Métodos de Contagem e Probabilidade

Paulo Cezar Pinto Carvalho

Sobre o autor. Paulo Cezar Pinto Carvalho é formado em Engenharia pelo Instituto Militar de Engenharia, Mestre em Estatística pelo IMPA e PhD em Pesquisa Operacional pela Universidade Cornell. Atualmente é pesquisador do IMPA, na área de Visão Computacional e Computação Gráfica. Divide o tempo devotado à pesquisa com atividades ligadas à melhoria do ensino em todos os níveis. Desde 1991 é professor do Programa de Aperfeiçoamento de Professores, promovido pelo IMPA. É autor de diversos livros da Coleção do Professor de Matemática, publicada pela SBM. Também tem se dedicado às Olimpíadas de Matemática, participando da organização da Olimpíada Brasileira de Matemática, desempenhando a função de líder em várias olimpíadas internacionais e, mais recentemente, servindo no Comitê Executivo da OBMEP.

Antes de Começar

Este livro é dedicado a um tema que, paradoxalmente, é extremamente simples, mas é muitas vezes considerado difícil por alunos e professores. Talvez isto se deva ao fato de que, diferentemente do que ocorre com outros assuntos da matemática secundária, cujo ensino muitas vezes é fortemente baseado na aplicação de fórmulas e repetição de problemas-modelo, é preciso pensar para resolver problemas, mesmo os mais simples, de contagem. Isto faz com que o tema seja especialmente apropriado para este estágio, contribuindo para desenvolver a imaginação dos alunos e a sua confiança para resolver problemas.

Durante muitos anos, o estudo de problemas de contagem (e mais recentemente de probabilidade) fez parte, exclusivamente, do Ensino Médio. Entretanto, o tema é perfeitamente acessível aos alunos do Ensino Fundamental, o que tem sido reconhecido, por exemplo, pelos Parâmetros Curriculares editados pelo MEC.

Esta apostila possui 5 capítulos. O primeiro é destinado a ambos os grupos. É desejável que os alunos, principalmente os do grupo 1, resolvam todos os problemas propostos e que os instrutores encorajem a exposição de soluções diferentes e, principalmente, de soluções erradas. Como em outras áreas da Matemática, muitas vezes aprendemos mais com os erros do que com os acertos ao resolver problemas de contagem. Os capítulos 2 e 3 contêm essencialmente o mesmo material (uma introdução à noção de probabilidade), escritos para diferentes níveis de maturidade, sendo, em princípio, indicados para os grupos 1 e 2, respectivamente. Os capítulos 4 e 5 foram escritos com os alunos do grupo 2 em mente, mas também são acessíveis aos do grupo 1, caso haja tempo.

Soluções para todos os problemas podem ser encontradas no final. Mas é claro que só devem ser consultadas após uma tentativa séria de resolução dos problemas.

Gostaria de terminar com dois agradecimentos. O primeiro é para a Profa. Maria Lúcia Villela, pela revisão extremamente bem feita do material, tendo contribuído com diversas sugestões que foram incorporadas ao texto. Mas o agradecimento mais especial vai para o Prof. Augusto César Morgado. Se os leitores acharem que estas notas são parecidas com os seus escritos e suas aulas, isto não é mera coincidência. Tive a sorte de ter sido aluno do Prof. Morgado na 3ª série do Ensino Médio, quando tive a ocasião de aprender sobre contagem do modo exposto nesta apostila. Até hoje continuo aprendendo com ele, como colega e co-autor. Espero que cada um de vocês, alunos, tenha a oportunidade de ter um professor de Matemática tão inspirador quanto ele.

O autor

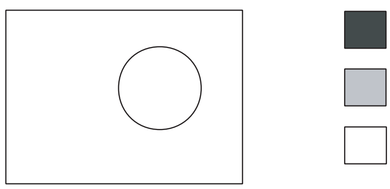
Sumário

Capítulo 1

Métodos de Contagem

Problemas de contagem são, muitas vezes, considerados difíceis entre alunos e professores, apesar das técnicas matemáticas necessárias serem bastante elementares: essencialmente, o conhecimento das operações aritméticas de soma, subtração, multiplicação e divisão. O objetivo deste material é habituar o aluno a trabalhar com problemas de contagem e a ver que, afinal de contas, tais problemas podem ser resolvidos com raciocínios simples na grande maioria dos casos, sem exigir o uso de fórmulas complicadas. É isto o que procuramos mostrar nos exemplos a seguir.

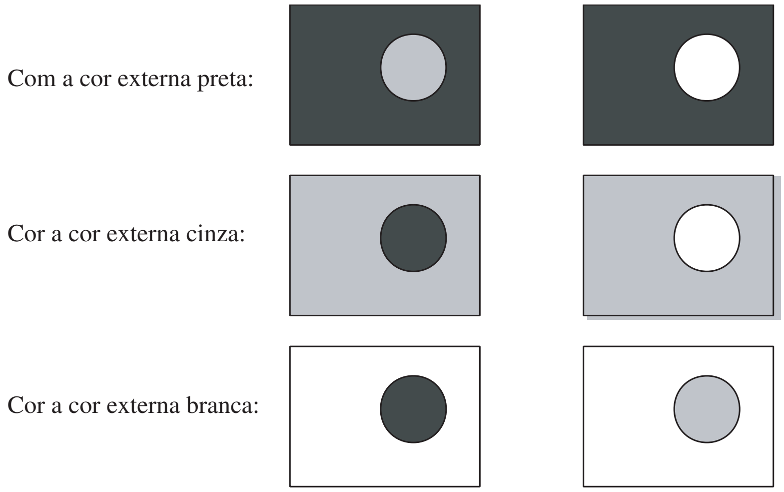
Exemplo 1. Uma bandeira com a forma abaixo vai ser pintada utilizando duas das cores dadas.



a) *Liste todas as possíveis bandeiras. Quantas são elas?*
Solução. É importante ter um procedimento sistemático para listar todas as possíveis bandeiras, sem repeti-las. Para tal, devemos identificar as diferentes decisões a serem tomadas e examinar todas as possibilidades para cada uma delas. No caso deste problema, uma forma natural para planejar o preenchimento da bandeira é:

- escolher a cor a ser utilizada para a parte externa;
- a seguir, escolher a cor para o círculo interno.

A primeira decisão pode ser feita de 3 modos diferentes, já que a cor externa pode ser qualquer uma das disponíveis. Uma vez tomada esta decisão, a cor escolhida não pode mais ser usada para o círculo interno. Por exemplo, se a cor preta for escolhida para a parte externa, a cor interna deverá ser cinza ou branca.
Podemos, então, listar todas as possíveis bandeiras, que são 6, de acordo com a figura abaixo.



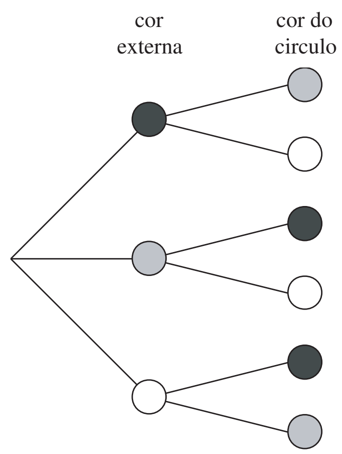
Um fato importante, que pode ser explorado na contagem eficiente do número possível de bandeiras, é o seguinte: as cores disponíveis para pintar o círculo mudam de acordo com a escolha da parte externa, mas a sua quantidade é sempre a mesma, já que, qualquer que seja a cor externa escolhida, há sempre duas cores restantes para o círculo. Portanto, poderíamos ter empregado o seguinte raciocínio para contar o número de possíveis bandeiras, sem listá-las:

A cor externa pode ser escolhida de três modos diferentes. Qualquer que seja esta escolha, a cor do círculo pode ser escolhida de dois modos. Logo, o número total de possibilidades é $2+2+2 = 3\times 2 = 6$.

O procedimento acima ilustra o *Princípio Multiplicativo* ou *Princípio Fundamental da Contagem:*

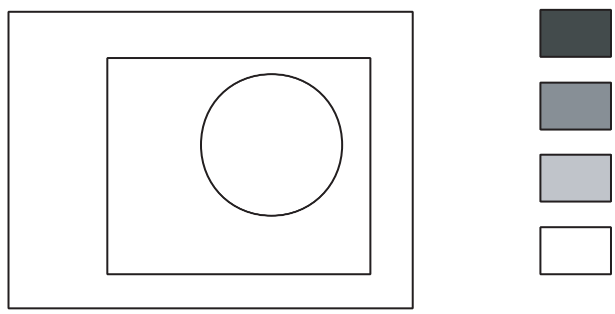
Se uma decisão D_1 *pode ser tomada de* p *modos e, qualquer que seja esta escolha, a decisão* D_2 *pode ser tomada de* q *modos, então o número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões* D_1 *e* D_2 *é igual a* pq.

O Princípio Multiplicativo pode ser ilustrado com o auxílio de uma árvore de enumeração como a da figura a seguir.



b) *Quantas são as possíveis bandeiras no caso em que* 4 *cores estão disponíveis?*
Solução. As decisões a serem tomadas são exatamente as mesmas do caso anterior, tendo mudado apenas o número de possibilidades de escolha. Para a cor externa, temos agora 4 possibilidades. Uma vez escolhida a cor externa, a cor do círculo pode ser qualquer uma das outras 3. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, o número de modos diferentes para pintar a bandeira é $4 \times 3 = 12$.

Exemplo 2. Quantas são as formas de pintar a bandeira a seguir utilizando 3 cores diferentes dentre 4 dadas?



Solução. Agora, temos 3 decisões consecutivas a tomar: a cor externa, a do retângulo e a do círculo. A cor externa pode ser qualquer uma das 4 cores; uma vez escolhida a cor externa, o retângulo pode ser pintado de três modos distintos. Logo, a escolha combinada da cor externa e do retângulo pode ser feita de $4 \times 3 = 12$ modos. Para cada um destes 12 modos, o círculo pode ser pintado com uma das duas cores que sobraram. Logo, o número total de possibilidades é $4 \times 3 \times 2 = 24$.
O raciocínio acima mostra que o Princípio Multiplicativo pode, na

realidade, ser aplicado quando temos diversas etapas de decisão: desde que o número de possibilidades em cada etapa não dependa das decisões anteriores, basta multiplicá-los para achar o número total de possibilidades.

Exemplo 3. Para pintar a bandeira abaixo, há 4 cores disponíveis. De quantos modos ela pode ser pintada de modo que faixas adjacentes tenham cores distintas?

Solução. O primeiro passo é escolher em que ordem vamos pintar a bandeira. Podemos, por exemplo, pintar as faixas de cima para baixo (veja, no exercício 16, o que ocorre quando escolhemos mal a ordem de preenchimento). A cor da primeira faixa pode ser qualquer uma das 4 cores. Qualquer que seja a cor escolhida, para a segunda faixa temos 3 cores para escolher. Escolhida a cor da segunda faixa, a terceira pode ser pintada de qualquer cor, exceto a usada para a segunda faixa. Assim, temos novamente 3 possibilidades de escolha. O número total de possibilidades é, então:

$$\begin{array}{ccccccc} 4 & \times & 3 & \times & 3 & = & 36 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1^{\text{a}} \text{ faixa} & & 2^{\text{a}} \text{ faixa} & & 3^{\text{a}} \text{ faixa} & & \end{array}$$

Exemplo 4. Quantos são os números de três algarismos distintos?

Solução. Vamos escolher, sucessivamente, os três algarismos, começando com o da esquerda (isto é importante, como veremos abaixo). O primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 modos, pois não pode ser igual a 0. O segundo algarismo pode ser escolhido de 9 modos, pois não pode ser igual ao primeiro algarismo. O terceiro algarismo pode ser escolhido de 8 modos, pois não pode ser igual nem ao primeiro nem ao segundo algarismos.

A resposta é $9 \times 9 \times 8 = 648$.

Exemplo 5. O código Morse usa duas letras, ponto e traço, e as palavras têm de 1 a 4 letras. Quantas são as palavras do código Morse?

Solução. Há palavras de 1, 2, 3 e 4 letras, em quantidades diferentes. Assim, nossa estratégia é a de usar o Princípio Multiplicativo para contar separadamente estas palavras e, depois, somar estas quantidades. Há 2 palavras de uma letra; há $2 \times 2 = 4$ palavras de duas letras, pois há dois modos de escolher a primeira letra e dois modos de escolher a segunda letra; analogamente, há $2 \times 2 \times 2 = 8$ palavras de três letras e $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ palavras de 4 letras. O número total de palavras é $2 + 4 + 8 + 16 = 30$.

Você já deve ter percebido nesses exemplos qual é a estratégia para resolver problemas de contagem:

1. Postura: Devemos sempre nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões devemos tomar. Nas diversas situações dos Exemplos 1 a 3, nós nos colocamos no papel da pessoa que deveria colorir a bandeira; no Exemplo 4, nos colocamos no papel da pessoa que deveria escrever o número.

2. Divisão: Devemos, sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples, correspondentes às diversas etapas do processo de decisão. Colorir a bandeira foi dividido em colorir cada região; formar um número de três algarismos foi dividido em escolher cada um dos três algarismos. Formar a palavra no código Morse foi dividido em escolher o número de letras e, a seguir, em escolher cada letra.

A ordem em que as decisões são tomadas pode ser extremamente importante para a simplicidade do processo de resolução. Vamos voltar ao Exemplo 4 (*Quantos são os números de três algarismos distintos?*) para ver como uma estratégia equivocada pode levar a uma solução desnecessariamente complicada.

Começando a escolha dos algarismos pelo último algarismo, há 10 modos de escolher o último algarismo. Em seguida, há 9 modos de escolher o algarismo central, pois não podemos repetir o algarismo já usado. Agora temos um impasse: de quantos modos podemos escolher o primeiro algarismo? A resposta é "depende". Se não tivermos usado o 0, haverá 7 modos de escolher o primeiro algarismo, pois não poderemos usar nem o 0 nem os dois algarismos já usados nas demais casas; se já tivermos usado o 0, haverá 8 modos de escolher o primeiro algarismo.

