Contagem e Probabilidade

Soluções do Exercícios Adicionais

Paulo Cezar Pinto Carvalho

1.
a) AB, AC, AD, BA, BC, BD, CA, CB, CD, DA, DB, DC
b) O líder pode ser escolhido de 4 modos; uma vez escolhido o líder, o vice-líder pode ser escolhido de 3 modos. O número total de possibilidades é $4 \times 3 = 12$.

2. As filas em que Helena e Pedro estão juntos são 2!x7! = 10 080. As filas em que Helena e Pedro estão juntos e Vera e Paulo também estão juntos são em número de 2!x2!x6! = 2 880. A resposta é 10 080–2 880 = 7 200.

3.
a) Para descobrir o lugar do 62 417 você tem que contar quantos são os números que o antecedem. Antecedem-no todos os números começados em 1 (4! = 24 números), em 2 (4! = 24 números), em 4 (4! = 24 números), em 61(3! = 6 números) e em 621 (2! = 2 números), num total de 24+24+24+6+2 = 80 números. Ele ocupa o 81º lugar.
b) Ao escrever os números começados por 1, escrevemos 4! = 24 números; incluindo agora os começados por 2 teremos mais 4! = 24 números, acumulando um total de 48 números; incluindo agora os começados por 41, 42 e 46, teremos mais 3!+3!+3! = 18 números, acumulando um total de 66 números. O 66º número é o último dos começados por 46, ou seja, 46 721.
c) Como em cada número há 5 algarismos e 166 = 5x33+1, o 166º algarismo escrito é o 1º algarismo do 34º número. Ao escrever os números começados por 1, escrevemos 4! = 24 números; incluindo agora os começados por 2 teremos mais 4! = 24 números, acumulando um total de 48 números. Logo, todos os números do 25º ao 48º, inclusive, começam por 2. A resposta é 2.

4. Contaremos separadamente os casos em que a carta de copas é um rei e em que a carta de copas não é um rei. A resposta é 1x48+12x47 = 612.

5. Há 3 modos de escolher os dias de Matemática. Escolhidos os dias, digamos segundas e quartas, há 2 modos de escolher o horário da aula de Matemática da segunda e 2 modos de escolher o horário da aula de Matemática da quarta. Há 2 modos de escolher os dias da Física (não podem ser os mesmos da Matemática senão a Química ficaria com as aulas no mesmo dia). Escolhidos os dias da Física, em um deles há 2 modos de escolher o horário da aula e, no outro, apenas 1. Finalmente, há apenas 1 modo de pôr as aulas de Química no horário. A resposta é 3x2x2x2x2x1x1=48.

6. A torre branca pode ser colocada em qualquer uma das 64 casas. Há um total de 15 casas que estão na mesma linha ou coluna em que ela foi colocada. A torre preta pode estar em qualquer uma das 64 – 15 = 49 casas restantes. Logo, o número de possibilidades é $64 \times 49 = 3136$.

7.
a) $7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$
b) 6! = 720
c) A vogal final pode ser A, E, I ou O (4 possibilidades). Para as primeiras 6 letras há 6! possibilidades. Logo, o número de anagramas terminados com vogal é $4 \times 6! = 2880$.

d) Tudo se passa como se VEIR fosse uma única letra (digamos □). Assim, o problema se reduz a encontrar o número de anagramas de SA□O, que é igual a 4! = 24.

8. O par do primeiro homem pode ser escolhido de 5 modos, do segundo de 4 e assim por diante, para um total de $5\times4\times3\times2\times1 = 120$ possibilidades. No segundo caso, a resposta é $8\times7\times6\times5\times4 = 6720$. (Se se considerar que os casais devem ser dispostos na quadrilha, o número de possibilidades, em ambos os casos, deve ser multiplicado por 5! ou por $5!2^5$, conforme a interpretação.)

9. A primeira mulher pode escolher sua posição de 10 modos. A segunda, de 8 modos. As outras, de 6, de 4 e de 2 modos. O primeiro homem, de 5 modos. Os demais, de 4, de 3, de 2, de 1. A resposta é 10x8x6x4x2x5x4x3x2x1 = 460 800.

