Números racionais e irracionais

Carlos E. N. Bahiano
Instituto de Matemática
Universidade Federal da Bahia - UFBa
40.210-170 Salvador, Bahia, Brasil

Sobre o autor: Carlos Eduardo Nogueira Bahiano é doutor em Matemática pela Universidade Estadual de Campinas. Sua área de pesquisa é Álgebra Comutativa. Professor na Universidade Federal da Bahia, divide o seu tempo entre as atividades de pesquisa e as atividades acadêmicas na Graduação e na Pós-graduação em Matemática da UFBA. Na juventude, na cidade de Ilhéus, sua cidade natal, lecionou matemática para alunos no ensino fundamental e médio do Instituto Municipal de Educação.

Conteúdo

Lista de Figuras

Caros Professores e Alunos,

O presente texto é uma introdução ao conjunto dos números reais. Escrever um texto sobre números reais para uma turma tão heterogênea foi um desafio árduo e gratificante. A dificuldade central em falar sobre números reais, para alunos no ensino fundamental e médio, reside basicamente na impossibilidade de apresentar um noção, ou definição, que utilize as construções mentais que a tenra idade permite. Desta forma, recomendamos, tanto ao professor quanto ao aluno, a associação dos números reais positivos com comprimento de segmentos de retas iniciando em um ponto $\mathbb{O}$ e terminando à direita do mesmo.

A idéia de que cada segmento tem um comprimento é facilmente aceita pelos alunos. O uso de régua e compasso pode auxiliar a construção de $\sqrt{2}$ e de outros números irracionais mas, lembre-se que nossa visão não é muito exata. Os exercícios sobre divisão proporcional podem, e devem, também ser trabalhados utilizando o Teorema de Thales.

Assumimos que a noção de fração já é de conhecimento do aluno. Caso seja necessário, o aluno pode, e deve, rever o livro utilizado na 4^a e 5^a séries.

Ao final deste curso, recomendamos que os alunos revejam e refaçam os exercícios dos livros de Matemática que eles utilizaram na sua escola.

O autor gostaria de ouvir de vocês críticas e sugestões para a melhoria do texto.

Finalmente, agradecemos ao professor Samuel Jurkiewicz pelo texto utilizado no capítulo sobre frações contínuas e pelos problemas interessantes inclusos no apêndice, e, à professora Maria Lucia Villela por sua colaboração como revisora.

Divirtam-se,

Carlos E. N. Bahiano

Capítulo 1

Senso comum

1.1 Aristóteles e o senso comum: noção de igualdade

Acredita-se que os primeiros filósofos surgiram nas colônias gregas de Jônia e Magna Grécia no século VI antes de Cristo. A Filosofia caracterizava-se, até então, por ser uma busca organizada e racional de explicações para os fenômenos naturais e questões que desafiavam a mente humana. Existiam basicamente dois tipos de problemas: o primeiro tipo compreendia a necessidade de entender a natureza humana, sua origem e razão de sua existência; o segundo grupo compreendia a necessidade de entender os fenômenos naturais, a existência de padrões matemáticos e sua utilização para compreender, prever e resolver problemas cotidianos relativos à construção, comércio, música e outros. Neste momento, entendia-se que o estabelecimento de uma resposta aceita por todos como verdadeira solucionava o problema em questão, este era o chamado "Senso comum."

Do ponto de vista matemático o uso da expressão senso comum tem seu primeiro registro no Livro I dos Elementos de Euclides. Euclides de Alexandria (360A.C-265 A.C) é o mais conhecido autor matemático da antiguidade, escreveu "Stoichia"(Os elementos) uma obra composta por treze livros que reuniam o conhecimento matemático de seus predecessores, sendo cinco sobre geometria plana, três sobre números, um sobre proporções, um sobre grandezas incomensuráveis e os três últimos sobre geometria no espaço. No livro I, aparecem as seguintes afirmações:

1. Objetos que são iguais a uma mesma coisa também são iguais entre si.
2. Se iguais forem somados a iguais, então os resultados são iguais.
3. Se iguais forem subtraídos a dois valores iguais, então os resultados são iguais.
4. Coisas que coincidem umas com as outras são iguais entre si.
5. O todo é maior que a parte.

Estas afirmações, que ele classificou como *senso comum,* foram aceitas como verdadeiras e, de certa forma, são os princípios básicos para entender o que são e para que servem os números, assim como, para resolver problemas ou equações envolvendo números. Podemos entender o uso destes princípios, que chamaremos de *princípios do senso comum,* estudando os exemplos a seguir.