Para evitar, na medida do possível, impasses como o acima, uma outra recomendação importante é:

3. Não adiar dificuldades. Pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar. No Exemplo 4 , a escolha do primeiro algarismo era uma decisão mais restrita do que as outras, pois o primeiro algarismo não pode ser igual a 0. Essa é portanto a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar e, conforme acabamos de ver, postergá-la só serve para causar problemas.

Exemplo 6. Quantos são os números pares de três algarismos distintos?

Solução. Há 5 modos de escolher o último algarismo. Note que começamos pelo último algarismo, que é o mais restrito; o último algarismo só pode ser 0, 2, 4, 6 ou 8.

Em seguida, vamos ao primeiro algarismo. De quantos modos se pode escolher o primeiro algarismo? A resposta é "depende": se não tivermos usado o 0, haverá 8 modos de escolher o primeiro algarismo, pois não poderemos usar nem o 0 nem o algarismo já usado na última casa; se já tivermos usado o 0, haverá 9 modos de escolher o primeiro algarismo, pois apenas o 0 não poderá ser usado na primeira casa.

Assim, apesar de termos procurado atacar inicialmente a escolha mais restrita, chegamos a um impasse no uso do Princípio Multiplicativo. Esse tipo de impasse é comum na resolução de problemas e há dois métodos para vencê-lo.

O primeiro método consiste em voltar atrás e contar separadamente. Contaremos separadamente os números que terminam em 0 e os que não terminam em 0. Comecemos pelos que terminam em 0. Há 1 modo de escolher o último algarismo, 9 modos de escolher o primeiro e 8 modos de escolher o algarismo central. Há, portanto, $1 \times 9 \times 8 = 72$ números de três algarismos distintos terminados em 0.

Para os que não terminam em 0, há 4 modos de escolher o último algarismo, 8 modos de escolher o primeiro e 8 modos de escolher o algarismo central. Há $4 \times 8 \times 8 = 256$ números pares de três algarismos distintos que não terminam em 0.

A resposta é $72 + 256 = 328$.

O segundo método consiste em ignorar uma das restrições do problema, o que nos fará contar em demasia. Depois descontaremos o que houver sido contado indevidamente.

Primeiramente fazemos de conta que o 0 pode ser usado na primeira casa do número. Procedendo assim, há 5 modos de escolher o último algarismo (só pode ser 0, 2, 4, 6 ou 8), 9 modos de escolher o primeiro algarismo (não podemos repetir o algarismo usado na última casa – note que estamos permitindo o uso do 0 na primeira casa) e 8 modos de escolher o algarismo central. Há $5 \times 9 \times 8 = 360$ números, aí inclusos os que começam por 0.

Agora vamos determinar quantos desses números começam por zero; são esses os números que foram contados indevidamente. Há 1 modo de escolher o primeiro algarismo (tem que ser 0), 4 modos de escolher o último (só pode ser 2, 4, 6 ou 8 – lembre-se que os algarismos são distintos) e 8 modos de escolher o algarismo central (não podemos repetir os algarismos já usados). Há $1 \times 4 \times 8 = 32$

números começados por 0.

A resposta é $360 - 32 = 328$.

Exemplo 5. De quantos modos diferentes 6 pessoas podem ser colocadas em fila?
Solução. Este é um problema clássico de contagem, chamado de *problema das permutações simples*, que é facilmente resolvido pelo Princípio Multiplicativo. De fato, basta escolher sucessivamente as pessoas colocadas em cada posição da fila. Para escolher o primeiro da fila, temos 6 possibilidades; o segundo pode ser qualquer uma das 5 pessoas restantes, e assim por diante. Logo, o número total de possibilidades é $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$. De um modo geral, o número de modos de ordenar n objetos é igual a $n \times (n-1) \times \cdots \times 1$, que é representado por $n!$ (lê-se: n fatorial).

Exemplo 6. De quantos modos pode-se escolher três dos jogadores de um time de futebol, para representá-lo em uma cerimônia de premiação?
Solução. Este é um outro problema clássico de contagem, chamado de *problema das combinações simples.* À primeira vista, parece ser simples resolvê-lo pelo Princípio Multiplicativo: basta escolher um representante de cada vez. O primeiro pode ser escolhido de 11 modos, o segundo de 10 e o terceiro de 9. Logo, o número total de possibilidades parece ser $11 \times 10 \times 9 = 990$. Esta solução está incorreta, mas podemos consertá-la para chegar à resposta certa. Suponha que tivéssemos escolhido, sucessivamente, os jogadores A, B e C. A comissão de representantes assim formada é exatamente a mesma se tivéssemos selecionado, por exemplo, primeiro B, depois A, depois C. No entanto, as duas escolhas foram contadas por nós como se fossem distintas. O que nos permite corrigir o resultado da contagem é o fato de que todas as possíveis comissões são repetidas o mesmo número de vezes, correspondente a todas as suas possíveis

ordenações. Por exemplo, A, B e C vão surgir, em nosso processo de enumeração, $3 \times 2 \times 1 = 6$ vezes, o mesmo ocorrendo com todas as possíveis comissões. Logo, o número correto de comissões é igual a $990/6 = 165$.

De modo geral, o número de modos de escolher p dentre n objetos é representado por C_n^p (lê-se: combinação de n tomados p a p) e é igual a $\frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p(p-1)\cdots 1}$.

Exercícios

1) Um grupo de 4 alunos (Alice, Bernardo, Carolina e Daniel) tem que escolher um líder e um vice-líder para um debate.

    a) Faça uma lista de todas as possíveis escolhas (use a inicial de cada nome, para facilitar). Organize a sua lista do seguinte modo: primeiro, escreva todas as possibilidades em que Alice é a presidente, depois aquelas em que Bernardo é presidente, e assim por diante.

    b) Conte o número de possíveis escolhas e verifique que o Princípio Multiplicativo fornece a mesma resposta.

2) Um restaurante possui um cardápio que apresenta escolhas de saladas (salada verde, salada russa ou salpicão), sopas (caldo verde, canja ou de legumes) e pratos principais (bife com fritas, peixe com puré, frango com legumes ou lasanha).

    a) De quantos modos se pode escolher um prato deste cardápio?

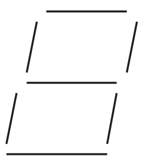
    b) De quantos modos se pode escolher uma refeição completa, formada por uma salada, uma sopa e um prato principal?

3) Quantos algarismos são escritos ao se escrever os números inteiros de 1 a 100?

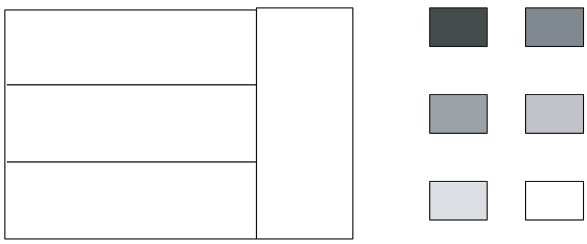
4) João e Isabel lançam, cada um, um dado.

   a) Quantos são as possíveis combinações de resultado?
   b) Quantas são as possíveis somas que eles podem obter?

5) Cada dígito de uma calculadora é mostrado no visor acendendo filamentos dispostos como mostra a figura a seguir. Quantos símbolos diferentes podem ser representados? (Não inclua o caso em que nenhum filamento é aceso.)



6) Para pintar a bandeira abaixo estão disponíveis as seis cores dadas, sendo que regiões adjacentes devem ser pintadas de cores diferentes.



   a) Qual é o número mínimo de cores a serem usadas?
   b) De quantos modos a bandeira pode ser pintada?

7) Dispomos de 5 cores distintas. De quantos modos podemos colorir os quatro quadrantes de um círculo, cada quadrante com uma só cor, se quadrantes cuja fronteira é uma linha não podem receber a mesma cor?

8) Quantos são os gabaritos possíveis de um teste de 10 questões de múltipla-escolha, com 5 alternativas por questão? Em quantos destes gabaritos a letra A aparece exatamente uma vez? Em quantos a letra A não aparece?

9) Liste todos os subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$. Quantos são eles? De modo geral, quantos são os subconjuntos de um conjunto que tem n elementos?

10) De quantos modos 3 pessoas podem se sentar em 5 cadeiras em fila?

11) De quantos modos 5 homens e 5 mulheres podem se sentar em 5 bancos de 2 lugares, se em cada banco deve haver um homem e uma mulher?

12) De quantos modos podemos colocar 2 reis diferentes em casas não-adjacentes de um tabuleiro 8×8? E se os reis fossem iguais?

13) De quantos modos podemos formar uma palavra de 5 letras de um alfabeto de 26 letras, se a letra A deve figurar na palavra mas não pode ser a primeira letra da palavra? E se a palavra devesse ter letras distintas?

14) As placas dos veículos são formadas por três letras (de um alfabeto de 26) seguidas por 4 algarismos. Quantas placas poderão ser formadas?

15) Um vagão do metrô tem 10 bancos individuais, sendo 5 de frente e 5 de costas. De 10 passageiros, 4 preferem sentar de

frente, 3 preferem sentar de costas e os demais não têm preferência. De quantos modos eles podem se sentar, respeitadas as preferências?

16) Escrevem-se os inteiros de 1 até 2222.

    a) Quantas vezes o algarismo 0 é escrito?
    b) Em quantos números aparece o algarismo 0?

17) Quantos são os inteiros positivos de 4 algarismos nos quais o algarismo 5 figura?

18) Em uma banca há 5 exemplares iguais da "Veja", 6 exemplares iguais da "Época"e 4 exemplares iguais da "Isto É". Quantas coleções não-vazias de revistas dessa banca podem ser formadas?

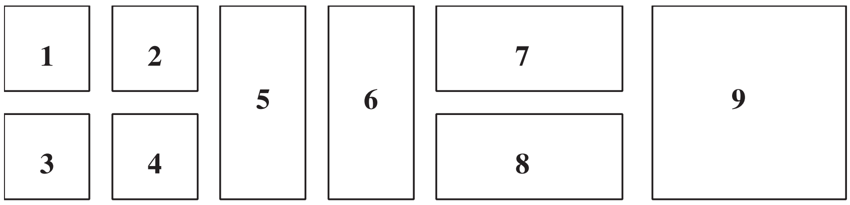
19) *Tendo* 4 *cores disponíveis, de quantos modos se pode pintar uma bandeira com* 3 *listras, tendo listras adjacentes de cores distintas?* Um aluno deu a seguinte solução: "Primeiro, eu vou pintar as listras extremas; para cada uma, eu tenho 4 possibilidades de escolha. Depois, eu pinto a listra central; como ela tem que ter cor diferente das duas vizinhas, eu posso escolher sua cor de apenas 2 modos. Logo, o número total de modos de pintar a bandeira é $4 \times 4 \times 2 = 32$". A solução está certa ou errada? Se estiver errada, onde está o erro?

20) *Com* 5 *homens e* 5 *mulheres, de quantos modos se pode formar um casal?* Este problema foi resolvido por um aluno do modo a seguir: "A primeira pessoa do casal pode ser escolhida de 10 modos, pois ela pode ser homem ou mulher. Escolhida a primeira pessoa, a segunda pessoa só poderá ser escolhida de 5 modos, pois deve ser de sexo diferente do da primeira pessoa. Há portanto $10 \times 5 = 50$ modos de formar um casal."

    A solução está certa ou errada? Se estiver errada, onde está o erro?

21) Cada peça de um dominó apresenta um par de números de 0 a 6, não necessariamente distintos. Quantas são estas peças? E se os números forem de 0 a 8?

22) Quantos retângulos há formados por casas adjacentes em um tabuleiro de xadrex 8×8? Por exemplo, em um tabuleiro 2×2 há 9 retângulos, como mostra a figura abaixo.



Capítulo 2

Probabilidade (grupo 1)

Uma das principais aplicações das técnicas de contagem é a resolução de problemas simples de Probabilidade. O interesse dos matemáticos no estudo sistemático de probabilidades é relativamente recente e tem suas raízes no estudo dos jogos de azar.

No estudo destes jogos, normalmente ocorre a seguinte situação: todos os possíveis resultados têm a mesma chance de ocorrer. Por exemplo, ao lançar um dado "honesto" (quer dizer, construído de forma perfeitamente cúbica e homogênea), todas as faces têm a mesma chance de sair. Como as faces são 6, esperamos que cada uma delas ocorra em aproximadamente $1/6$ dos lançamentos. Dizemos, então, que cada uma delas tem *probabilidade* $1/6$ de sair.

Também atribuímos probabilidades a conjuntos de resultados possíveis, chamados de *eventos*. A probabilidade de um evento é simplesmente a soma das probabilidades dos resultados que o compõem.

Exemplo 1. Qual é a probabilidade de se obter um resultado maior que 4 ao se lançar um dado honesto?
Solução: Dizer que sai resultado maior do que 4 é equivalente a dizer que sai 5 ou 6. Como cada uma destas faces têm probabilidade

$\frac{1}{6}$ de ocorrer, a probabilidade de sair um número maior do que 4 é igual a $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

De um modo geral, quando todos os resultados têm a mesma chance de ocorrer, a probabilidade de um evento é a razão entre o número de resultados relativos ao evento e o númeto total de resultados. Em outras palavras, é a razão entre o número de casos favoráveis à ocorrência do evento e o número total de casos.

Exemplo 2. Ao lançar um dado duas vezes, qual é a probabilidade de se obter soma 5?

Solução. Como em cada lançamento há 6 possibilidades, o número de casos possíveis é $6 \times 6 = 36$, todos com a mesma probabilidade de ocorrência. Destes, aqueles em que a soma é 5 são $(1, 4), (2, 3), (3, 2)$ e $(4, 1)$. Logo, o número de casos favoráveis ao evento é 4 e sua probabilidade é $4/36 = 1/9$.

