tem é o ângulo, cateto oposto e a hipotenusa, logo a razão que relaciona isto tudo é:

$\cos 30° = \frac{2}{AC}$, pela tabela da pág. 8 $\rightarrow$ $\cos 30° = \sqrt{3}/2$

$\therefore \quad AC = 2x\sqrt{3}/2 = \sqrt{3} \quad \therefore$ cada degrau será $\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{6}}$

4 Lei dos Cossenos e Lei dos Senos

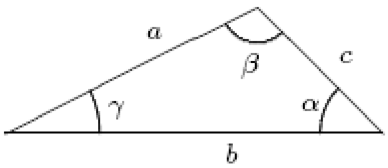
Até o momento, foram vistas razões e relações (e ainda o Teorema de Pitágoras) todas relacionadas à resolução do Triângulo retângulo.

Como fora visto anteriormente, o Triângulo Retângulo é um dos casos de Triângulo, pois o que na verdade é condição necessária para a formação desta figura geométrica são três ângulos internos (somando 180°) e três lados.

A Lei dos Cossenos e Lei dos Senos são dois processos de resolução de Triângulos quaisquer, com suas particularidades é claro.

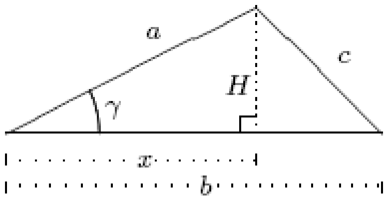
- **Lei dos Cossenos**

Então para um triângulo qualquer de ângulos α, β e γ e lados opostos, **a**, **b** e **c** aos respectivos ângulos tem-se a seguinte condição:



$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2\,a\,c\cos\beta \\ c^2 &= b^2 + a^2 - 2\,b\,a\cos\gamma \end{aligned}}$$

Dedução da Lei dos Cossenos $\Rightarrow$ por exemplo para o ângulo $\gamma \rightarrow$



Passa-se então a ter dois triângulos retângulos, onde primeiramente $\rightarrow$

$$\cos\gamma = \frac{x}{a} \therefore x = a.\cos\gamma \text{ (I)} \quad \text{e} \quad a^2 = H^2 + x^2 \therefore H^2 = a^2 - x^2 \text{ (II)}$$

Do triângulo da direita tem-se $\rightarrow c^2 = H^2 + (b - x)^2 = H^2 + b^2 - 2bx + x^2$ (III)

Substituindo (I) e (II) em (III) $\Rightarrow c^2 = a^2 - x^2 + b^2 - 2\,b\,a\cos\gamma + x^2 \therefore$

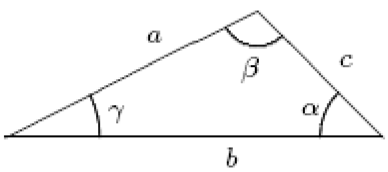
$$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\gamma}$$

Pode-se reparar que a Lei dos Cossenos recai no Teorema de Pitágoras quando o lado e o ângulo analisados, forem respectivamente a hipotenusa e o ângulo reto; pois então:

$\gamma = 90° \rightarrow \cos 90° = 0 \therefore$ $\mathbf{-2\,a\,b\cos\gamma = 0}$

- **Lei dos Senos**

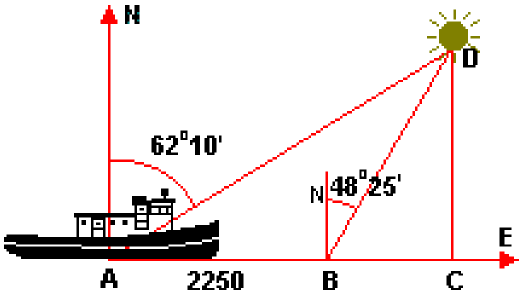
Então para um triângulo qualquer de ângulos α, β e γ e lados opostos, **a**, **b** e **c** aos respectivos ângulos tem-se a seguinte condição:



______ = ______ = ______

Exemplos:

1) Um navio navega para Leste quando uma luz é observada no rumo N 62º10'L. Depois que o navio percorre 2250m, a luz está no rumo N48º25'L. Se o curso do navio for mantido qual será a maior aproximação que o navio terá da luz?