10.
a) No mínimo devem ser usadas 3 cores (duas, no mínimo, para a parte central e pelo menos mais uma para as laterais.
b) A faixa do topo pode ser pintada de 6 modos, a do meio de 5 a de baixo outra vez de 5 modos. Mas o número de possibilidades para as faixas laterais depende de termos usado 2 ou 3 cores para as faixas horizontais. Não é possível, assim, usar diretamente o principio multiplicativo.
Vamos dividir a contagem em dois casos:

i) **3 cores são utilizadas para a parte central**: neste caso, a faixa de cima pode ser pintada de 6 modos, a do meio de 5 e a de baixo de 4 modos. Para a faixa da esquerda temos 3 possibilidade, o mesmo ocorrendo com a da direita. São, portanto, $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 3 = 1080$ modos.
ii) **2 cores são utilizadas para a parte central**; neste caso, as faixas de cima e de baixo têm a mesma cor, que pode ser escolhida de 6 modos. A faixa central pode ser escolhida de 5 modos e a cor de cada faixa lateral de 4 modos. Logo, o número de possibilidades neste caso é $6 \times 5 \times 4 \times 4 = 480$ modos

Logo, o número total de modos de pintar a bandeira é 1080 + 480 = 1560.

11. O primeiro quadrante pode ser pintado de 6 modos, o segundo de 5 e o terceiro novamente de 5 modos. Mas o número de modos de pintar o quarto quadrante vai depender de termos usado ou não a mesma cor para o primeiro e terceiro quadrantes. Portanto, outra vez temos que dividir em casos:

i) **cores distintas são usadas para o primeiro e terceiro quadrantes**: neste caso, a cor do primeiro quadrante pode ser escolhida de 6 modos, a do segundo de 5, a do terceiro de 4 (tem que ser diferente das duas anteriores) e a do quarto também de 4. Logo, o número de possibilidades é $6 \times 5 \times 4 \times 4 = 480$.
ii) **a mesma cor é usada para o primeiro e terceiro quadrantes**: neste caso, esta cor comum pode ser escolhida de 6 modos e as cores do segundo e quarto quadrantes podem ser escolhidas de 5 modos cada. Logo, o número de possibilidades é $6 \times 5 \times 5 = 150$

Portanto, o número total de possibilidades é 480 + 150 = 730.

12. a) Devemos colocar 6 números em 6 lugares. A resposta é 6! = 720.

b) Agora, quando mudamos o cubo de posição, obtemos o mesmo dado. Por exemplo, um dado que tem o 1 e o 6 em faces opostas; Antes, colocar o 1 em cima, na face preta, e o 6 em baixo, na face branca, era diferente de colocar o 6 em cima e o 1 embaixo. Agora não, é o mesmo dado de cabeça para baixo. A resposta é a anterior dividida pelo número de posições de colocar um cubo. Como há 6 modos de escolher a face que fica em baixo e 4 modos de escolher nessa face a aresta que fica de frente, são 6x4 = 24 as posições de colocar um cubo. A resposta é 720/24 = 30.

13. A última vaga a ser ocupada é necessariamente uma das duas extremas (há possibilidades, portanto). A penúltima é uma das vagas extremas ou a vaga adjacente à outra (2 possibilidades, de novo). De modo geral, para cada carro, exceto o primeiro, há 2 possibilidades. O número total de modos de ocupar as vagas é, portanto, $2^9 = 512$.

14. O espaço amostral, neste caso, é o conjunto de todas as possíveis ordenações dos papéis. O número de vezes em que o papel premiado aparece em cada posição é o mesmo. Logo, as chances de premiação são iguais, qualquer que seja a ordem em que os papéis são sorteados.

15. a) $20 \times 19 \times 18 = 6840$
b) A resposta não é a mesma porque cada comissão de 3 membros corresponde a 6 modos diferentes para escolher representante, secretário e tesoureiro.
c) Dividir o resultado em a) por 6. Portanto, o número de comissões é 6840/6 = 1140.