Exemplo 3. Em uma urna há 5 bolas vermelhas e 4 pretas, todas de mesmo tamanho e feitas do mesmo material. Retiramos duas bolas sucessivamente da urna, sem repô-las. Qual é a probabilidade de que sejam retiradas duas bolas vermelhas?

Solução: Precisamos, antes de mais nada, identificar quais são os possíveis resultados. Como tudo o que observamos é a cor de cada bola retirada (as bolas de mesma cor são indistinguíveis entre si), poderíamos ser tentados a dizer que temos apenas 4 casos: vv, vp, pv, pp. O problema é que estes casos **não têm** a mesma chance de ocorrer (é óbvio, por exemplo, que duas bolas vermelhas saem com mais freqüência que duas bolas pretas, já que há mais bolas vermelhas). A solução consiste em considerar individualmente as 9 bolas presentes na urna. Ou seja, os resultados possíveis são todos os pares de bolas distintas, cuja quantidade é $9 \times 8 = 72$. Como todas as bolas são iguais (a menos da cor), todos estes pares têm a mesma probabilidade de sair. Para calcular o número destes pares em que ambas as bolas são vermelhas, devemos observar que a primeira bola vermelha pode ser escolhida de 5 modos, enquanto a segunda pode ser qualquer uma das 4 restantes. Logo, o número de casos favoráveis é igual a $5 \times 4 = 20$. Portanto, a probabilidade de que sejam retiradas duas bolas vermelhas é igual a $20/72 = 5/18$.

Exemplo 4. Pedro e João combinaram de lançar uma moeda 4 vezes. Pedro apostou que, nestes 4 lançamentos, não apareceriam 2 caras seguidas; João aceitou a aposta. Quem tem maior chance de ganhar a aposta?

Solução: Vamos considerar todas as seqüências possíveis de resultados. Como em cada lançamento sai cara (C) ou coroa (K), há 2 possibilidades; logo, o número total de possibilidades é igual a $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$. Todas estas seqüências têm a mesma probabilidade de ocorrência, já que o resultado de um lançamento não afeta os demais e há a mesma chance de sair cara ou coroa. Vamos agora verificar quais destas seqüências levam à vitória de Pedro.

- se só saírem coroas ($KKKK$), é claro que Pedro vence.
- se só sair uma cara ($CKKK, KCKK, KKCK, KKKC$), Pedro também vence
- com duas caras, Pedro vence nos casos $KCKC$, $CKCK$ e $CKKC$.
- quando saem três ou mais caras, Pedro perde.

Logo, o número de seqüências favoráveis a Pedro é igual a 8 e sua probabilidade de vitória é igual a $8/16 = 1/2$. Portanto, Pedro e João têm a mesma chance de vitória.

Exercícios

1) Dois dados são lançados e observa-se a soma de suas faces.

   a) Quais são os possíveis resultados para esta soma?
   b) Estes resultados são equiprováveis? Caso contrário, que resultado é mais provável? Com que probabilidade? E o menos provável?
   c) Qual é a probalidade de cada resultado possível?

2) Uma moeda é lançada 3 vezes. Qual é a probabilidade de que saiam 2 caras?

3) Um casal decidiu que vai ter 4 filhos. O que é mais provável: que tenham dois casais ou três filhos de um sexo e um de outro?

4) Laura e Telma retiram um bilhete cada de uma urna em que há 100 bilhetes numerados de 1 a 100. Qual é a probabilidade de que o número retirado por Laura seja maior do que o de Telma? E se elas, depois de consultarem o número, devolvem o bilhete à urna?

5) Duas peças de um dominó comum são sorteadas. Qual é a probabilidade de que tenham um número em comum?

6) Ana, Joana e Carolina apostam em um jogo de cara-e-coroa. Ana vence na primeira vez que saírem duas caras seguidas; Joana vence na primeira vez que saírem duas coroas seguidas; Carolina vence quando sair uma cara seguida de uma coroa. Qual é a probabilidade que cada uma tem de vencer?

7) O trecho a seguir foi obtido em um site de Internet que se propõe a aumentar as chances de vitória no jogo da Sena (que

consiste em sortear 6 dentre 60 dezenas). *"Quando afirmamos, por exemplo, que as dezenas atrasadas são importantes, é porque já observamos, em nossos estudos, que todas as dezenas são sorteadas a cada quarenta testes, portanto, seria útil você acompanhar e apostar em dezenas atrasadas; você estaria assim aumentando muito suas chances."* Você concorda que apostar em uma dezena atrasada aumenta as chances de vitória na Sena?

8) Suponhamos que você tenha duas escolhas para apostar na Sena. O primeiro aposta nas dezenas $1-3-5-7-9-11$ e o segundo nas dezenas $8-17-31-45-49-55$. Qual você acha que tem maiores chances de ser vitorioso?

9) (O Problema do Bode) Este problema foi proposto em um programa de rádio nos Estados Unidos e causou um enorme debate na Internet.

   Em um programa de prêmios, o candidato tem diante de si três portas. Atrás de uma destas portas, há um grande prêmio; atrás das demais há um bode. O candidato escolhe inicialmente uma das portas. O apresentador (que sabe qual é a porta que contém o prêmio) abre uma das portas não indicadas pelo candidato, mostrando necessariamente um bode. A seguir ele pergunta se o candidato mantém sua escolha ou deseja trocar de porta. O candidato deve trocar ou não? (Uma forma de você guiar sua intuição consiste em simular o problema.).

Capítulo 3

Probabilidade (grupo 2)

Uma das principais aplicações das técnicas de contagem é a resolução de problemas simples de Probabilidade. O interesse dos matemáticos no estudo sistemático de probabilidades é relativamente recente e tem suas raízes no estudo dos jogos de azar. Um problema clássico, que tem origem em autores do século XV e que despertou o interesse de autores como Pascal e Fermat, é o

Problema dos pontos: *Dois jogadores apostaram* R$ *10,00 cada um em um jogo de cara-e-coroa, combinando que o primeiro a conseguir* 6 *vitórias ficaria com o dinheiro da aposta. O jogo, no entanto, precisa ser interrompido quando um dos jogadores tem* 5 *vitórias e o outro tem* 3. *Qual é a divisão justa da quantia apostada?*

(Para um "clásssico moderno", veja o exercício 9, que provocou grande discussão na Internet alguns anos atrás). Parece razoável que a quantia apostada seja dividida de forma proporcional à chance (ou probabilidade) de vitória de cada jogador. O cálculo destas probabilidades se baseia, como veremos mais adiante, na hipótese de que a moeda seja honesta, ou seja, de que haja iguais chances, em um lançamento, de sair cara ou coroa. Esta crença, por sua vez, corresponde à seguinte idéia intuitiva: em uma seqüência longa de lançamentos, esperamos observar, aproximadamente, o mesmo número de caras e coroas.

De modo mais geral, suponhamos que um determinado experimento tenha n resultados possíveis $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$; o conjunto Ω destes possíveis resultados é chamado de *espaço amostral*. Suponhamos, ainda, que julguemos que, ao repetir o experimento um grande número de vezes, esperemos que o resultado ω_i ocorra em uma certa fração p_i das realizações do experimento. Dizemos, então, que a probabilidade de se observar ω_i é igual a p_i. Evidentemente, devemos ter $p_i \geq 0$ para cada i e, além disso, $p_1 + \cdots + p_n = 1$. Uma vez estabelecidos os valores para as probabilidades de cada resultado possível, podemos definir a probabilidade de qualquer *evento* A (ou seja, de qualquer subconjunto de Ω) como a soma das probabilidades dos resultados em A

Mas como encontrar os valores das probabilidades p_i? No caso geral, estes valores são obtidos de forma experimental. Mas há certos casos em que é razoável supor que todos os resultados são igualmente prováveis e que, portanto, a probabilidade de cada um deles é igual a $1/n$. Por exemplo, ao lançar um dado perfeitamente cúbico não há nenhuma razão para esperar que uma face apareça com mais freqüência que qualquer das outras. Logo, a probabilidade associada a cada face é igual a $1/6$. Modelos probabilísticos que têm esta característica são chamados de *equiprováveis* e estão freqüentemente associados a jogos de azar. Nos modelos probabilísticos equiprováveis, a probabilidade associada a um evento A com p elementos é igual a $p \cdot \frac{1}{n} = \frac{p}{n}$. Muitas vezes se exprime este fato dizendo que a *probabilidade de um evento é igual à razão entre o número de casos favoráveis ao evento e o número de casos possíveis.*

Exemplo 1. Qual é a probabilidade de se obter um resultado maior que 4 ao se lançar um dado honesto?
Solução: O espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, com todos os resultados tendo probabilidade $1/6$. Desejamos calcular a probabilidade do evento $A = \{5, 6\}$, que é dada por $P(A) = 2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

Exemplo 2. Ao lançar um dado duas vezes, qual é a probabilidade de se obter soma 5?
Solução. O espaço amostral é formado por todos os pares de resultados possíveis. Como em cada lançamento há 6 possibilidades, o número de casos possíveis é $6 \times 6 = 36$, todos com a mesma probabilidade de ocorrência. Destes, aqueles em que a soma é 5 são $(1, 4), (2, 3), (3, 2)$ e $(4, 1)$. Logo, o número de casos favoráveis ao evento é 4 e sua probabilidade é $4/36 = 1/9$.

Exemplo 3. Em uma urna há 5 bolas vermelhas e 4 pretas, todas de mesmo tamanho e feitas do mesmo material. Retiramos duas bolas sucessivamente da urna, sem repô-las. Qual é a probabilidade de que sejam retiradas duas bolas vermelhas?
Solução: Precisamos, antes de mais nada, encontrar um espaço amostral apropriado para descrever os resultados dos experimentos. Como tudo o que observamos é a cor de cada bola retirada (as bolas de mesma cor são indistinguíveis entre si), poderíamos ser tentados a escolher o espaço amostral $\{vv, vp, pv, pp\}$, formado pelos pares de cores observadas. Esta escolha não está errada, mas não é conveniente para a solução do problema. O que ocorre é que o modelo probabilístico baseado neste espaço amostral não é equiprovável (é óbvio, por exemplo, que duas bolas vermelhas saiam com mais freqüência que duas bolas pretas, já que há mais bolas vermelhas). Para obter um espaço equiprovável, devemos considerar individualmente as 9 bolas presentes na urna. Ou seja, o espaço amostral é o conjunto de todos os pares de bolas distintas, que tem $9 \times 8 = 72$ elementos. Como todas as bolas são iguais (a me-

nos da cor), todos estes pares têm a mesma probabilidade de sair. Para calcular o número destes pares em que ambas as bolas são vermelhas, devemos observar que a primeira bola vermelha pode ser escolhida de 5 modos, enquanto a segunda pode ser qualquer uma das 4 restantes. Logo, o número de casos favoráveis é igual a $5 \times 4 = 20$. Portanto, a probabilidade de que sejam retiradas duas bolas vermelhas é igual a $20/72 = 5/18$.

Exemplo 4. Pedro e João combinaram de lançar uma moeda 4 vezes. Pedro apostou que, nestes 4 lançamentos, não apareceriam 2 caras seguidas; João aceitou a aposta. Quem tem maior chance de ganhar a aposta?
Solução: O espaço amostral apropriado é formado por todas as seqüências possíveis de resultados. Como em cada lançamento sai cara (C) ou coroa (K), há 2 possibilidades; logo, o número total de possibilidades é igual a $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$. Todas estas seqüências têm a mesma probabilidade de ocorrência, já que o resultado de um lançamento não afeta os demais e há a mesma chance de sair cara ou coroa. Vamos verificar quais destas seqüências levam à vitória de Pedro.

- se só saírem coroas ($KKKK$), é claro que Pedro vence.
- se só sair uma cara ($CKKK, KCKK, KKCK, KKKC$), Pedro também vence
- com duas caras, Pedro vence nos casos $KCKC$, $CKCK$ e $CKKC$.
- quando saem três ou mais caras, Pedro perde.

Logo, o número de seqüências favoráveis a Pedro é igual a 8 e sua probabilidade de vitória é igual a $8/16 = 1/2$. Portanto, Pedro e João têm a mesma chance de vitória.

Exemplo 5. Qual é a forma justa de dividir os R$ 20,00 apostados no problema dos pontos?

Solução: O jogador I tem 5 vitórias, faltando apenas uma para vencer o jogo. O jogador II tem apenas 3 vitórias, necessitando de mais 3 para vencer. Portanto, para que II vença, ele tem que vencer três partidas seguidas. Há $2 \times 2 \times 2 = 8$ possibilidades para os resultados destas partidas e apenas um destes é favorável à vitória de II. Logo, II vence com probabilidade 1/8, enquanto a probabilidade de vitória de I é 7/8. Logo, I deve ficar com R$ 17,50 e II com R$ 2,50.

Uma possível objeção quanto à solução acima é o fato de construirmos nosso espaço amostral com base nas três partidas restantes, quando o jogo pode, na verdade, terminar em uma, duas ou três partidas. Fizemos isto para obter um espaço amostral para o qual o modelo é equiprovável. Note que usar este espaço amostral é equivalente a supor que, mesmo que I tenha vencido na primeira ou segunda partida, eles continuam a disputar, como "amistosos", as partidas seguintes. É claro que isto não modifica, em nada, as chances de vitória de cada jogador.

Vimos acima que a idéia intuitiva de probabilidade de um evento está ligada à freqüência observada deste evento quando o experimento é realizado um grande número de vezes. Esta relação pode ser estabelecida de modo preciso, através de um teorema conhecido como a Lei dos Grandes Números. Embora, por vezes, ela não seja muito bem entendida (veja, por exemplo, o exercício 7), a Lei dos Grandes Números é um instrumento fundamental para estabelecer uma via de mão dupla entre modelos probabilísticos teóricos e os experimentos aleatórios.