Resolução:

Deseja-se saber a distância DC; só que diretamente não se tem condições. Resolve-se o triângulo ABD qualquer, mais propriamente dito a medida BD (através da Lei dos Senos, pois somente é fornecido dói ângulos e um lado), para então obter-se DC, uma vez que BCD é um triângulo retângulo.

⇒ Para o Triângulo ABD:

$\hat{A} = 90° - 62°10' = 27°50'$ e $\hat{B} = 90° + 48°25' = 138°25'$ logo $\hat{D} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 13°45'$

Pela Lei dos Senos ⇒ ——— = ——— ⇒ BD = ————— , pelas Tabelas das Págs 13 a 18 →

——— = ——— ⇒ BD = ————— = ——————— ≅ 4420 m

⇒ Para o Triângulo BCD:

$\hat{B} = 90° - 48°25' = 41°35'$ logo $\hat{D} = 180° - (90° + \hat{B}) = 48°25'$

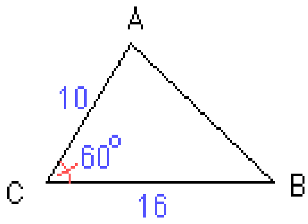
Se o que existe é a hipotenusa (BD) e os ângulos e resta calcular o cateto maior (DC), então analisa-se este cateto e chega-se a conclusão de ser ele o cateto adjacente do ângulo D e cateto oposto do ângulo B; logo, é indiferente a razão trigonométrica que irá se tomar (seno ou cosseno do respectivo ângulo)⇒

Como exemplo aplica-se o ângulo B

→ = —— ⇒ DC = = ≅

$\therefore$ **BD ≅ 2920 m**

2) Dado o triângulo ABC e sabendo que o lado *a* mede 16 , o lado *b* mede 10 e o ângulo formado por estes lados é 60^o, quais são os valores dos outros elementos (lado *c* , e ângulos *A* e *B*) do triângulo.



Resolução:

Como não se tem o lado oposto ao ângulo conhecido e tão pouco os outros ângulos correspondentes aos lados conhecidos, resta tão somente a utilização da Lei dos Cossenos.

⇒ Por convenção própria utilizarei letras minúsculas correspondentes aos ângulos opostos.

$\therefore$ $c^2 = 16^2 + 10^2 - 2x\ 10x\ 16\ x\ \cos 60° = 256 + 100 – 2\ x\ (160\ x\ 0{,}5) = 356 – 160 = 276$ $\therefore$ $c = 14$

Agora que já se conhece os três lados deste triângulo, pode-se calcular os outros ângulos. E, usando novamente a lei dos cossenos tem-se:

Ângulo A

$\therefore$ $16^2 = 10^2 + 14^2 - 2x\ 10x\ 14\ x\ \cos A \Rightarrow 256 = 100 + 196 – 280 \cos A \rightarrow 280 \cos A = 256 – 296 = - 40$

$\Rightarrow \cos A = -40 / -280 = 0{,}1429 \rightarrow$ **Ângulo A = 81° 50'**

Ângulo B

$\therefore$ $10^2 = 16^2 + 14^2 - 2x\ 16x\ 14\ x\ \cos B \Rightarrow 100 = 256 + 196 – 448 \cos A \rightarrow$

$-448 \cos A = 100 – 452 = - 352 \Rightarrow \cos A = -352 / -448 = 0{,}7857 \rightarrow$ **Ângulo A = 8° 10'**