16. Há $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ possibilidades para os sexos dos filhos.
a) Dos 16 casos possíveis, em apenas 1 são todas meninas. Logo, em 15 casos há pelo menos um menino e a probabilidade correspondente é 15/16.
b) Há 1 caso em que os filhos são todos do sexo masculino e 1 caso em que são todos do sexo feminino. Logo, há 14 casos em que há filhos de ambos os sexos. A probabilidade correspondente é 14/16 = 7/8.
c) Os possíveis casos são 6: HHMM, HMHM, HMMH, MHHM, MHMH, MMHH (que correspondem a C_4^2). Logo a probabilidade de que os filhos formem 2 casais é 6/16 = 3/8.

17.
a) Os professores de Cálculo e Álgebra Linear podem escolher seus dias de provas de 5×5 modos. Em 5 destes casos, as provas caem no mesmo dia. Logo, a probabilidade de que as provas sejam marcadas para o mesmo dia é igual a 5/25 = 1/5. Outro raciocínio: uma vez que o professor de Cálculo tenha marcado sua prova, a chance de que o de Álgebra Linear escolha o mesmo dia é 1/5.
b) O número total de escolhas para os dias de prova é $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$. O número de modos de marcar as provas sem que caiam duas no mesmo dia é $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ (o primeiro professor pode escolher qualquer dos 5 dias, o segundo um dos 4 restantes e assim por diante). Logo a probabilidade de que as provas caiam em dias distintos é 120/625 = 24/125.

18. Suponha o time A posicionado em seu grupo. B terá 23 posições possíveis, em 11 das quais fica no grupo de A. A resposta é 11/23.

19. O número de modos de selecionar 2 pés de sapatos é $C_{12}^{2} = 66$. Para selecionar 1 par de sapatos devemos selecionar um dos 6 pares. A probabilidade de que se forme um par é igual a 6/66 = 1/11.

20. a) $C_{27}^{4} = 17750$.
b) Como José já está escolhido, devemos escolher 3 pessoas dentre as 26 que sobraram. A resposta é $C_{26}^{3} = 2600$.
c) Como Márcia não pode ser escolhida, devemos escolher 4 dentre 26 pessoas. A resposta é $C_{26}^{4} = 14950$.
d) $C_{12}^{2}.C_{15}^{2} = 6930$.
e) $C_{12}^{1}.C_{15}^{3} + C_{12}^{2}.C_{15}^{2} + C_{12}^{3}.C_{15}^{1} = 15690$

21. a) $C_{60}^{6} = 50.063.860$
b) Em ambos os casos, a probabilidade de ganhar é 1/50.063.860.
c) Quem aposta em 8 números, aposta em $C_{8}^{6} = 56$ resultados. Logo, as chances de ganhar são 56 vezes maiores.
d) Não.

22. O número de resultados possíveis é 6^5.
a) Para formar um par, deve-se primeiramente selecionar o tipo do par (6 modos), depois os dados em que o par se formará (C_{5}^{2} = 10 modos) e, finalmente, os resultados dos outros três dados (5×4×3 = 60 modos). A resposta é $6\times10\times60/6^5 =$ 25/54.
b) Para formar dois pares, deve-se primeiramente selecionar os tipos dos pares ($C_{6}^{2} =$ 15 modos), depois os dados em que os pares se formarão ($C_{5}^{2} C_{3}^{2} = 30$ modos) e, finalmente, o resultado do outro dado (4 modos). A resposta é $15\times30\times4/6^5 = 25/108$.
c) Para formar uma trinca, deve-se primeiramente selecionar o tipo da trinca (6 modos), depois os dados em que a trinca se formará ($C_{5}^{3} = 10$ modos) e, finalmente, os resultados dos outros dois dados (5×4 = 20 modos). A resposta é $6\times10\times20/6^5 =$ 25/162.
d) Para formar uma quadra, deve-se primeiramente selecionar o tipo da quadra (6 modos), depois os dados em que a quadra se formará ($C_{5}^{4} = 5$ modos) e, finalmente, os resultados do outro dado (5 modos). A resposta é $6\times5\times5/6^5 = 25/1296$.
e) Há apenas 6 quinas. A resposta é $6/6^5 = 1/1296$.
f) Há dois tipos de seqüências (12345 e 23456). Para formar uma delas, basta escolher o resultado de cada dado (5×4×3×2×1 = 120 modos). A resposta é $2\times120/6^5 = 5/162$.
g) Para formar um "full hand", deve-se primeiramente selecionar o tipo da trinca (6 modos), depois os dados em que a trinca se formará ($C_{5}^{3} = 10$ modos) e, finalmente, o tipo do par (5 modos). A resposta é $6\times10\times5/6^5 = 25/648$.