Consideremos, novamente, o exemplo 5. Uma forma de se ter uma idéia da resposta do problema seria utilizar uma simulação da situação pretendida. Esta simulação é repetida um grande número de vezes e, através da freqüência de vitórias de cada jogador, estimaríamos sua probabilidade de vitória. A simulação pode ser feita manualmente, usando uma moeda (é uma atividade apropriada para sala de aula: cada aluno repete o experimento algumas poucas vezes e, reunindo todos os resultados, temos uma quantidade razoável de repetições). É possível, também, fazer a simulação com auxílio de um computador, através da geração de números aleatórios. A tabela abaixo mostra o resultado obtido simulando 100 realizações do jogo.

I ganha na primeira partida	52 vezes
I ganha na segunda partida	20 vezes
I ganha na terceira partida	13 vezes
II ganha (na terceira partida)	15 vezes

Os resultados obtidos mostram, ao mesmo tempo, o poder e a limitação do método de simulação. Por um lado, permite estimar que II tem uma chance de vitória muito menor do que a de I. Na simulação que fizemos, II ganhou em apenas 15% das vezes (o que está razoavelmente próximo da probabilidade exata, que é $1/8 = 0,125$). Por outro lado, o valor obtido na simulação é sempre uma aproximação, cujo erro diminui com o número de repetições.

Exercícios

1) Dois dados são lançados e observa-se a soma de suas faces.

   a) Quais são os possíveis resultados para esta soma?

b) Estes resultados são equiprováveis? Caso contrário, que resultado é mais provável? Com que probabilidade? E o menos provável?

c) Qual é a probabilidade de cada resultado possível?

2) Uma moeda é lançada 3 vezes. Qual é a probabilidade de que saiam 2 caras?

3) Um casal decidiu que vai ter 4 filhos. O que é mais provável: que tenham dois casais ou três filhos de um sexo e um de outro?

4) Laura e Telma retiram um bilhete cada de uma urna em que há 100 bilhetes numerados de 1 a 100. Qual é a probabilidade de que o número retirado por Laura seja maior do que o de Telma? E se elas, depois de consultarem o número, devolvem o bilhete à urna?

5) Duas peças de um dominó comum são sorteadas. Qual é a probabilidade de que tenham um número em comum?

6) Ana, Joana e Carolina apostam em um jogo de cara-e-coroa. Ana vence na primeira vez que saírem duas caras seguidas; Joana vence na primeira vez que saírem duas coroas seguidas; Carolina vence quando sair uma cara seguida de uma coroa. Qual é a probabilidade que cada uma tem de vencer?

7) O trecho a seguir foi obtido em um site de Internet que se propõe a aumentar as chances de vitória no jogo da Sena (que consiste em sortear 6 dentre 60 dezenas). *"Quando afirmamos, por exemplo, que as dezenas atrasadas são importantes, é porque já observamos, em nossos estudos, que todas as dezenas são sorteadas a cada quarenta testes, portanto, seria útil você acompanhar e apostar em dezenas atrasadas; você estaria assim aumentando muito suas chances."* Você concorda

que apostar em uma dezena atrasada aumenta as chances de vitória na Sena?

8) Suponhamos que você tenha duas escolhas para apostar na Sena. O primeiro aposta nas dezenas $1 - 3 - 5 - 7 - 9 - 11$ e o segundo nas dezenas $8 - 17 - 31 - 45 - 49 - 55$. Qual você acha que tem maiores chances de ser vitorioso?

9) (O Problema do Bode) Este problema foi proposto em um programa de rádio nos Estados Unidos e causou um enorme debate na Internet.

   Em um programa de prêmios, o candidato tem diante de si três portas. Atrás de uma destas portas, há um grande prêmio; atrás das demais há um bode. O candidato escolhe inicialmente uma das portas. O apresentador (que sabe qual é a porta que contém o prêmio) abre uma das portas não indicadas pelo candidato, mostrando necessariamente um bode. A seguir ele pergunta se o candidato mantém sua escolha ou deseja trocar de porta. O candidato deve trocar ou não? (Uma forma de você guiar sua intuição consiste em simular o problema.).

10) Suponha que 16 seleções, entre as quais Brasil e Argentina, vão participar de um torneio. Serão formados quatro grupos de quatro seleções, através de sorteio. Qual é a probabilidade de que Brasil e Argentina fiquem no mesmo grupo?

11) A China tem um sério problema de controle de população. Várias políticas foram propostas (e algumas colocadas em efeito) visando proibir as famílias de terem mais de um filho. Algumas destas políticas, no entanto, tiveram conseqüências trágicas. Por exemplo, muitas famílias de camponeses abandonaram suas filhas recém-nascidas, para terem uma outra chance de ter um filho do sexo masculino. Por essa razão, leis

menos restritivas foram consideradas. Uma das leis propostas foi a de que as famílias teriam o direito a um segundo (e último) filho, caso o primeiro fosse do sexo feminino. Deseja-se saber que conseqüências isto traria para a composição da população, a longo prazo. Haveria uma maior proporção de mulheres? De homens?

a) Com auxílio de uma moeda, simule a prole de um conjunto de 10 famílias (jogue a moeda; se obtiver cara, é um menino, e a família pára por aí; se der coroa, é uma menina; jogue a moeda mais uma vez e veja se o segundo filho é menino ou menina).

b) Reúna os resultados obtidos pelos integrantes do grupo e produza estatísticas mostrando o número médio de crianças por família, a proporção de meninos e meninas na população e a proporção de famílias que têm um filho homem. O que estes resultados sugerem?

c) Qual é a probabilidade de que uma família tenha um filho do sexo masculino? Qual o número médio de filhos por família? Dentre todas as crianças nascidas, qual é a proporção de meninos e meninas?

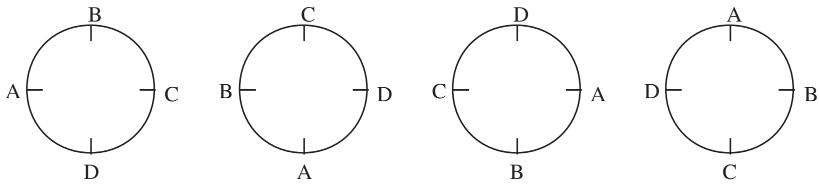
Capítulo 4

Mais Permutações e Combinações (grupo 2)

Como vimos anteriormente, é possível resolver um grande número de problemas interessantes de contagem sem utilizar fórmulas, apenas empregando apropriadamente as quatro operações. Há no entanto, certos problemas que ocorrem com freqüência e que não são imediatos, como o problema das combinações simples, para os quais é interessante conhecer a fórmula que expressa sua solução, para empregá-la em outros problemas. Neste material adicional, veremos alguns problemas que utilizam permutações e combinações em sua solução e travaremos contato com algumas outras fórmulas combinatórias que podem ser úteis.

Exemplo 1. De quantos modos 4 crianças podem formar uma roda?

Solução. À primeira vista, pode parecer que para formar uma roda com as 4 crianças basta escolher uma ordem para elas, o que pode ser feito de $4! = 24$ modos. Entretanto, as rodas ABCD, BCDA, CDAB e DABC mostradas na figura abaixo são iguais, já que cada uma resulta da anterior por uma "virada"de 1/4 de volta.



Para calcular o número de maneiras possíveis de formar uma roda, podemos raciocinar de dois modos diferentes. Um deles consiste em partir do resultado anterior ($4! = 24$) e perceber que cada roda está sendo contada 4 vezes. Logo, o número correto de rodas que podem ser formadas é $\frac{24}{4} = 6$. Alternativamente, podemos começar por fixar a criança A na posição à esquerda (já que em qualquer roda A pode ficar nesta posição). Agora, temos 3 lugares para as 3 crianças que restaram, para um total de $3! = 6$ possibilidades.

De modo geral, o número de modos de colocar n objetos em círculo, considerando-se iguais disposições que coincidam por rotação (ou seja, o número de *permutações circulares* de n objetos) é $PC_n = (n-1)!$.

Exemplo 2. Considere um grupo formado por 7 homens (entre os quais José) e 5 mulheres (entre as quais Maria), do qual se quer extrair uma comissão constituída por 4 pessoas. Quantas são as comissões:

a) possíveis?

Solução. Devemos escolher 4 das 12 pessoas, o que pode ser feito de C_{12}^4 modos, que é igual a $\frac{12\times11\times10\times9}{1\times2\times3\times4} = 495$ comissões.

b) formadas por 2 homens e 2 mulheres?

Solução. Para formar uma comissão, devemos escolher os 2 homens, o que pode ser feito de C_7^2 modos, e, a seguir, as 2 mulheres, o que pode ser feito de C_5^2 maneiras. O número total de possibilidades de escolha, pelo princípio multiplicativo, é $C_7^2 \times C_5^2 = 21 \times 10 = 210$ comissões.

c) em que haja pelo menos 2 mulheres?

Solução. Há 3 tipos de comissão possíveis: com 2 homens e 2 mulheres, com 1 homem e 2 mulheres e com 4 mulheres. Para obter o número total de comissões, contamos separadamente as comissões de cada tipo e somamos os resultados, obtendo $C_7^2 \times C_5^2 + C_7^1 \times C_5^3 + C_5^4 = 210 + 70 + 5 = 285$ comissões.

Uma tentativa de contagem que leva a um erro muito comum é a seguinte: como a comissão deve ter pelo menos 2 mulheres, inicialmente escolhemos 2 mulheres, o que podemos fazer de $C_5^2 = 10$ modos. A seguir, basta escolher 2 pessoas quaisquer entre as 10 que sobraram, o que pode ser feito de $C_{10}^2 = 45$ modos. Logo, por este raciocínio, teríamos $10 \times 45 = 450$, que difere do resultado (correto) encontrado acima. Esta solução, portanto, está **errada**. Você sabe explicar onde está o erro no raciocínio?

d) em que José participe, mas Maria não?

Solução. Como José deve participar da comissão, resta escolher apenas 3 outras pessoas, entre as 10 restantes, (já que José já foi escolhido e Maria não pode ser escolhida). Logo, o número de possibilidades é igual a $C_{10}^3 = 120$.

e) formadas por 2 homens, entre os quais José, e 2 mulheres, mas sem incluir Maria?

Solução. Temos que escolher 1 homem entre 6 (José já está escolhido) e 2 mulheres entre 4 (Maria não pode ser escolhida). O número de comissões é $6 \times C_4^2 = 6 \times 6 = 36$.

Exemplo 3. Quantos anagramas podemos formar com a palavra MATEMATICA?

Solução. Um anagrama é uma palavra (não necessariamente fazendo sentido) formada com as mesmas letras, mas em uma ordem qualquer. Quando as n letras de uma palavra são todas distintas, o número de anagramas é igual ao número de permutações de n, que, como vimos, é igual a $n!$. Mas a palavra MATEMATICA tem letras repetidas: há 3 A, 2 M e 2 T, além de E, I e C, que aparecem uma vez cada.

Uma solução (consistente com o princípio de atacar o mais complicado antes) é, antes de mais nada, decidir o que fazemos com as letras repetidas. Para colocar os A, temos que escolher 3 dentre os 10 lugares possíveis, o que pode ser feito de C_{10}^3 modos. Para colocar os M, restam agora 7 lugares, dos quais devemos escolher 2, o que pode ser feito de C_7^2 maneiras. Agora só restam 5 lugares, dos quais devemos escolher 2 para colocar os T; temos C_5^2 possibilidades. Agora, só restam 3 lugares, nos quais devem ser colocadas as 3 letras restantes, o que pode ser feito de $3 \times 2 \times 1$ modos. Logo, o número total de anagramas é $C_{10}^3 C_7^2 C_5^2 \times 6 = 151200$.

Mas há um outro modo de pensar, partindo do número de permutações de 10 letras distintas (igual a 10!). Esta contagem não está correta, porque consideramos letras iguais como se fossem distintas. Ou seja, é como se considerássemos as permutações de $A_1, A_2, A_3, M_1, M_2, T_1, T_2, E, I$ e C. Para corrigir a contagem, basta contar quantas vezes cada anagrama foi contado. Por exemplo, o anagrama $AAAMMTTEIC$ foi contado várias vezes: um como $A_1A_2A_3M_1M_2T_1T_2EIC$, outro como $A_2A_1A_3M_1M_2T_1T_2EIC$, etc. Na verdade, ele foi contado tantas vezes como os modos de ordenar os 3A, os 2 M e os 2 T, que é igual a $3! \times 2! \times 2!$. O número de anagramas é, então, $\frac{10!}{3!2!2!} = 151.200$, como encontrado anteriormente.

O segundo raciocínio pode ser facilmente estendido para uma situação geral. O número de permutações de n objetos nem todos distintos, em que um deles aparece n_1 vezes, outro n_2 vezes, e assim por diante, é $P_n^{n_1,n_2,\ldots} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots}$.

Exemplo 3. De quantos modos 6 pessoas (João, Maria, Pedro, Janete, Paulo e Alice) podem ser divididas em 3 duplas?

Solução. O problema é mais sutil do que parece a princípio. À primeira vista, pode parecer que a situação é a mesma do problema anterior. Uma maneira de dividir as 6 pessoas em duplas é colocar as pessoas em fila e formar uma permutação de AABBCC. Como visto no exemplo anterior, isto pode ser feito de $\frac{6!}{2!2!2!} = 90$ modos. Mas isto não está correto, pois atribuiu nomes específicos (A, B e C) às duplas formadas. Note que colocar João e Maria na dupla A e Pedro e Janete na dupla B é equivalente a colocar João e Maria na dupla B e Pedro e Janete na dupla A. Portanto, uma mesma distribuição em duplas está sendo contada várias vezes. Mais precisamente, cada distribuição em duplas está sendo contada tantas vezes quanto o número de modos de ordenar A, B e C, ou seja, 3! = 6 vezes. Logo, o número de possíveis distribuições em duplas é $\frac{90}{6} = 15$.