TABELA DE SENOS
0° – 45°

graus \ minutos	0	10	20	30	40	50
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01454
1	0,01745	0,02036	0,02327	0,02618	0,02908	0,03199
2	0,03490	0,03781	0,04071	0,04362	0,04653	0,04943
3	0,05234	0,05524	0,05814	0,06105	0,06395	0,06685
4	0,06976	0,07266	0,07556	0,07846	0,08136	0,08426
5	0,08716	0,09005	0,09295	0,09585	0,09874	0,10164
6	0,10453	0,10742	0,11031	0,11320	0,11609	0,11898
7	0,12187	0,12476	0,12764	0,13053	0,13341	0,13629
8	0,13917	0,14205	0,14493	0,14781	0,15069	0,15356
9	0,15643	0,15931	0,16218	0,16505	0,16792	0,17078
10	0,17365	0,17651	0,17937	0,18224	0,18509	0,18795
11	0,19081	0,19366	0,19652	0,19937	0,20222	0,20507
12	0,20791	0,21076	0,21360	0,21644	0,21928	0,22212
13	0,22495	0,22778	0,23062	0,23345	0,23627	0,23910
14	0,24192	0,24474	0,24756	0,25038	0,25320	0,25601
15	0,25882	0,26163	0,26443	0,26724	0,27004	0,27284
16	0,27564	0,27843	0,28123	0,28402	0,28680	0,28959
17	0,29237	0,29515	0,29793	0,30071	0,30348	0,30625
18	0,30902	0,31178	0,31454	0,31730	0,32006	0,32282
19	0,32557	0,32832	0,33106	0,33381	0,33655	0,33929
20	0,34202	0,34475	0,34748	0,35021	0,35293	0,35565
21	0,35837	0,36108	0,36379	0,36650	0,36921	0,37191
22	0,37461	0,37730	0,37999	0,38268	0,38537	0,38805
23	0,39073	0,39341	0,39608	0,39875	0,40142	0,40408
24	0,40674	0,40939	0,41204	0,41469	0,41734	0,41998
25	0,42262	0,42525	0,42788	0,43051	0,43313	0,43575
26	0,43837	0,44098	0,44359	0,44620	0,44880	0,45140
27	0,45399	0,45658	0,45917	0,46175	0,46433	0,46690
28	0,46947	0,47204	0,47460	0,47716	0,47971	0,48226
29	0,48481	0,48735	0,48989	0,49242	0,49495	0,49748
30	0,50000	0,50252	0,50503	0,50754	0,51004	0,51254
31	0,51504	0,51753	0,52002	0,52250	0,52498	0,52745
32	0,52992	0,53238	0,53484	0,53730	0,53975	0,54220
33	0,54464	0,54708	0,54951	0,55194	0,55436	0,55678
34	0,55919	0,56160	0,56401	0,56641	0,56880	0,57119
35	0,57358	0,57596	0,57833	0,58070	0,58307	0,58543
36	0,58779	0,59014	0,59248	0,59482	0,59716	0,59949
37	0,60182	0,60414	0,60645	0,60876	0,61107	0,61337
38	0,61566	0,61795	0,62024	0,62251	0,62479	0,62706
39	0,62932	0,63158	0,63383	0,63608	0,63832	0,64056
40	0,64279	0,64501	0,64723	0,64945	0,65166	0,65386
41	0,65606	0,65825	0,66044	0,66262	0,66480	0,66697
42	0,66913	0,67129	0,67344	0,67559	0,67773	0,67987
43	0,68200	0,68412	0,68624	0,68835	0,69046	0,69256
44	0,69466	0,69675	0,69883	0,70091	0,70298	0,70505
45	0,70711	0,70916	0,71121	0,71325	0,71529	0,71732