23. O número de casos possíveis para os signos é $12\times12\times12\times12 = 12^4$.

a) O número de casos em que os signos são diferentes é $12\times11\times10\times9$. Logo, a probabilidade de haver alguma coincidência de signos zodiacais é

$$1-\frac{12.11.10.9}{12^4}=\frac{41}{96}$$

b) As três pessoas podem ser selecionadas de $C_4^3 = 4$ modos; o signo delas, de 12 modos; o signo da pessoa restante, de 11 modos. A resposta é $4\times12\times11/12^4 = 11/432$.
c) Há 12 casos em que as quatro pessoas têm o mesmo signo. A resposta é $12/12^4 = 1/1\,728$.
d) Para que haja duas pessoas com um mesmo signo e duas outras pessoas com outro signo, os signos podem ser selecionados de $C_{12}^2 = 66$ modos; depois, os pares de cada signo podem ser selecionados de $C_4^2 = 6$ modos. A resposta é $66\times6/12^4 = 11/576$.

24. a) O segundo melhor jogador será vice-campeão se e somente se não enfrentar o melhor jogador antes da final. Posto o segundo melhor jogador na tabela, há 15 posições possíveis para o melhor e em 8 delas ele enfrenta o segundo melhor jogador apenas na final. A resposta é 8/15 .
b) O quarto melhor jogador será vice-campeão se e somente se não enfrentar nenhum dos três melhores jogadores antes da final. Posto o quarto melhor jogador na tabela, há 15 posições possíveis para os melhores que ele, em 8 das quais eles só enfrentarão o quarto melhor jogador na final. A resposta é $\frac{C_8^3}{C_{15}^3}=\frac{8}{65}$ 3
c) O número máximo é 3. Suponhamos os 16 jogadores numerados de 1 a 16 e os jogos sendo: primeira fase:1×2, 3×4,...,15×16; segunda fase: vencedor do jogo 1 x vencedor do 2, ..., vencedor do jogo 7 $\times$ vencedor do 8; (...) Há 6 jogadores piores que ele. Se ele ocupa a posição 1, devem ser ocupadas por piores que ele as posições 2 (para que ele passe à segunda fase), 3 e 4 (para que ele passe à terceira fase); para que ele passe à quarta fase, as posições 5, 6, 7 e 8 também devem ser ocupadas por jogadores piores que ele, o que é impossível.
d) A probabilidade de ele disputar 3 partidas é a probabilidade de as posições 2, 3 e 4 serem ocupadas por jogadores piores que ele, que é igual a $\frac{C_6^3}{C_{15}^3}=\frac{4}{91}$.

25.
a) Cada lançamento possui 6 resultados possíveis. Assim, há $6 \times 6 = 36$ resultados possíveis para os resultados do 1º. e 3º. dados (o 2º. não importa aqui). Desses, há $2 \times 2 = 4$ casos em que em ambos os casos sai uma face azul e $4 \times 4 = 16$ casos em que as faces são ambas vermelhas. Logo, a probabilidade de que as faces tenham a mesma cor no 1º. e 3º. lançamentos é $\frac{4+16}{36}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$.
b) O número total de resultados em que o 1º. e o 2º. dados fornecem o mesmo resultado é igual a $2 \times 2 \times 6 + 4 \times 4 \times 6 = 120$ (a primeira parcela corresponde à situação onde as duas primeiras faces são vermelhas e a segunda à situação onde as duas primeiras faces são azuis). O número de resultados em que as 3 faces têm a

mesma cor é 2 × 2 × 2 + 4 × 4 × 4 = 72. Logo, a probabilidade pedida é 72/120 = 3/5 (note que esta probabilidade é maior do que a do item anterior).

26. A função fica determinada quando se escolhem os m elementos de I_n que formarão a imagem, o que pode ser feito de C_n^m maneiras, no primeiro caso, e de $CR_n^m = C_{n+m-1}^m$ maneiras, no segundo caso.