Exemplo 4. Uma professora tem 3 bolas de gude para distribuir para 5 meninos (digamos, Alfredo, Bernardo, Carlos, Diogo e Eduardo). De quantos modos ela pode fazer esta distribuição:

a) supondo que ela dê as bolas para 3 alunos distintos?

Solução. Neste caso, ela deve escolher 3 dentre os 5 meninos para receber as bolas, o que pode ser feito de $C_5^3 = 10$ modos.

b) supondo que os contemplados possam ganhar mais de uma bola? (Por exemplo, Carlos pode receber todas as bolas.)

Solução. Listamos abaixo algumas possíveis escolhas dos contemplados:

Alfredo, Bernardo, Eduardo

Alfredo, Alfredo, Diogo
Alfredo, Diogo, Diogo
Carlos, Carlos, Carlos

Estes grupamentos são chamados de *combinações completas* (ou *com repetição*)dos 5 meninos tomados 3 a 3. Note que o que distingue as diferentes distribuições é o número de bolas que cada aluno recebe. Portanto, o número de possibilidades é igual ao número de listas $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ de números inteiros não negativos (representando o número de objetos dados a Alfredo, Bernardo, Carlos, Diogo e Eduardo, respectivamente) que satisfazem a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3$.

Neste caso simples, podemos resolver o problema separando a contagem em casos. A primeira possibilidade é a de que haja três premiados, cada um ganhando uma bola. Como vimos acima, isto pode ser feito de $C_5^3 = 10$ modos. A segunda possibilidade é de que haja dois premiados, um ganhando 1 bola e outro 2 bolas. O primeiro menino pode ser escolhido de 5 modos e o segundo de 4; logo, há $4 \times 5 = 20$ maneiras de distribuir as bolas para dois dos meninos. Finalmente, as bolas podem ir todas para um só menino, que pode ser escolhido de 5 modos. Portanto, o número total de possibilidades é $10 + 20 + 5 = 35$.

No entanto, dividir a contagem em casos, como fizemos acima, não vai ser prático caso o número de bolas e meninos seja maior. Para contar de modo eficiente o número de distribuições vamos recorrer a um truque, que nos permite transformar este problema em outro mais simples. Para formar as diferentes distribuições, colocamos as bolas em fila e as separamos em cinco lotes (correspondentes a cada um dos meninos), através de traços verticais. É claro que, neste caso, alguns destes lotes estarão vazios.

Vejamos alguns exemplos:

- $0||0|0|$ corresponde a dar 1 bola para Alfredo, para Carlos e para Diogo, enquanto Bernardo e Eduardo não ganham bolas.

- ||00||0 corresponde a dar 2 bolas para Carlos e 1 para Eduardo, enquanto Alfredo, Bernardo e Carlos não ganham bolas.

Note que há uma correspondência perfeita entre as possíveis distribuições e as listas formadas por 3 bolas e 4 traços. Mas estas últimas nós já sabemos contar! Basta escolher 3 das 7 posições para colocar as bolas, o que pode ser feito de $C_7^3 = 35$ maneiras, como encontramos acima.

Naturalmente, podemos aplicar esta solução para o problema geral de contar o número de maneiras de distribuir p objetos para n pessoas (ou seja, de calcular o número de soluções inteiras e não-negativas de $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = p$, ou ainda, de calcular o número CR_n^p de combinações completas de n elementos tomados p a p). Temos p bolas, que devem ser separadas por $n - 1$ tracinhos. Ou seja, precisamos escolher p das $n + p - 1$ posições para as bolas. A resposta, portanto, é $CR_n^p = C_{n+p-1}^p$.

Exercícios

1) De quantos modos podemos formar uma roda com 5 meninos e 5 meninas de modo que crianças de mesmo sexo não fiquem juntas?

2) De quantos modos podemos formar uma roda de ciranda com 6 crianças, de modo que duas delas, Vera e Isadora, não fiquem juntas?

3) De quantos modos é possível dividir 15 atletas em três times de 5 atletas, denominados Esporte, Tupi e Minas?

4) De quantos modos é possível dividir 15 atletas em três times de 5 atletas?

5) De quantos modos é possível dividir 20 objetos em 4 grupos de 3 e 2 grupos de 4?

6) Um campeonato é disputado por 12 clubes em rodadas de 6 jogos cada. De quantos modos é possível selecionar os jogos da primeira rodada?

7) Quantos são os anagramas da palavra ESTRELADA?

8) Quantos são os números naturais de 7 algarismos nos quais o algarismo 4 figura exatamente 3 vezes e o algarismo 8 exatamente 2 vezes?

9) Quantos são os subconjuntos de $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, com p elementos, nos quais:

   a) a_1 figura?

   b) a_1 não figura?

   c) a_1 e a_2 figuram?

   d) pelo menos um dos elementos a_1, a_2 figura?

   e) exatamente um dos elementos a_1, a_2 figura?

10) Considere um conjunto C de 20 pontos do espaço que tem um subconjunto C_1 formado por 8 pontos coplanares. Sabe-se que toda vez que 4 pontos de C são coplanares, então eles são pontos de C_1. Quantos são os planos que contêm pelo menos três pontos de C?

11) Quantos são os anagramas da palavra PARAGUAIO que não possuem consoantes juntas?

12) De quantos modos podemos selecionar p elementos do conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ sem selecionar dois números consecutivos?

13) Depois de ter dado um curso, um professor resolve se despedir de seus 7 alunos oferecendo, durante 7 dias consecutivos, 7

jantares para 3 alunos cada, de modo que o mesmo par de alunos não compareça a mais de um jantar.

a) Prove que cada aluno deve comparecer a exatamente 3 jantares.

b) De quantos modos o professor pode fazer os convites para os jantares?

14) Em uma escola, um certo número de profesores se distribuem em 8 bancas examinadoras de modo que cada professor participa de exatamente duas bancas e cada duas bancas têm exatamente um professor em comum.

a) Quantos são os professores?

b) Quantos professores há em cada banca?

15) Quantas são as soluções inteiras e positivas de $x + y + z = 7$?

16) Quantas são as soluções inteiras e não-negativas da desigualdade $x + y + z \leq 6$?

17) Uma indústria fabrica 5 tipos de balas, que são vendidas em caixas de 20 balas, de um só tipo ou sortidas. Quantos tipos diferentes de caixa podem ser fabricados?

Capítulo 5

Probabilidade Condicional (grupo 2)

Veremos a seguir exemplos de situações onde a probabilidade de um evento é modificada pela informação de que um outro evento ocorreu, levando-nos a definir *probabilidades condicionais*.

Exemplo 1. Em uma urna há duas moedas aparentemente iguais. Uma delas é uma moeda comum, com uma cara e uma coroa. A outra, no entanto, é uma moeda falsa, com duas caras. Suponhamos que uma dessas moedas seja sorteada e lançada.

a) Qual é a probabilidade de que a moeda lançada seja a comum?

Solução. A resposta é $1/2$, já que ambas as moedas têm a mesma chance de serem sorteadas.

b) Qual é a probabilidade de que saia uma cara?

Solução. Há quatro possíveis resultados para o sorteio da moeda e o resultado do lançamento, todos com a mesma probabilidade:

- a moeda sorteada é a comum e o resultado é cara

- a moeda sorteada é a comum e o resultado é coroa
- a moeda sorteada é a falsa e o resultado é cara
- a moeda sorteada é a falsa e o resultado também é cara, mas saindo a outra face

Como em 3 dos 4 casos acima o resultado é cara, a probabilidade de sair cara é $\frac{3}{4}$.

c) Se o resultado do lançamento é cara, qual é a probabilidade de que a moeda sorteada tenha sido a comum?

Solução. No item a) verificamos que a probabilidade de sair cara é 1/2. Mas a situação é diferente agora: temos uma informação adicional, a de que, após o lançamento da moeda, o resultado foi cara. Com esta informação, podemos rever o cálculo da probabilidade da moeda honesta ter sido sorteada. Dos quatro resultados possíveis para o experimento, listados acima, o segundo deve ser excluído. Restam, assim, três possibilidades igualmente prováveis. Delas, apenas na primeira a moeda sorteada é a comum. Logo, com a informação de que o laçamento resultou em cara, a probabilidade de que a moeda sorteada tenha sido a comum se reduziu a 1/3.

A probabilidade que calculamos no exemplo anterior é uma *probabilidade condicional*. De um modo geral, a probabilidade condicional de um evento A, na certeza da ocorrência de um evento B (de probabilidade não nula) é denotada por $P(A|B)$ e definida como

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

No caso do exemplo anterior, chamemos de A o evento "sortear a moeda comum", e de B o evento "obter resultado cara". O evento $A \cap B$ é "sortear a moeda comum e tirar cara". Temos $P(A \cap B) =$

$1/4$, $P(B) = 3/4$ e, assim, $P(A|B) = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$, como encontramos anteriormente.

Exemplo 2. Uma carta é sorteada de um baralho comum, que possui 13 cartas (A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K) de cada naipe (ouros, copas, paus e espadas).

a) Qual é a probabilidade de que a carta sorteada seja um A?

Solução. Como o baralho tem $13 \times 4 = 52$ cartas e 4 delas são ases, a probabilidade de tirar um A é $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

b) Sabendo que a carta sorteada é de copas, qual é a probabilidade de que ela seja um A?

Solução. O fato de que a carta sorteada é de copas restringe os casos possíveis às 13 cartas de copas, das quais exatamente uma é A. Logo, a probabilidade de ser sorteado um A, dado que a carta sorteada é de copas, permanece igual a $\frac{1}{13}$. Mais formalmente, designando por A o evento "sortear A"e, por B, "sortear copas", o evento $A \cap B$ é "sortear o A de copas"e a probabilidade pedida é $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/52}{13/52} = \frac{1}{13}$.

O exemplo acima ilustra uma situação importante: aquela na qual a probabilidade condicional de A na certeza de B é igual à probabilidade de A (ou seja a ocorrência de B não influi na probabilidade de ocorrência de A). Esta condição implica em $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(B)$, ou seja, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Dizemos, então, que dois eventos A e B tais que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ são *independentes*.

Exemplo 3. Um sistema de segurança tem dois dispositivos que funcionam de modo independente e que tem probabilidades iguais a 0,2 e 0,3 de falharem. Qual é a probabilidade de que pelo menos um dos dois componentes não falhe?

Solução. Como os componentes funcionam independentemente, os eventos $A =$ "o primeiro dispositivo falha" e $B =$ "o segundo dispositivo falha" são independentes. Logo, o evento $A \cap B =$ "ambos falham" tem probabilidade $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06$ e, assim, a probabilidade de que pelo menos um não falhe é igual a $1 - 0,06 = 0,94$.

Exemplo 4. Uma questão de múltipla escolha tem 5 alternativas. Dos alunos de uma turma, 50% sabem resolver a questão, enquanto os demais "chutam" a resposta. Um aluno da turma é escolhido ao acaso.

a) Qual é a probabilidade de que ele tenha acertado a questão?

Solução. Neste caso, vamos utilizar probabilidades condicionais conhecidas para calcular a probabilidade de dois eventos ocorrerem simultaneamente. Observe que, da expressão $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ decorre $P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$. Se o aluno sabe resolver a questão, ele tem probabilidade 1 de acertá-la, enquanto, se ele não sabe, sua probabilidade de acerto é 1/5 = 0,2. Portanto, $P(\text{acerta}|\text{sabe}) = 1$, enquanto $P(\text{acerta}|\text{não sabe}) = 0,2$. Podemos então obter as seguinte probabilidades:

$$P(\text{sabe e acerta}) = P(\text{sabe}) \cdot P(\text{acerta}|\text{sabe}) = (0,5) \cdot 1 = 0,5$$

$$\begin{aligned} P(\text{não sabe e acerta}) &= P(\text{não sabe}) \cdot P(\text{acerta}|\text{não sabe}) \\ &= 0,5 \cdot 0,2 = 0,1 \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} P(\text{acerta}) &= P(\text{sabe e acerta}) + P(\text{não sabe e acerta}) \\ &= 0,5 + 0,1 = 0,6. \end{aligned}$$

b) Dado que o aluno acertou a questão, qual é a probabilidade de que ele tenha "chutado"?

Solução. O que desejamos calcular é a probabilidade condicional de que o aluno não saiba resolver a questão, dado que ele a acertou. Temos:

$$P(\text{não sabe}|\text{acerta}) = \frac{P(\text{não sabe e acerta})}{P(\text{acerta})} = \frac{0,1}{0,6} = \frac{1}{6}$$

Exercícios

1) Joga-se um dado viciado duas vezes. Determine a probabilidade condicional de obter 3 na primeira jogada sabendo que a soma dos resultados foi 7.

2) Um juiz de futebol meio trapalhão tem no bolso um cartão amarelo, um cartão vermelho e um cartão com uma face amarela e uma face vermelha. Depois de uma jogada violenta, o juiz mostra um cartão, retirado do bolso ao acaso, para um atleta. Se a face que o jogador vê é amarela, qual é a probabilidade da face voltada para o juiz ser vermelha?

3) Um exame de laboratório tem eficiência de 95 % para detectar uma doença quando ela de fato existe. Além disso, o teste aponta um resultado falso positivo para 1% das pessoas sadias testadas. Se 0,5% da população tem a doença, qual é a probabilidade de que uma pessoa, escolhida ao acaso, tenha a doença, sabendo que o seu exame foi positivo?

4) Quantas vezes, no mínimo, se deve lançar um dado para que a probabilidade de obter algum 6 seja superior a 0,9?

5) Em uma cidade, as pessoas falam a verdade com probabilidade 1/3. Suponha que A faz uma afirmação e D diz que C

diz que B diz que A falou a verdade. Qual é a probabilidade de que A tenha falado a verdade?

6) 2^n jogadores de igual habilidade disputam um torneio. Eles são divididos em grupos de 2, ao acaso, e jogadores de um mesmo grupo jogam entre si. Os perdedores são eliminados e os vencedores são divididos novamente em grupos de 2 e assim por diante, até restar apenas um jogador, que é proclamado campeão.

   a) Qual é a probabilidade dos jogadores A e B se enfrentarem durante o torneio?

   b) Qual é a probabilidade do jogador A jogar exatamente k partidas?