TABELA DE SENOS 45° – 90°						
graus \ minutos	0	10	20	30	40	50
45	0,70711	0,70916	0,71121	0,71325	0,71529	0,71732
46	0,71934	0,72136	0,72337	0,72537	0,72737	0,72937
47	0,73135	0,73333	0,73531	0,73728	0,73924	0,74120
48	0,74314	0,74509	0,74703	0,74896	0,75088	0,75280
49	0,75471	0,75661	0,75851	0,76041	0,76229	0,76417
50	0,76604	0,76791	0,76977	0,77162	0,77347	0,77531
51	0,77715	0,77897	0,78079	0,78261	0,78442	0,78622
52	0,78801	0,78980	0,79158	0,79335	0,79512	0,79688
53	0,79864	0,80038	0,80212	0,80386	0,80558	0,80730
54	0,80902	0,81072	0,81242	0,81412	0,81580	0,81748
55	0,81915	0,82082	0,82248	0,82413	0,82577	0,82741
56	0,82904	0,83066	0,83228	0,83389	0,83549	0,83708
57	0,83867	0,84025	0,84182	0,84339	0,84495	0,84650
58	0,84805	0,84959	0,85112	0,85264	0,85416	0,85567
59	0,85717	0,85866	0,86015	0,86163	0,86310	0,86457
60	0,86603	0,86748	0,86892	0,87036	0,87178	0,87321
61	0,87462	0,87603	0,87743	0,87882	0,88020	0,88158
62	0,88295	0,88431	0,88566	0,88701	0,88835	0,88968
63	0,89101	0,89232	0,89363	0,89493	0,89623	0,89752
64	0,89879	0,90007	0,90133	0,90259	0,90383	0,90507
65	0,90631	0,90753	0,90875	0,90996	0,91116	0,91236
66	0,91355	0,91472	0,91590	0,91706	0,91822	0,91936
67	0,92050	0,92164	0,92276	0,92388	0,92499	0,92609
68	0,92718	0,92827	0,92935	0,93042	0,93148	0,93252
69	0,93358	0,93462	0,93565	0,93667	0,93769	0,93869
70	0,93969	0,94068	0,94167	0,94264	0,94361	0,94457
71	0,94552	0,94646	0,94740	0,94832	0,94924	0,95015
72	0,95106	0,95195	0,95284	0,95372	0,95459	0,95545
73	0,95630	0,95715	0,95799	0,95882	0,95964	0,96046
74	0,96126	0,96206	0,96285	0,96363	0,96440	0,96517
75	0,96593	0,96667	0,96742	0,96815	0,96887	0,96959
76	0,97030	0,97100	0,97169	0,97237	0,97304	0,97371
77	0,97437	0,97502	0,97566	0,97630	0,97692	0,97754
78	0,97815	0,97875	0,97934	0,97992	0,98050	0,98107
79	0,98163	0,98218	0,98272	0,98325	0,98378	0,98430
80	0,98481	0,98531	0,98580	0,98629	0,98676	0,98723
81	0,98769	0,98814	0,98858	0,98902	0,98944	0,98986
82	0,99027	0,99067	0,99106	0,99144	0,99182	0,99219
83	0,99255	0,99290	0,99324	0,99357	0,99390	0,99421
84	0,99452	0,99482	0,99511	0,99540	0,99567	0,99594
85	0,99619	0,99644	0,99668	0,99692	0,99714	0,99736
86	0,99756	0,99776	0,99795	0,99813	0,99831	0,99847
87	0,99863	0,99878	0,99892	0,99905	0,99917	0,99929
88	0,99939	0,99949	0,99958	0,99966	0,99973	0,99979
89	0,99985	0,99989	0,99993	0,99996	0,99998	0,99999
90	1,00000	–	–	–	–	–

TABELA DE CO-SENOS
0° – 45°

graus \ minutos	0	10	20	30	40	50
0	1,00000	0,99999	0,99998	0,99996	0,99993	0,99989
1	0,99985	0,99979	0,99973	0,99966	0,99958	0,99949
2	0,99939	0,99929	0,99917	0,99905	0,99892	0,99878
3	0,99863	0,99847	0,99831	0,99813	0,99795	0,99776
4	0,99756	0,99736	0,99714	0,99692	0,99668	0,99644
5	0,99619	0,99594	0,99567	0,99540	0,99511	0,99482
6	0,99452	0,99421	0,99390	0,99357	0,99324	0,99290
7	0,99255	0,99219	0,99182	0,99144	0,99106	0,99067
8	0,99027	0,98986	0,98944	0,98902	0,98858	0,98814
9	0,98769	0,98723	0,98676	0,98629	0,98580	0,98531
10	0,98481	0,98430	0,98378	0,98325	0,98272	0,98218
11	0,98163	0,98107	0,98050	0,97992	0,97934	0,97875
12	0,97815	0,97754	0,97692	0,97630	0,97566	0,97502
13	0,97437	0,97371	0,97304	0,97237	0,97169	0,97100
14	0,97030	0,96959	0,96887	0,96815	0,96742	0,96667
15	0,96593	0,96517	0,96440	0,96363	0,96285	0,96206
16	0,96126	0,96046	0,95964	0,95882	0,95799	0,95715
17	0,95630	0,95545	0,95459	0,95372	0,95284	0,95195
18	0,95106	0,95015	0,94924	0,94832	0,94740	0,94646
19	0,94552	0,94457	0,94361	0,94264	0,94167	0,94068
20	0,93969	0,93869	0,93769	0,93667	0,93565	0,93462
21	0,93358	0,93252	0,93148	0,93042	0,92935	0,92827
22	0,92718	0,92609	0,92499	0,92388	0,92276	0,92164
23	0,92050	0,91936	0,91822	0,91706	0,91590	0,91472
24	0,91355	0,91236	0,91116	0,90996	0,90875	0,90753
25	0,90631	0,90507	0,90383	0,90259	0,90133	0,90007
26	0,89879	0,89752	0,89623	0,89493	0,89363	0,89232
27	0,89101	0,88968	0,88835	0,88701	0,88566	0,88431
28	0,88295	0,88158	0,88020	0,87882	0,87743	0,87603
29	0,87462	0,87321	0,87178	0,87036	0,86892	0,86748
30	0,86603	0,86457	0,86310	0,86163	0,86015	0,85866
31	0,85717	0,85567	0,85416	0,85264	0,85112	0,84959
32	0,84805	0,84650	0,84495	0,84339	0,84182	0,84025
33	0,83867	0,83708	0,83549	0,83389	0,83228	0,83066
34	0,82904	0,82741	0,82577	0,82413	0,82248	0,82082
35	0,81915	0,81748	0,81580	0,81412	0,81242	0,81072
36	0,80902	0,80730	0,80558	0,80386	0,80212	0,80038
37	0,79864	0,79688	0,79512	0,79335	0,79158	0,78980
38	0,78801	0,78622	0,78442	0,78261	0,78079	0,77897
39	0,77715	0,77531	0,77347	0,77162	0,76977	0,76791
40	0,76604	0,76417	0,76229	0,76041	0,75851	0,75661
41	0,75471	0,75280	0,75088	0,74896	0,74703	0,74509
42	0,74314	0,74120	0,73924	0,73728	0,73531	0,73333
43	0,73135	0,72937	0,72737	0,72537	0,72337	0,72136
44	0,71934	0,71732	0,71529	0,71325	0,71121	0,70916
45	0,70711	0,70505	0,70298	0,70091	0,69883	0,69675