27. Ignoremos o problema do 0 na primeira casa. Há $C_7^3 = 35$ modos de escolher os lugares dos algarismos 4, $C_4^2 = 6$ de escolher os lugares dos 8, e 8×8 = 64 modos de preencher as casas restantes, num total de 35×6×64 = 13 440 números. Devemos descontar os números começados em 0. Há $C_6^3 = 20$ modos de escolher os lugares dos algarismos 4, $C_3^2 = 3$ de escolher os lugares dos 8, e 8 modos de preencher a casa restante, num total de 20×3×8 = 480 números começados em 0. A resposta é 13 440 –480 = 12 960.

28. a) Essas funções são bijetoras. A resposta é $n!$.
b) Um elemento de B tem sua imagem inversa formada por dois elementos e os demais têm imagens inversas unitárias. Esse elemento de B pode ser selecionado de n modos e sua imagem inversa, de C_{n+1}^2 modos. Depois disso, há $(n-1)!$ modos de determinar as imagens dos demais elementos de A, pois a correspondência entre esses elementos restantes em A e B é biunívoca. A resposta é $n.\ C_{n+1}^2\ .\ (n-1)! = \frac{(n+1)!n}{2}$.
c) Neste caso, temos as alternativas:
i) Três elementos de A têm a mesma imagem em B e a correspondência entre os demais
$n-1$ elementos de A e os demais $n-1$ elementos de B é biunívoca. Há C_{n+2}^3 modos de escolher os três elementos de A, n modos de escolher a imagem deles em B e $(n-1)!$ modos de construir uma correspondência biunívoca entre os elementos restantes. Há $C_{n+2}^3.n.(n-1)! = \frac{n(n+2)!}{6}$ funções desse tipo.
ii) Há dois pares de elementos de A com imagens idênticas em B e a correspondência entre os demais $n-2$ elementos de A e os demais $n-2$ elementos de B é biunívoca. Há C_n^2 modos de escolher os dois elementos de B, $C_{n+2}^2 C_n^2$ modos de escolher suas imagens inversas em A e $(n-2)!$ modos estabelecer a correspondência entre os elementos restantes. Há $C_n^2.C_{n+2}^2.C_n^2.(n-2)! = \frac{n(n-1)!(n+2)!}{8}$ funções desse tipo.
A resposta é $\frac{n(n+2)!}{6} + \frac{n(n-1)!(n+2)!}{8} = \frac{n(3n+1)(n+2)!}{24}$.

29. Chamemos de D o conjunto $C - C_1$.
Há quatro tipos de planos, determinados por:
i) três pontos de D;
ii) dois pontos de D e um de C_1;
iii) um ponto de D e dois de C_1;

iv) três pontos de C_1.
A resposta é $C_{12}^3 + C_{12}^2 .8 + 12.C_8^2 + 1 = 1085$

30. Chegam 4 cientistas A, B, C, D. Com as chaves que possuem, abrem alguns cadeados, mas não todos. Existe pelo menos um cadeado que eles não conseguem abrir. Na situação do número mínimo de cadeados, existe exatamente um cadeado que eles não conseguem abrir. Batize tal cadeado de ABCD. Portanto, ABCD é o cadeado cuja chave não está em poder de A, nem de B, nem de C e nem de D. Qualquer outro cientista tem a chave desse cadeado, pois esse cientista e A, B, C e D formam um grupo de 5 cientistas e, portanto, nesse grupo alguém possui a chave. Como o alguém não é nem A, nem B, nem C e nem D, deve ser o outro. Batize, analogamente, os demais cadeados. Verifique agora que a correspondência entre cadeados e seus nomes é biunívoca, isto é, cadeados diferentes têm nomes diferentes (isso porque estamos na situação do número mínimo de cadeados) e cadeados de nomes diferentes são diferentes (se X está no nome de um cadeado e não está no nome do outro, X tem a chave deste e não tem a chave daquele).
a) O número mínimo de cadeados é igual ao número de nomes de cadeados, $C_{11}^4 = 330$.
b) Cada cientista X possui as chaves dos cadeados que não possuem X no nome. A resposta é $C_{10}^4 = 210$.