7) Duas máquinas A e B produzem 3000 peças em um dia. A máquina A produz 1000 peças, das quais 3% são defeituosas. A máquina B produz as restantes 2000, das quais 1% são defeituosas. Da produção total de um dia, uma peça é escolhida ao acaso e, examinando-a, constata-se que ela é defeituosa. Qual é a probabilidade de que ela tenha sido produzida pela máquina A?

8) Um prisioneiro recebe 50 bolas brancas e 50 bolas pretas. O prisioneiro deve distribuir, do modo que preferir, as bolas em duas urnas, mas de modo que nenhuma das duas urnas fique vazia. As urnas serão embaralhadas e o prisioneiro deverá, de olhos fechados, escolher uma urna e, nesta urna, uma bola. Se a bola for branca, ele será libertado; caso contrário, ele será condenado. De que modo o prisioneiro deve distribuir as bolas nas urnas para que a probabilidade de ele ser libertado seja máxima? Qual é esta probabilidade?

Soluções dos Exercícios

Capítulo 1

1)

a) As possíveis escolhas de líder e vice-líder são (usando somente as iniciais): A-B, A-C, A-D, B-A, B-C, B-D, C-A, C-B, C-D, D-A, D-B, D-C. Portanto, no total há 12 escolhas possíveis.
b) Há 4 maneiras de escolher o líder. Para cada uma destas escolhas, o vide-líder pode ser escolhido de 3 modos (já que a mesma pessoa não pode, ao mesmo tempo, ser líder e vice-líder). Logo, pelo Princípio Multiplicativo, o número de possibilidades é $4 \times 3 = 12$, que foi o que obtemos contando diretamente.

2)

a) Como há 3 opções de saladas, 3 de sopas e 4 de pratos principais, há $3 + 3 + 4 = 20$ modos de escolher um prato do cardápio.
b) O número de possíveis refeições é 3 (saladas) $\times 3$ (sopas) $\times 4$ (pratos principais) $= 36$.

3) São escritos 9 números de 1 algarismo, 90 números de 2 alga-

rismos (de 10 a 99) e 1 número de 3 algarismos. Logo, o total de algarismos escritos é $9 + 2 \times 90 + 3 = 192$.

4)

a) Cada um dos dois jogadores pode obter qualquer dos números de 1 a 6. Logo, o número de possíveis combinações de resultados é $6 \times 6 = 36$.
b) A soma pode ser qualquer número inteiro de $1 + 1 = 2$ até $6 + 6 = 12$. Há, portanto, 11 somas possíveis.

5) São 7 filamentos. Para cada um, há duas possibilidades (aceso ou apagado). Logo, o número total de configurações possíveis é $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^7 = 128$. Excluindo aquela em que estão todos apagados, obtemos 127 símbolos diferentes.

6)

a) São necessárias pelo menos 3 cores.

b) A faixa vertical pode ser pintada de 6 modos. Pintando a faixa vertical de cima para baixo, temos que a primeira pode ser pintada de 5 modos (não pode usar a cor da faixa vertical), a segunda de 4 (não pode a da faixa vertical e a da 1ª faixa horizontal) e a terceira também de 4 (não pode a da faixa vertical e a da 2ª faixa horizontal). Logo, o número total de bandeiras é $6 \times 5 \times 4 \times 4 = 480$.

7) Vamos contar separadamente os casos em que os quadrantes 1 e 3 têm cores iguais e cores diferentes. Pondo cores iguais nos quadrantes 1 e 3, temos $5 \times 4 \times 4 = 80$ possibilidades, pois há 5 modos de escolher a cor única para os quadrantes 1 e 3, há 4 modos de escolher a cor do quadrante 2 e há 4 modos de escolher a cor do quadrante 4. Pondo cores diferentes nos quadrantes 1 e 3, há $5 \times 4 \times 3 \times 3 = 180$ possibilidades, pois há 5 modos de escolher a

cor para o quadrante 1, há 4 modos de escolher a cor do quadrante 3, há 3 modos de escolher a cor do quadrante 2 e há 3 modos de escolher a cor do quadrante 4. A resposta é $80 + 180 = 260$.

8) Há 5^{10} gabaritos possíveis. Para ter a letra A aparecendo exatamente uma vez, devemos escolher a questão em que ela aparece (10 possibilidades) e a seguir, escolher a alternativa das demais (4 para cada, para um total de 4^9). Logo, o número total de possibilidades é 10×4^9. Se a letra A não aparece, temos somente 4 possibilidades de escolha para cada questão, para um total de 4^{10} possibilidades.

9) Os subconjuntos de $\{1,2,3\}$ são $8 : \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}$. De um modo geral, um subconjunto de um conjunto de n elementos é formado decidindo se cada elemento entra ou não no subconjunto. Para cada elemento há 2 possibilidades; o número total de possibilidades é 2^n.

10) A primeira pessoa pode escolher sua cadeira de 5 modos; a segunda, de 4; a terceira, de 3. A resposta é $5 \times 4 \times 3 = 60$.

11) A primeira mulher pode escolher sua posição de 10 modos. A segunda, de 8 modos. As outras, de 6, de 4 e de 2 modos. O primeiro homem, de 5 modos. Os demais, de 4, de 3, de 2 e de 1. A resposta é $10 \times 8 \times 6 \times 4 \times 2 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 460.800$.

12) O tabuleiro de 64 casas possui 4 casas de canto (vértices), 24 casas laterais que não são vértices e 36 casas centrais. Cada casa de canto possui 3 casas adjacentes; cada lateral possui 5 casas adjacentes e cada central possui 8 casas adjacentes. Vamos contar separadamente os casos que ocorrem conforme o rei negro ocupe uma casa de canto, lateral ou central. Se o rei negro ocupar uma casa de canto, haverá 4 posições para o rei negro e 60 posições para o rei branco, pois das 64 casas do tabuleiro uma estará ocupada

e as 3 a ela adjacentes não poderão ser ocupadas pelo rei branco. Haverá portanto $4 \times 60 = 240$ modos de dispor os reis.
Se o rei negro ocupar uma casa lateral que não seja de canto, haverá 24 posições para o rei negro e 58 posições para o rei branco, pois das 64 casas do tabuleiro uma estará ocupada e as 5 a ela adjacentes não poderão ser ocupadas pelo rei branco. Haverá portanto $24 \times 58 = 1.392$ modos de dispor os reis.
Se o rei negro ocupar uma casa central, haverá 36 posições para o rei negro e 55 posições para o rei branco, pois das 64 casas do tabuleiro uma estará ocupada e as 8 a ela adjacentes não poderão ser ocupadas pelo rei branco. Haverá portanto $36 \times 55 = 1.980$ modos de dispor os reis. Portanto, a resposta é $240 + 1.392 + 1.980 = 3.612$.
Se os reis fossem iguais, a resposta seria a metade da resposta anterior, 1.806.

13) Note que no caso em que são permitidas repetições, a condição da letra A figurar na palavra é terrível, pois ela pode figurar uma só vez, ou duas, etc... Por isso é melhor contar todas as palavras do alfabeto e diminuir as que não têm A e as que começam por A. A resposta é $26^5 - 25^5 - 26^4 = 1.658.775$.
No caso sem repetição, pode-se contar diretamente: há 4 modos de escolher a posição do A, 25 modos de escolher a letra da primeira casa restante, 24 para a segunda casa restante, etc. A resposta é $4 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 = 1.214.400$. Pode-se também repetir o raciocínio do caso com repetição:
$26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 - 25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21 - 1 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 = 1.214.400$.

14) Há 26 modos de escolher cada letra e 10 modos de escolher cada algarismo. A resposta é $26^3 \times 10^4 = 175.760.000$.

15)Os passageiros que preferem sentar de frente podem fazê-lo de $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ modos; os que preferem sentar de costas podem fazê-lo de $5 \times 4 \times 3 = 60$ modos; os demais podem se colocar nos lugares restantes de $3 \times 2 \times 1 = 6$ modos. A resposta é $120 \times 60 \times 6 = 43.200$.

16)

a) O 0 aparece nas unidades 222 vezes, nos números $10, 20, 30, \ldots, 2200$. Aparece nas dezenas 220 vezes, nos números $10x, 20x, \ldots, 220x$. Aparece nas centenas 200 vezes, nos números $10xy$ e $20xy$. A resposta é $222 + 220 + 200 = 642$.

b) Contamos os números com algum algarismo igual a 0, descontando do cálculo anterior o que houver sido contado indevidamente. O 0 aparece nas unidades 222 vezes, nos números $10, 20, 30, \ldots, 2200$. Das 220 vezes que aparece nas dezenas devemos descontar o total dos números do conjunto $\{10x, 20x, \ldots, 220x \ ; \ x = 0\}$, que é 22. Das 200 vezes que aparece nas centenas devemos descontar o total dos números do conjunto $\{10xy, 20xy \ ; \ x = 0 \text{ ou } y = 0\}$, que é $2 \times (9 + 9 + 1) = 38$. A resposta é $222 + (220 - 22) + (200 - 38) = 222 + 198 + 162 = 582$.

Outra solução: O algarismo 0 aparece nas unidades 222 vezes, nos números $10, 20, 30, \ldots, 2200$. Faltam os números dos conjuntos $\{10x, 20x, \ldots, 220x \ ; \ x \neq 0\}$ e $\{10xy, 20xy \ ; \ x \neq 0 \text{ e } y \neq 0\}$. O primeiro tem $22 \times 9 = 198$ números e o segundo, $2 \times 9 \times 9 = 162$ números. A resposta é $222 + 198 + 162 = 582$.

17) O mais simples é fazer todos os números menos aqueles em que o 5 não figura. A resposta é $9 \times 10 \times 10 \times 10 - 8 \times 9 \times 9 \times 9 = 3.168$.

18) Para formar uma coleção, você deve decidir quantas "Veja" farão parte da coleção, etc. A quantidade de revistas "Veja" pode ser escolhida de 6 modos $(0, 1, 2, 3, 4, 5)$. A de "Época", de 7 modos. A de "Isto É", de 5 modos. O número de coleções é $6 \times 7 \times 5 = 210$. O número de coleções não-vazias é 209.

19) A solução está errada. É possível que a mesma cor tenha sido escolhida para as faixas extremas. Neste caso, o número de possibilidades de escolha para a cor da faixa central é 3 e não 2. Logo, para esta ordem de pintura não é possível aplicar diretamente o Princípio Multiplicativo.

20) O casal João-Maria foi considerado diferente do casal Maria-João. Isso é devido a termos trabalhado com o conceito de primeira pessoa do casal. Por isso a resposta encontrada é o dobro da resposta real.

21) Há dois tipos de peças: as formadas por números iguais (que são $7:$ de $0-0$ até $6-6$) e as formadas por um par de números distintos. Destas, há $7 \times 6/2 = 21$ peças. O total é 28. Se os números forem até 8, o número de peças é $9 + 9 \times 8/2 = 45$.

22) Cada retângulo corresponde a escolher 2 linhas e 2 colunas entre as 9 linhas e colunas de separação das casas. As duas linhas podem ser escolhidas de $9 \times 8/2 = 36$ modos. O número de possibilidades para as colunas é o mesmo. Logo, o número total de retângulos é $36 \times 36 = 1.296$.

Capítulo 2

1)

a) Os resultados possíveis são $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$ e 12.

b) As probabilidades são diferentes, porque o número de casos favoráveis varia. O resultado mais provável é o 7, que pode ocorrer de 6 modos diferentes e que tem, portanto, probabilidade $6/36 = 1/6$. Os menos prováveis são 2 e 12, que só podem ocorrer de um modo e que têm, cada um, probabilidade 1/36.

c) A tabela abaixo tem todos os resultados possíveis $s + t$, onde s é resultado do lançamento do primeiro dado e t, do segundo. Colocamos os valores de s na primeira linha e os de t na primeira coluna.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

A probabilidade dos resultados 2, 12 e 7 já foram calculadas. O resultado 3 tem probabilidade $2/36 = 1/18$, assim como o resultado 11. O resultado 4 tem probabilidade $3/36 = 1/12$, assim como o resultado 10. O resultado 5 tem probabilidade $4/36 = 1/9$, assim como o resultado 9. O resultado 6 tem probabilidade 5/36, assim como o resultado 8.

2) Vamos considerar todas as seqüências possíveis de resultados. Como em cada lançamento sai cara C ou coroa K, há 2 possibilidades; logo, o número de possibilidades é igual a $2 \times 2 \times 2 = 8$. Todas as seqüências têm a mesma probabilidade de ocorrência igual a 1/8. Com duas caras temos CCK, CKC e KCC. Logo, a probabilidade de que saiam duas caras é 3/8.

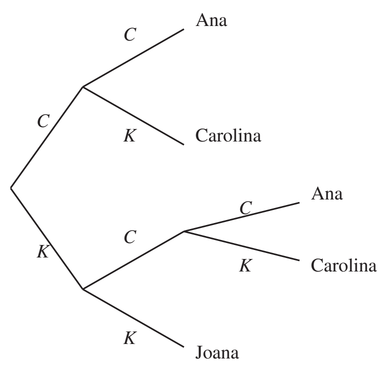
3) São $2{\times}2{\times}2{\times}2{=}16$ possíveis seqüências para os sexos das crianças, todas equiprováveis. Em 6 delas há 2 casais ($HMHM$, $MHMH$, $HHMM$, $MMHH$, $MHHM$,

$HMMH$). Em 8 delas há 3 filhos de um sexo e um de outro ($MHHH, HMHH, HHMH, HHHM, MMMH, MMHM, MHMM, HMMM$). Logo, é mais provável ter três filhos de um sexo e um de outro.