TABELA DE CO-SENOS
45° – 90°

minutos / graus	0	10	20	30	40	50
45	0,70711	0,70505	0,70298	0,70091	0,69883	0,69675
46	0,69466	0,69256	0,69046	0,68835	0,68624	0,68412
47	0,68200	0,67987	0,67773	0,67559	0,67344	0,67129
48	0,66913	0,66697	0,66480	0,66262	0,66044	0,65825
49	0,65606	0,65386	0,65166	0,64945	0,64723	0,64501
50	0,64279	0,64056	0,63832	0,63608	0,63383	0,63158
51	0,62932	0,62706	0,62479	0,62251	0,62024	0,61795
52	0,61566	0,61337	0,61107	0,60876	0,60645	0,60414
53	0,60182	0,59949	0,59716	0,59482	0,59248	0,59014
54	0,58779	0,58543	0,58307	0,58070	0,57833	0,57596
55	0,57358	0,57119	0,56880	0,56641	0,56401	0,56160
56	0,55919	0,55678	0,55436	0,55194	0,54951	0,54708
57	0,54464	0,54220	0,53975	0,53730	0,53484	0,53238
58	0,52992	0,52745	0,52498	0,52250	0,52002	0,51753
59	0,51504	0,51254	0,51004	0,50754	0,50503	0,50252
60	0,50000	0,49748	0,49495	0,49242	0,48989	0,48735
61	0,48481	0,48226	0,47971	0,47716	0,47460	0,47204
62	0,46947	0,46690	0,46433	0,46175	0,45917	0,45658
63	0,45399	0,45140	0,44880	0,44620	0,44359	0,44098
64	0,43837	0,43575	0,43313	0,43051	0,42788	0,42525
65	0,42262	0,41998	0,41734	0,41469	0,41204	0,40939
66	0,40674	0,40408	0,40142	0,39875	0,39608	0,39341
67	0,39073	0,38805	0,38537	0,38268	0,37999	0,37730
68	0,37461	0,37191	0,36921	0,36650	0,36379	0,36108
69	0,35837	0,35565	0,35293	0,35021	0,34748	0,34475
70	0,34202	0,33929	0,33655	0,33381	0,33106	0,32832
71	0,32557	0,32282	0,32006	0,31730	0,31454	0,31178
72	0,30902	0,30625	0,30348	0,30071	0,29793	0,29515
73	0,29237	0,28959	0,28680	0,28402	0,28123	0,27843
74	0,27564	0,27284	0,27004	0,26724	0,26443	0,26163
75	0,25882	0,25601	0,25320	0,25038	0,24756	0,24474
76	0,24192	0,23910	0,23627	0,23345	0,23062	0,22778
77	0,22495	0,22212	0,21928	0,21644	0,21360	0,21076
78	0,20791	0,20507	0,20222	0,19937	0,19652	0,19366
79	0,19081	0,18795	0,18509	0,18224	0,17937	0,17651
80	0,17365	0,17078	0,16792	0,16505	0,16218	0,15931
81	0,15643	0,15356	0,15069	0,14781	0,14493	0,14205
82	0,13917	0,13629	0,13341	0,13053	0,12764	0,12476
83	0,12187	0,11898	0,11609	0,11320	0,11031	0,10742
84	0,10453	0,10164	0,09874	0,09585	0,09295	0,09005
85	0,08716	0,08426	0,08136	0,07846	0,07556	0,07266
86	0,06976	0,06685	0,06395	0,06105	0,05814	0,05524
87	0,05234	0,04943	0,04653	0,04362	0,04071	0,03781
88	0,03490	0,03199	0,02908	0,02618	0,02327	0,02036
89	0,01745	0,01454	0,01164	0,00873	0,00582	0,00291
90	0,00000	–	–	–	–	–