Exemplo 1.1. *Júlia tem 8 anos. Se somarmos 3 á idade que Paulo tem, encontramos como resultado o dobro da idade de Júlia. Qual a idade de Paulo?*

O dobro de 8 é 16, aplicando o primeiro princípio do senso comum, a idade de Paulo mais 3 é igual 16. Ou seja, a idade de Paulo mais 3 é igual a $(13 + 3)$. Aplicando o terceiro princípio do senso comum, subtraindo 3, descobrimos a idade de Paulo. Paulo tem 13 anos. $\square$

Exemplo 1.2. *O triplo de idade de Paulo somado ao dobro da idade de Ana resulta em 10. Subtrair a idade de Ana do dobro da idade de Paulo, resulta em 2. Qual a idade de Paulo?*

Se representarmos por x a idade de Paulo e por y a idade de Ana, podemos escrever o problema da seguinte forma:

$$3x + 2y = 10 \quad \text{e} \quad 2x - y = 2$$

Ora, aplicando os princípios do senso comum, como $2x-y = 2$, então $(2x-y)+y = 2 + y$. Ou seja, $2x = 2 + y$. Portanto, $2x - 2 = y$. Por outro lado, devemos ter $3x + 2y = 10$. Substituindo y por $2x - 2$ devemos ter $3x + 2(2x - 2) = 10$. Ou seja, $3x + 4x - 4 = 10$. Aplicando novamente os princípios do senso comum á equação $7x - 4 = 10$, obtemos que $7x = 14$ e portanto $x = 2$. Logo, como x representa a idade de Paulo, Paulo tem 2 anos. $\square$

Quando resolvemos problemas matemáticos sempre utilizamos os *princípios do senso comum,* pois ao resolvermos um problema matemático estamos sempre comparando "coisas". Por exemplo, comparamos áreas, comparamos resultados de operações matemáticas como soma, subtração e divisão, além de outros objetos matemáticos que conhecemos ao longo da nossa vida estudantil. Se numa comparação aplicamos os *princípios do senso comum* e obtemos um resultado falso, então os objetos comparados não são iguais.

Exemplo 1.3. *A professora perguntou a um aluno qual o resultado da expressão* $5 + (35 \div 5)$*. O aluno respondeu erradamente que o resultado era 8. Vamos provar que a resposta está errada.*

A afirmação do aluno foi que $5 + (35 \div 5) = 8$. Se isto fosse verdade, subtraindo 5 em cada lado da igualdade, deveríamos ter $35 \div 5 = 3$. Mas todo mundo sabe que 35 dividido por 5 é igual a 7 e 7 não é igual a 3. Logo, a resposta do aluno está errada. De fato, a resposta correta é 12.

Exercício 1.4. *Use os princípios do senso comum para descobrir o valor de* x *em cada uma das seguintes equações:*

1. *Se* $x + 2 = 5$ *quanto vale* x*?*
2. *Se* $2x - 3 = 11$ *quanto vale* x*?*
3. *Se* $2x - 3 = x + 7$ *quanto vale* x*?*
4. *Se* $x - 3 = 11 - x$ *quanto vale* x*?*
5. *Se* $x \div 2 = 10$ *quanto vale* x*?*

1.2 Os matemáticos e a noção de objetos equivalentes

Na seção anterior vimos que, para resolver um problema matemático, nós usamos regras que antigamente eram chamadas de princípios do senso comum. Hoje os matemáticos deram um novo formato a estes princípios, reduzindo-os para apenas três e denominado-os de princípios de equivalência.

1. Todo objeto é igual a si próprio.

2. Se o objeto A é igual ao objeto B, então B é igual a A.
3. Se o objeto A é igual ao objeto B e o objeto B é igual ao objeto C, então o objeto A é igual ao objeto C

O primeiro princípio é chamado de "reflexividade", o segundo é chamado de "simetria" e o último é a "transitividade". Qualquer noção de igualdade ou equivalência deve obedecer a estes três princípios. A razão para utilizar estes princípios, em lugar dos *princípios do senso comum* , é que hoje a Matemática está muito mais sofisticada e precisamos comparar outros objetos matemáticos, além de números e áreas.