4) Em ambos os casos, Laura e Telma têm a mesma probabilidade de tirar um número maior que a outra. Se não há devolução, não pode haver empate, e a probabilidade de que Laura tenha o maior número é 50%. Se há devolução, há possibilidade de empate e a probabilidade de que isto ocorra é igual a 100 casos de empate dividido por 100×100 casos possíveis que é igual a $0,01$, ou seja, $\frac{100}{100\times 100} = 0,01$. Logo, neste caso a probabilidade de que Laura tenha um número maior do que o de Telma é $(1-0,01)/2 = 0,99/2 = 0,495$.

5) Um dominó tem 28 peças, como vimos no capítulo 1. Logo, podemos selecionar duas peças, uma de cada vez, de 28×27 modos. Se a primeira peça é uma das 7 que são duplas, há 6 modos de escolher a segunda de modo a conter o mesmo número (há, no total, 7 peças em que este número aparece). Se a primeira peça é uma das 21 que têm dois números, a segunda pode ser escolhida de 12 modos (6 para cada). Logo a probabilidade é $\frac{6\times 7+21\times 12}{28\times 27} = \frac{7}{18}$.

6) A árvore de possibilidades abaixo mostra que o jogo pode terminar em 2 ou 3 lançamentos.



Ana só vence em dois casos (CC, com probabilidade 1/4 , e KCC, com probabilidade 1/8); logo, tem probabilidade 3/8 de vencer. Carolina vence se sai CK (probabilidade 1/4) ou KCK (probabilidade 1/8); logo, também tem probabilidade 3/8 de vencer. Já Joana só vence se sair KK, que tem probabilidade 1/4.

7) Embora haja pessoas que ganhem a vida com este tipo de afirmação, ela é completamente sem sentido. As extrações são independentes, o que faz com que uma dezena estar atrasada seja completamente irrelevante para o que vai acontecer no futuro. Na verdade, se estamos em dúvidas sobre a eqüiprobabilidade das diversas dezenas, poderíamos concluir exatamente o contrário: se uma dezena sai menos que outras, talvez seja porque seja menos provável (por exemplo, a bolinha correspondente pode ser maior ou mais leve que as outras).

8) Obviamente, os dois jogos têm a mesma probabilidade de serem vitoriosos (mas você acha que as pessoas, em geral, concordariam com isto? por quê?).

9) O candidato deve trocar a porta. Se ele não o faz, sua chance de vitória está em ter escolhido a porta certa da primeira vez, o que

ocorre com probabilidade 1/3. Trocando a porta, ele vai ganhar o prêmio exatamente nos casos em que a porta escolhida é a errada, o que tem probabilidade 2/3.

Capítulo 3

As soluções dos exercícios 1 a 9 estão no Capítulo 2, pois são os mesmos. A seguir, as soluções dos exercícios 10 e 11 desse capítulo.

10) (Solução rápida) Suponha que o sorteio é feito com cada seleção retirando uma bola de uma urna, onde há quatro bolas de mesma cor. Suponha, ainda, que o Brasil seja o primeiro e a Argentina a segunda a retirar (isto não afeta a probabilidade pedida; se você não acredita nisto, veja a segunda solução). Depois que o Brasil retirou sua bolinha, restam 15 bolas na urna, 3 das quais têm a mesma cor da retirada pelo Brasil. Logo, a probabilidade de que a Argentina retire uma bola de mesma cor é $3/15 = 1/5$.

(Solução mais detalhada) O espaço amostral das bolas retiradas por Brasil e Argentina é formada por todos os pares de bolas distintas, que são $16 \times 15 = 240$. É claro que todos os pares são equiprováveis. Deles, os favoráveis às duas seleções ficarem no mesmo grupo são aqueles em que as cores são iguais. Estes são 4 cores $\times 4$ bolas (Brasil) $\times 3$ bolas (Argentina) $= 48$. Logo, a probabilidade de que eles estejam no mesmo grupo é $48/240 = 1/5$.

11) As seqüências possíveis de filhos são H (prob. 1/2), MH (prob. 1/4) e MM (prob. 1/4). Logo, as famílias têm um filho do sexo masculino com probabilidade 3/4. A probabilidade de que elas tenham pelo menos um filho do sexo feminino é 1/2. As famílias têm um ou dois filhos com probabilidade 1/2 cada. Logo, em média,

elas têm $1,5$ filhos. O número de meninos é 0 (com prob. $1/4$) ou 1 (com prob. $3/4$). Logo, em média há $0,75$ meninos por família. Em conseqüência, há também $0,75$ meninas em média por família. Na verdade, isto era óbvio: a política adotada não modifica o fato de que os nascimentos são divididos igualmente entre meninos e meninas.

Capítulo 4

1) Há $PC_5 = 4!$ modos de formar uma roda com as meninas. Depois disso, os 5 meninos devem ser postos nos 5 lugares entre as meninas, o que pode ser feito de 5! modos. A resposta é $4! \times 5! = 24 \times 120 = 2.880$.

2) É mais simples calcular o número total de rodas e excluir aquelas em que Vera e Isadora ficam juntas. O número total de rodas é $PC_6 = 5! = 120$. Para formar as rodas em que Vera e Isadora ficam juntas, a primeira decisão a tomar é a ordem em que Vera e Isadora se colocarão na roda. Há 2 possibilidades: Vera-Isadora e Isadora-Vera. Agora tudo se passa como se Vera e Isadora fossem uma única criança. Assim, há $2(PC_5) = 2 \times 4! = 48$ rodas em que Vera e Isadora ficam juntas. A resposta é $120 - 48 = 72$ rodas.

3) Há C_{15}^5 modos de formar o Esporte; depois disso, C_{10}^5 modos de formar o Tupi; finalmente, 1 único modo de formar o Minas.

A resposta é $C_{15}^5 \times C_{10}^5 \times 1 = 756.756$.

4) O número de possibilidades é igual ao número obtido no problema anterior dividido por $3! = 6$, já que permutando os nomes dos times a subdivisão continua a mesma. A resposta é $756.756/6 =$

126.126.

5) Escolha, sucessivamente, 3 objetos para formar os 4 grupos de 3; isto pode ser feito, sucessivamente, de C_{20}^3 , C_{17}^3, C_{14}^3 e C_{11}^3 modos. A seguir, com os 8 objetos restantes forme os 2 grupos restantes, o que pode ser feito de C_8^4 e C_4^4 modos, respectivamente. Fazendo isso, contamos cada divisão $4! \cdot 2!$ vezes, porque, quando formamos os mesmos grupos de 3 e os mesmos grupos 4 em outra ordem, contamos como se fosse outra divisão em grupos.

A resposta é $\dfrac{C_{20}^3 \cdot C_{17}^3 \cdot C_{14}^3 \cdot C_{11}^3 \cdot C_8^4 . C_4^4}{4! \cdot 2!} = \dfrac{20!}{(3!)^4(4!)^2 4!2!} =$
$= 67.897.830.000$.

Outra solução:

Forme uma fila com as 20 pessoas. Isso automaticamente as divide em 4 grupos de 3 e 2 grupos de 4: as 3 primeiras formam um grupo, as 3 seguintes formam outro, etc. Há 20! modos de formar a fila. Entretanto, uma mesma divisão em grupos corresponde a várias filas diferentes, o que faz com que, no resultado 20!, cada divisão tenha sido contada várias vezes. Devemos corrigir nossa contagem dividindo o resultado pelo número de vezes que cada divisão foi contada. Trocando a ordem dos elementos em cada grupo, o que pode ser feito de $3! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 4!$ modos, ou a ordem dos grupos, o que pode ser feito de $4! \cdot 2!$ modos, a divisão em grupos não se altera, mas a fila sim. Cada divisão foi, assim, contada $(3!)^4 \cdot (4!)^2 \cdot 4! \cdot 2!$ vezes e a resposta é $\dfrac{20!}{(3!)^4(4!)^2 4!2!}$.

6) Os adversários em cada jogo podem ser escolhidos, sucessivamente, de C_{12}^2, C_{10}^2, C_8^2, C_6^2, C_4^2 e C_2^2 modos. No entanto, assim contamos cada possível rodada 6! vezes, já que contamos diferentes ordens dos jogos como se fossem rodadas diferentes. A resposta é $\dfrac{C_{12}^2 \cdot C_{10}^2 \cdot C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2}{6!} = \dfrac{12!}{2^6 \cdot 6!} = 10.395$

Outra solução:

Colocando os 12 times em fila automaticamente formamos os 6 jogos da rodada. No entanto, a mesma rodada é contada várias vezes; os adversários em cada jogo podem ser ordenados de 2 modos, enquanto os jogos podem ser ordenados de 6! modos. A resposta é, portanto, $\dfrac{12!}{2^6 \cdot 6!}$.

7) Em ESTRELADA as letras A e E aparecem 2 vezes cada e as letras S, T, R, L e D aparecem 1 vez cada uma, havendo, portanto, 9 letras na palavra.

Para formar um anagrama, devemos escolher 2 das 9 posições para colocar as letras A, o que pode ser feito de C_9^2 modos, 2 das 7 posições restantes para colocar as letras E, o que pode ser feito de C_7^2 modos, e arrumar as letras S, T, R, L e D nas 5 posições restantes, o que pode ser feito de 5! modos. A resposta é $C_9^2 \cdot C_7^2 \cdot 5! = 90.720$.

Outra solução:

O número de anagramas é $P_9^{2,2,1,1,1,1,1} = \dfrac{9!}{2!2!1!1!1!1!1!} = 90.720$.

8) Vamos esquecer que a primeira casa do número não pode ser igual a zero. Isso fará com que contemos a mais e, depois, descontaremos o que foi contado indevidamente.

Há C_7^3 modos de escolher as casas que serão ocupadas pelo algarismo 4; depois disso, há C_4^2 modos de selecionar as casas que serão ocupadas pelo algarismo 8; finalmente, as duas casas restantes podem ser preenchidas de 8×8 modos (não podemos usar nessas casas os algarismos 4 e 8).

A "resposta"seria $C_7^3 \times C_4^2 \times 8 \times 8 = 35 \times 6 \times 64 = 13.440$.

Devemos subtrair os números começados por 0. Se o número começa por 0, há C_6^3 modos de escolher as casas que serão ocupadas pelo algarismo 4; depois disso, há C_3^2 modos de selecionar as casas que serão ocupadas pelo algarismo 8; finalmente, a casa restante pode ser preenchida de 8 modos (não podemos usar nessa casa os algarismos 4 e 8). Há $C_6^3 \times C_3^2 \times 8 = 20 \times 3 \times 8 = 480$ números começados por 0.

A resposta é $13.440 - 480 = 12.960$.

Outra solução:

Vamos contar separadamente:

i) números que começam em 4; ii) números que começam em 8; iii) números que não começam nem em 4 nem em 8.

i) Há 1 modo de preencher a primeira casa; depois disso, há C_6^2 modos de escolher as outras duas casas do número que também serão preenchidas com o algarismo 4; depois disso, há C_4^2 modos de escolher as duas casas que serão ocupadas pelo algarismo 8; finalmente, as duas casas restantes podem ser preenchidas de 8×8 modos (não podemos usar nessas casas os algarismos 4 e 8).

   Há $1 \times C_6^2 \times C_4^2 \times 8 \times 8 = 1 \times 15 \times 6 \times 64 = 5.760$ números do tipo i).

ii) Há 1 modo de preencher a primeira casa; depois disso, há 6 modos de escolher a outra casa do número que também será preenchida com o algarismo 8; depois disso, há C_5^3 modos de escolher as três casas que serão ocupadas pelo algarismo 4; finalmente, as duas casas restantes podem ser preenchidas de 8×8 modos (não podemos usar nessas casas os algarismos 4 e 8).

   Há $1 \times 6 \times C_5^3 \times 8 \times 8 = 6 \times 10 \times 64 = 3840$ números do tipo ii).

iii) Há 7 modos de preencher a primeira casa (não podemos usar nem 4, nem 8, nem 0); depois disso, há C_6^3 modos de escolher as três casas do número que serão preenchidas com o algarismo 4; depois disso, há C_3^2 modos de escolher as duas casas que serão ocupadas pelo algarismo 8; finalmente, a casa restante pode ser preenchida de 8 modos (não podemos usar nessas casas os algarismos 4 e 8).

Há $7 \times C_6^3 \times C_3^2 \times 8 = 7 \times 20 \times 3 \times 8 = 3.360$ números do tipo iii).

A resposta é $5.760 + 3.840 + 3.360 = 12.960$.

9) a) Para formar o subconjunto devemos escolher os $p-1$ outros elementos do subconjunto dentre os $n-1$ outros elementos do conjunto.

A resposta é C_{n-1}^{p-1}.

b) Para formar o subconjunto devemos escolher os p elementos do subconjunto dentre os $n-1$ outros elementos do conjunto.

A resposta é C_{n-1}^{p}.

Outra solução:

Há C_n^p p-subconjuntos, ou seja, subconjuntos com p elementos, e o elemento a_1 figura em C_{n-1}^{p-1} deles. Logo, há $C_n^p - C_{n-1}^{p-1}$ subconjuntos nos quais o elemento a_1 não figura.

A resposta é $C_n^p - C_{n-1}^{p-1}$.

Observação: As duas soluções apresentadas mostram que $C_n^p - C_{n-1}^{p-1} = C_{n-1}^{p}$. Essa é a famosa Relação de Stifel.

c) Para formar o subconjunto devemos escolher os $p-2$ outros elementos do subconjunto dentre os $n-2$ outros elementos do conjunto.

A resposta é C_{n-2}^{p-2}.

d) O total de p-subconjuntos é C_n^p. Para formar um subconjunto em que nem a_1 nem a_2 figurem devemos escolher os p elementos do subconjunto dentre os $n-2$ outros elementos do conjunto. Há, portanto, C_{n-2}^{p} subconjuntos nos quais nem a_1 nem a_2 figuram. Logo, o número de subconjuntos nos quais pelo menos um desses dois elementos figura é $C_n^p - C_{n-2}^{p}$.