TABELA DE TANGENTES
0° – 45°

graus \ minutos	0	10	20	30	40	50
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01455
1	0,01746	0,02036	0,02328	0,02619	0,02910	0,03201
2	0,03492	0,03783	0,04075	0,04366	0,04658	0,04949
3	0,05241	0,05533	0,05824	0,06116	0,06408	0,06700
4	0,06993	0,07285	0,07578	0,07870	0,08163	0,08456
5	0,08749	0,09042	0,09335	0,09629	0,09923	0,10216
6	0,10510	0,10805	0,11099	0,11394	0,11688	0,11983
7	0,12278	0,12574	0,12869	0,13165	0,13461	0,13758
8	0,14054	0,14351	0,14648	0,14945	0,15243	0,15540
9	0,15838	0,16137	0,16435	0,16734	0,17033	0,17333
10	0,17633	0,17933	0,18233	0,18534	0,18835	0,19136
11	0,19438	0,19740	0,20042	0,20345	0,20648	0,20952
12	0,21256	0,21560	0,21864	0,22169	0,22475	0,22781
13	0,23087	0,23393	0,23700	0,24008	0,24316	0,24624
14	0,24933	0,25242	0,25552	0,25862	0,26172	0,26483
15	0,26795	0,27107	0,27419	0,27732	0,28046	0,28360
16	0,28675	0,28990	0,29305	0,29621	0,29938	0,30255
17	0,30573	0,30891	0,31210	0,31530	0,31850	0,32171
18	0,32492	0,32814	0,33136	0,33460	0,33783	0,34108
19	0,34433	0,34758	0,35085	0,35412	0,35740	0,36068
20	0,36397	0,36727	0,37057	0,37388	0,37720	0,38053
21	0,38386	0,38721	0,39055	0,39391	0,39727	0,40065
22	0,40403	0,40741	0,41081	0,41424	0,41763	0,42105
23	0,42447	0,42791	0,43136	0,43481	0,43828	0,44175
24	0,44523	0,44872	0,45222	0,45573	0,45924	0,46277
25	0,46631	0,46985	0,47341	0,47698	0,48055	0,48414
26	0,48773	0,49134	0,49495	0,49858	0,50222	0,50587
27	0,50953	0,51320	0,51688	0,52057	0,52427	0,52798
28	0,53171	0,53545	0,53920	0,54296	0,54673	0,55051
29	0,55431	0,55812	0,56194	0,56577	0,56962	0,57348
30	0,57735	0,58124	0,58513	0,58905	0,59297	0,59691
31	0,60086	0,60483	0,60681	0,61280	0,61681	0,62083
32	0,62487	0,62892	0,63299	0,63707	0,64117	0,64528
33	0,64941	0,65355	0,65771	0,66189	0,66608	0,67028
34	0,67451	0,67875	0,68301	0,68728	0,69157	0,69588
35	0,70021	0,70455	0,70891	0,71329	0,71769	0,72211
36	0,72654	0,73100	0,73547	0,73996	0,74447	0,74900
37	0,75355	0,75812	0,76272	0,76733	0,77196	0,77661
38	0,78129	0,78598	0,79070	0,79544	0,80020	0,80498
39	0,80978	0,81461	0,81946	0,82434	0,82923	0,83415
40	0,83910	0,84407	0,84906	0,85408	0,85912	0,86419
41	0,86929	0,87441	0,87955	0,88473	0,88992	0,89515
42	0,90040	0,90569	0,91099	0,91633	0,92170	0,92709
43	0,93252	0,93797	0,94345	0,94896	0,95451	0,96008
44	0,96569	0,97133	0,97700	0,98270	0,98843	0,99420
45	1,00000	1,00583	1,01170	1,01761	1,02355	1,02952