De fato, a noção de equivalência é a ferramenta básica para a construção dos números, mas isto é uma história para ser contada mais tarde. Por enquanto podemos nos contentar em entender que os números podem ser representados de várias formas, que a noção do que chamamos de número evoluiu de acordo com as necessidades humanas, que existem regras para fazer operações com os números e para compará-los. Por exemplo, todas as expressões a seguir são iguais a 4.

$$2+2, \quad 3+1, \quad 5-1, \quad \frac{12}{3}, \quad \frac{8}{3}+\frac{4}{3}, \quad \frac{63}{15}-\frac{1}{5}, \quad \sqrt{16}, \quad 2^2, \quad \log_{10} 10^4$$

Podemos ainda representar os números usando tipos diferentes de escrita ou de notação. Por exemplo, o número 4 pode ser escrito nas seguintes formas:

IV em algarismo romano, 4 em algarismo índu-arábico.

Cada civilização pode possuir uma forma de representar os números, mas as operações matemáticas de soma, multiplicação, divisão, exponenciação, assim como a resolução de equações numéricas, sempre obedecem aos princípios de equivalência ou, equivalentemente, a noção de igualdade matemática.

Para entender porque a noção de números evoluiu com as necessidades humanas, basta observar que no seu estado primitivo o homem apenas precisava dos números naturais. Por exemplo, para saber se todos os filhos estavam presentes, quantas "ovelhas" tinham, quantos soldados inimigos a tribo concorrente tinha, etc.... Certamente, com o desenvolvimento da capacidade de fazer comércio (troca) veio junto a necessidade de exprimir a falta ou débito e, neste momento, precisaram da noção de números inteiros. Com a necessidade de construir edificações veio a necessidade de comparar coisas, que podem ser particionadas (divididas) em quantidades que não poderiam ser quantificadas apenas com números inteiros, como por exemplo área de terra, distância entre dois pontos, justificando a "criação"dos números racionais e irracionais.

Outras necessidades humanas, quer sejam simplesmente a necessidade de exercer sua racionalidade através do pensamento matemático, ou necessidades tecnológicas, nos levaram á ampliação das noções de número, de suas operações aritméticas e de suas representações. Ao longo da sua vida acadêmica o aluno conhecerá, sequencialmente, os seguintes conjuntos numéricos: conjunto dos números Naturais (representado por $\mathbb{N}$), conjunto dos números Inteiros (representado por $\mathbb{Z}$), conjunto dos números Racionais (representado por $\mathbb{Q}$) e Irracionais (representado por $\mathbb{I}$), conjunto dos números Reais (representado por $\mathbb{R}$), conjunto dos números Complexos (representado por $\mathbb{C}$), conjunto dos números $\wp$-ádicos (representado por $\mathbb{Z}_{(\wp)}$) e outros. Neste texto, estudaremos os números racionais e irracionais.

Capítulo 2

O que é uma razão?

Uma razão é uma comparação quantitativa entre dois objetos matemáticos. Podemos comparar informações numéricas de naturezas diversas, por meio da razão entre elas.

- Podemos comparar informações numéricas sobre dois conjuntos. Por exemplo, podemos calcular a razão entre a quantidade de alunos e a quantidade de professores existentes numa escola ou, em outras palavras, quantos alunos existem para cada professor disponível.

- Podemos comparar o custo de um serviço e o número de pessoas atendidas. Por exemplo, podemos calcular a razão entre os gastos de uma escola e o seu número de alunos.

- Podemos comparar informação numérica sobre áreas, volumes e, ou comprimentos. Por exemplo, a razão entre a área de um retângulo e o comprimento da sua base é igual a altura do retângulo. A razão entre a área de um triângulo e a área do paralelogramo, determinado por ele, é igual a 0.5.

- Podemos comparar o valor de uma distância percorrida por um atleta e o tempo gasto para percorrê-la. Neste caso, a razão é a velocidade do atleta e a informação, que a razão fornece, é a idéia de quanto tempo o atleta gastou em cada parte do percurso.

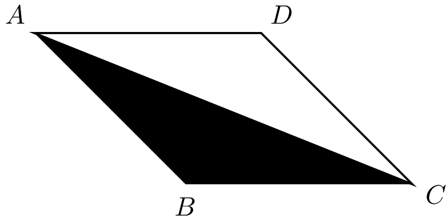


Figura 2.1: Razão entre as áreas ABC e $ABCD$ é $\frac{1}{2}$

- Podemos comparar o peso de uma pessoa e o quadrado da sua altura em metros. Neste caso, a razão é conhecida como *Índice de massa corporal,*

$$IMC = \frac{\text{peso em Kg}}{\text{Altura ao quadrado}}.$$

O IMC é usado para determinar se uma pessoa está acima ou abaixo do peso normal. A tabela abaixo é uma classificação usada pela Organização Mundial de Saúde:

Categoria	**IMC**
Abaixo do peso	menor que 18,5
Peso normal	entre 18,5 e 24,9
Sobrepeso	entre 25 e 29,9
Obesidadede	acima de 30

- Podemos comparar a área de um círculo com o quadrado do seu raio. Neste caso, a razão é igual a π. Veja a figura 2.6

- Podemos comparar o preço de um saco de bombons com a quantidade de bombons existentes no saco. Neste caso, a razão fornece o preço de cada bombom.