Outra solução:

Há C_{n-1}^{p-1} p-subconjuntos nos quais o elemento a_1 figura e há C_{n-1}^{p-1} subconjuntos nos quais o elemento a_2 figura. Há, também, C_{n-2}^{p-2} p-subconjuntos nos quais os elementos a_1 e a_2 figuram ambos. Ao somarmos $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p-1} = 2C_{n-1}^{p-1}$ obtemos o número de subconjuntos nos quais pelo menos um dos elementos a_1 e a_2 figura, mas contamos duas vezes aqueles em que a_1 e a_2 figuram ambos.

A resposta é, portanto, $2C_{n-1}^{p-1} - C_{n-2}^{p-2}$.

Outra solução:

Há, como mostrado em c), C_{n-2}^{p-2} p-subconjuntos em que os elementos a_1 e a_2 figuram ambos.

Há C_{n-2}^{p-1} p-subconjuntos em que o elemento a_1 figura e o elemento a_2 não figura, pois, para formar um tal subconjunto, basta escolher os outros $p-1$ elementos do subconjunto dentre os $n-2$ elementos do conjunto que são diferentes de a_1 e de a_2.

Há, analogamente, C_{n-2}^{p-1} p-subconjuntos em que o elemento a_2 figura e o elemento a_1 não figura. Portanto, o número de p-subconjuntos em que figura pelo menos um desses dois elementos é $2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}$.

e) Como visto na solução anterior, a resposta é $2C_{n-2}^{p-1}$.

Outra solução:

Há, como visto em d), $2C_{n-1}^{p-1} - C_{n-2}^{p-2}$ p-subconjuntos nos quais pelo menos um dos elementos a_1 e a_2 figura. Há, como visto em c), C_{n-2}^{p-2} p-subconjuntos em que os elementos a_1 e a_2 figuram ambos.

A resposta é, portanto, $2C_{n-1}^{p-1} - C_{n-2}^{p-2} - C_{n-2}^{p-2} =$
$= 2C_{n-1}^{p-1} - 2C_{n-2}^{p-2}$.

Outra solução:

Há, como visto em d), $2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}$ p-subconjuntos nos quais pelo menos um dos elementos a_1 e a_2 figura. Há, como visto em c), C_{n-2}^{p-2} p-subconjuntos em que os elementos a_1 e a_2 figuram ambos.

A resposta é, portanto, $2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2} - C_{n-2}^{p-2} =$
$= 2C_{n-2}^{p-1}$.

10) Chamemos de D o conjunto $C - C_1$.
Há quatro tipos de planos:

i) determinados por três pontos de D;

ii) determinados por dois pontos de D e um de C_1;

iii) determinados por um ponto de D e dois de C_1;

iv) determinados por três pontos de C_1.

A resposta é $C_{12}^3 + (C_{12}^2) \cdot 8 + 12 \cdot C_8^2 + 1 = 1.085$.
Outra solução:
Para determinar um plano, devemos selecionar 3 dos 20 pontos, o que pode ser feito de $C_{20}^3 = 1140$ modos. Nessa contagem, o plano que contém os 8 pontos de C_1 foi contado $C_8^3 = 56$ vezes.
A resposta é $1.140 - 56 + 1 = 1.085$.

11) Primeiro, colocamos as vogais. Como a letra A aparece 3 vezes e as letras U, I e O aparecem 1 vez cada, o número de modos de dispô-las é $P_6^{3,1,1,1} = \dfrac{6!}{3!} = \dfrac{720}{6} = 120$. A seguir, colocamos as consoantes em três dos 7 espaços antes, entre e depois das vogais. O lugar do P pode ser qualquer um destes 7 espaços, o do R qualquer dos 6 restantes e o do G qualquer dos 5 restantes. O número total de possibilidades é $120 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 25.200$.

12) Vamos formar uma fila com os números $1, 2, \ldots, n$ e assinalar com **E** os p números escolhidos e com **N** os $n - p$ não escolhidos. A condição para que não sejam escolhidos números consecutivos é que entre dois **E** haja pelo menos um **N**. Começamos escrevendo os $n - p$ **E**. A seguir, devemos escolher, para colocar os **E**, p dentre os $n - p + 1$ espaços situados antes, entre e depois dos **N**. Isto pode ser feito de C_{n-p+1}^p modos.

13) a) Nenhum aluno pode comparecer a mais de três jantares. Com efeito, se A_1 vai a um jantar com A_2 e A_3, ele só pode ir a outro jantar com outros dois estudantes, digamos A_4 e A_5 e só pode ir a um terceiro jantar em companhia de outros dois, digamos A_6 e A_7 e não terá companhia para ir a um quarto jantar. Como há 21 convites e são 7 estudantes, cada estudante terá que comparecer a exatamente 3 jantares.

b) Se A_1 comparece a três jantares, podemos escolher os seus companheiros dividindo os outros 6 estudantes em 3 grupos de 2, o que pode ser feito de $\dfrac{C_6^2 \times C_4^2 \times 1}{3!} = 15$ modos.

Então, os 3 jantares são, digamos, $A_1A_2A_3$, $A_1A_4A_5$, $A_1A_6A_7$.

A_2 deverá comparecer a mais dois jantares, nenhum deles em companhia de A_3, e A_3 também deverá comparecer a mais dois jantares. Portanto, os 4 jantares que faltam são:

A_{2--}, A_{2--}, A_{3--}, A_{3--}

Como A_4 deve comparecer a mais dois jantares (A_4 não pode comparecer a ambos em companhia de A_2 nem a ambos em companhia de A_3), esses quatro jantares são:

A_2A_{4-}, A_{2--}, A_3A_{4-}, A_{3--};

A_5 tem que comparecer ainda a dois jantares, nenhum deles em companhia de A_4.

A_2A_{4-}, A_2A_{5-}, A_3A_{4-}, A_3A_{5-}.

Agora há duas possibilidades:

$A_2A_4A_6$, $A_2A_5A_7$, $A_3A_4A_7$, $A_3A_5A_6$ e

$A_2A_4A_7$, $A_2A_5A_6$, $A_3A_4A_6$, $A_3A_5A_7$.

Há portanto $15 \times 2 = 30$ maneiras de escolher os grupos de convidados.

Para distribuir os 7 grupos nos 7 dias, há 7! alternativas.

A resposta é $7! \times 30 = 151.200$.

14) a) Cada professor fica caracterizado pelas duas bancas a que pertence. O número de professores é igual ao número de modos de

escolher duas das oito bancas.

A resposta é $C_8^2 = 28$.

b) O número de professores pertencentes a uma banca é igual ao número de modos de escolher a outra banca a que ele pertence.

A resposta é 7.

15) Chamando x de $1+a$, y de $1+b$ e z de $1+c$, o problema se transforma em encontrar todas as soluções inteiras e não-negativas de $(a+1)+(b+1)+(c+1) = 7$, ou seja, de $a+b+c = 4$. A resposta é $CR_3^4 = C_6^4 = 15$.

16) Cada solução inteira e não-negativa de $x+y+z \leq 6$ corresponde a uma solução inteira e não-negativa da equação $x+y+z+f = 6$. Logo, há $CR_4^6 = C_9^6 = 84$ soluções.

17) Para formar uma caixa, devemos selecionar 20 dentre os 5 tipos, valendo repetição na escolha. Ou seja, devemos formar soluções inteiras e não-negativas de $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 20$, onde x_i é o número de bombons do tipo i. A resposta é $CR_5^{20} = C_{24}^{20} = 10.626$.

Capítulo 5

1) Sejam X e Y os resultados do primeiro e segundo lançamentos, respectivamente.

$$\begin{aligned} P(X = 3 \mid X+Y = 7) &= \frac{P(X = 3, X+Y = 7)}{P(X+Y = 7)} \\ &= \frac{1/6 \cdot 1/6}{6/36} = \frac{1}{6}\,. \end{aligned}$$

Outra solução:

Se a soma é 7, há 6 casos possíveis igualmente prováveis: $X = 1, Y = 6; X = 2, Y = 5; X = 3, Y = 4; X = 4, Y = 3; X = 5, Y = 2; X = 6, Y = 1$. Dos seis casos, somente $X = 3, Y = 4$ é favorável. A resposta é $\dfrac{1}{6}$.

2) $P(\text{vê vermelha} \mid \text{mostra amarela}) =$

$$= \frac{P(\text{vê vermelha e mostra amarela})}{P(\text{mostra amarela})} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$$

3) $P(\text{doente} \mid \text{positivo}) = \dfrac{P(\text{doente e positivo})}{P(\text{positivo})} =$

$$= \frac{P(\text{doente}) \cdot P(\text{positivo} \mid \text{doente})}{P(\text{doente}) \cdot P(\text{positivo} \mid \text{doente}) + P(\text{sadio}) \cdot P(\text{positivo} \mid \text{sadio})} =$$

$$= \frac{0,005 \cdot 0,95}{0,005 \cdot 0,95 + 0,995 \cdot 0,01} = \frac{95}{294} \cong 0,3231$$

4) A probabilidade de não obter nenhum seis em n lançamentos é $\left(\frac{5}{6}\right)^n$ e a de obter pelo menos um seis é $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

Devemos ter $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > 0,9$, ou seja, $\left(\frac{5}{6}\right)^n < 0,1$. Daí,

$$\begin{aligned} \ln \left(\tfrac{5}{6}\right)^n &< \ln 0,1 \\ n \cdot \ln \tfrac{5}{6} &< \ln 0,1 \\ n &> \frac{\ln 0,1}{\ln \left(\frac{5}{6}\right)} \cong 12,6 \end{aligned}$$

A resposta é 13.

5) Considere os eventos:

$A = \{A$ falou a verdade $\}$;
$B = \{B$ disse que A falou a verdade$\}$;
$C = \{C$ disse que B disse que A falou a verdade$\}$;
$D = \{D$ disse que C disse que B disse que A falou a verdade$\}$.
Vamos aliviar a notação escrevendo XY para representar $X \cap Y$.
Queremos calcular $P(A \mid D) = \frac{P(AD)}{P(D)}$.

$$\begin{aligned}
P(AD) &= P(ABCD) + P(A\overline{B}CD) + P(AB\overline{C}D) + P(A\overline{BC}D) \\
&= \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{2}{3} \\
&= \tfrac{13}{81}\,. \\
P(\overline{A}D) &= P(\overline{A}BCD) + P(\overline{AB}CD) + P(\overline{A}B\overline{C}D) + P(\overline{ABC}D) \\
&= \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{2}{3} \\
&= \tfrac{28}{81}\,.
\end{aligned}$$

$P(D) = P(AD) + P(\overline{A}D) = \frac{13}{81} + \frac{28}{81} = \frac{41}{81}$.

A resposta é $P(A \mid D) = \frac{P(AD)}{P(D)} = \frac{13/81}{41/81} = \frac{13}{41}$.

6) a) A probabilidade de eles se enfrentarem na primeira rodada é $\frac{1}{2^n-1}$ porque, posto A na tabela, há $2^n - 1$ posições possíveis para B e em 1 delas ele enfrenta B. A probabilidade de eles se enfrentarem na segunda rodada é $\frac{2}{2^n-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2^n-1}\cdot\frac{1}{2}$, porque posto A na tabela, há $2^n - 1$ posições possíveis para B e em 2 delas ele pode vir a enfrentar B na segunda rodada, desde que, naturalmente, A e B vençam seus jogos da primeira rodada, o que ocorre com probabilidade $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$. A probabilidade de eles se enfrentarem na terceira rodada é $\frac{2^2}{2^n-1}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{2^n-1}\cdot\frac{1}{2^2}$, etc.

A resposta é

$$\frac{1}{2^n-1} + \frac{1}{2^n-1}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n-1}\cdot\frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n-1}\cdot\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n-1}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

b) Se $k < n$, o jogador disputa exatamente k partidas se, e somente se, perde a k-ésima partida e ganha as $k-1$ partidas anteriores. A probabilidade de isso acontecer é $\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^k}$.

O jogador disputa n partidas - ou seja, chega à final - se e somente se ganha as $n-1$ partidas anteriores. A probabilidade de isso acontecer é $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}$.

A resposta é $\frac{1}{2^k}$, se $k < n$; $\frac{1}{2^{n-1}}$, se $k = n$.

7)

$$\begin{aligned} P(A \mid \text{defeituosa}) &= \tfrac{P(A \,\text{e defeituosa})}{P(\text{defeituosa})} \\ &= \tfrac{P(A)\cdot P(\text{defeituosa}|A)}{P(A)\cdot P(\text{defeituosa}|A)+P(B)\cdot P(\text{defeituosa}|B)} \\ &= \tfrac{(1/3)\cdot 0{,}03}{(1/3)\cdot 0{,}03+(2/3)\cdot 0{,}01} = \tfrac{3}{5}\,. \end{aligned}$$

8) Uma urna recebe uma bola branca e a outra urna recebe as demais 99 bolas. Com efeito, se a 1ª a urna recebe k bolas das quais a são brancas, a probabilidade de libertação é

$$f(a,k) = \frac{1}{2}\left[\frac{a}{k} + \frac{50-a}{100-k}\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{50k + a(100-2k)}{k(100-k)}.$$

Observe que para $k = 50$ a expressão vale $\frac{1}{2}$, independentemente do valor de a.

Observe também que basta estudar agora o caso $k < 50$ (isto é, podemos considerar a primeira urna como sendo a que recebeu menos bolas). Nesse caso, é claro que, fixado o valor de k, quanto maior for a, maior será $f(a,k)$. Logo, para $f(a,k)$ ser máximo, devemos ter $a = k$ e a probabilidade será

$$g(k) = \frac{1}{2}\cdot\frac{150-2k}{100-k} = \frac{75-k}{100-k} = 1 - \frac{25}{100-k},$$

que é máxima para k mínimo.

Devemos, pois, ter $k = 1$, o que dá uma probabilidade de libertação de $\frac{74}{99} \cong 0,75$.