TABELA DE TANGENTES
45° – 90°

minutos / graus	0	10	20	30	40	50
45	1,00000	1,00583	1,01170	1,01761	1,02355	1,02952
46	1,03553	1,04158	1,04766	1,05378	1,05994	1,06613
47	1,07237	1,07864	1,08496	1,09131	1,09770	1,10414
48	1,11061	1,11713	1,12369	1,13029	1,13694	1,14363
49	1,15037	1,15715	1,16398	1,17085	1,17777	1,18474
50	1,19175	1,19882	1,20593	1,21310	1,22031	1,22758
51	1,23490	1,24227	1,24969	1,25717	1,26471	1,27230
52	1,27994	1,28764	1,29541	1,30323	1,31110	1,31904
53	1,32704	1,33511	1,34323	1,35142	1,35968	1,36800
54	1,37638	1,38484	1,39336	1,40195	1,41061	1,41934
55	1,42815	1,43703	1,44598	1,45501	1,46411	1,47330
56	1,48256	1,49190	1,50133	1,51084	1,52043	1,53010
57	1,53987	1,54972	1,55966	1,56969	1,57981	1,59002
58	1,60033	1,61074	1,62125	1,63185	1,64256	1,65337
59	1,66428	1,67530	1,68643	1,69766	1,70901	1,72047
60	1,73205	1,74375	1,75556	1,76749	1,77955	1,79174
61	1,80405	1,81649	1,82906	1,84917	1,85462	1,86760
62	1,88073	1,89400	1,90741	1,92098	1,93470	1,94858
63	1,96261	1,97680	1,99116	2,00569	2,02039	2,03526
64	2,05030	2,06553	2,08094	2,09654	2,11233	2,12832
65	2,14451	2,16090	2,17749	2,19430	2,21132	2,22857
66	2,24604	2,26374	2,28167	2,29984	2,31826	2,33693
67	2,35585	2,37504	2,39449	2,41421	2,43422	2,45451
68	2,47509	2,49597	2,51715	2,53865	2,56046	2,58261
69	2,60509	2,62791	2,65100	2,67462	2,69853	2,72281
70	2,74748	2,77254	2,79802	2,82391	2,85023	2,87700
71	2,90421	2,93189	2,96004	2,98869	3,01783	3,04749
72	3,07768	3,10842	3,13972	3,17159	3,20406	3,23714
73	3,27085	3,30521	3,34023	3,37594	3,41236	3,44951
74	3,48741	3,52609	3,56557	3,60588	3,64705	3,68909
75	3,73205	3,77595	3,82083	3,86671	3,91364	3,96165
76	4,01078	4,06107	4,11256	4,16530	4,21933	4,27471
77	4,33148	4,38969	4,44942	4,51071	4,57363	4,63825
78	4,70463	4,77286	4,84300	4,91516	4,98940	5,06584
79	5,14455	5,22566	5,30928	5,39552	5,48451	5,57638
80	5,67128	5,76937	5,87080	5,97576	6,08444	6,19703
81	6,31375	6,43484	6,56055	6,69116	6,82694	6,96823
82	7,11537	7,26873	7,42871	7,59575	7,77035	7,95302
83	8,14435	8,34496	8,55555	8,77689	9,00983	9,25530
84	9,51436	9,78817	10,07803	10,38540	10,71191	11,05943
85	11,43005	11,82617	12,25051	12,70621	13,19688	13,72674
86	14,30067	14,92442	15,60478	16,34986	17,16934	18,07498
87	19,08114	20,20555	21,47040	22,90377	24,54176	26,43160
88	28,63625	31,24158	34,36777	38,18846	42,96408	49,10388
89	57,28996	68,75009	85,93979	114,58865	171,88540	343,77371
90	–	–	–	–	–	–