- Podemos concluir que uma razão expressa uma relação entre dois números e que esta relação contém, de certa forma, informações sobre os objetos associados aos números. Por exemplo, se 10 garrafas idênticas, completamente cheias, contêm 9 litros de suco, então a razão entre o volume, $9\,\ell$, e o número de garrafas, nos informa a capacidade de cada garrafa. O volume de cada garrafa é $\frac{9}{10}\ell = 900\,m\ell$.

A seguir, exemplificamos dois tipos de razão que têm como resultado o objeto de estudo deste curso. No primeiro exemplo, 2.1, a razão descrita é um número racional e no segundo exemplo, 2.2, a razão é o número irracional π.

Exemplo 2.1. *Considere os cinco segmentos de reta A, B, C, D e E, descritos na figura abaixo, cujos comprimentos estão indicados em metros.*

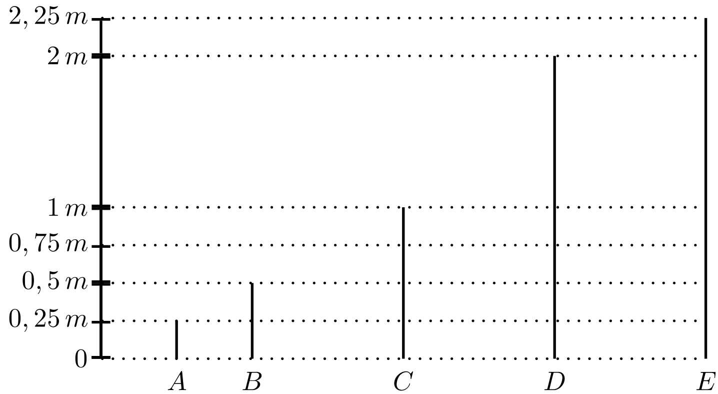


Figura 2.2: Razão entre comprimentos

Podemos nos perguntar quantos segmentos de mesmo comprimento que o segmento A são necessários para construir o segmento E, colando-os um após o outro. Neste caso, vemos que são necessários 9 segmentos. De fato, o segmento C pode ser construído com 4 *segmentos iguais a A, o segmento D pode ser contruído com 8 segmentos iguais a A e, finalmente, o segmento E pode ser construído com* 9 *segmentos iguais a A. Portanto, a razão entre os comprimentos dos segmentos E e A é igual a 9.*

Por outro lado, comparando os segmentos E e D, percebemos que, para construir E, serão necessários dois segmentos iguais a C e mais um segmento igual ao segmento A, enquanto para D serão necessários 8 *segmentos iguais a A. Conseqüentemente, a razão é igual a* $9 \div 8$, *ou seja,* $1,125$.

No exemplo acima, vimos que comparando o segmento E com o segmento D, concluímos que poderíamos construir o segmento E, usando um segmento igual a D e mais um segmento correspondente ao segmento D dividido em 8 partes iguais, ou seja, dividindo o segmento de um metro em um número finito de partes de comprimentos iguais, 4 partes neste caso. Podemos construir os segmentos, citados no exemplo acima, colando um número finito de segmentos iguais a A. Entretanto, nem toda razão pode ser expressa como divisão de dois números inteiros, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 2.2. *Considere o círculo de raio igual a 1 cm e o quadrado de lado igual a 1 cm.*

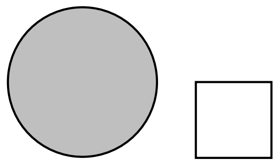
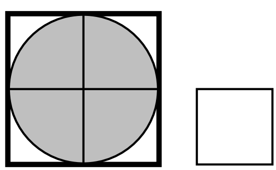


Figura 2.3: Qual a razão entre a área do círculo e a área do quadrado?

Vamos estimar qual a razão entre a área do círculo e a área do quadrado.

Vamos chamar de π a área do círculo em cm^2. Sabemos que a área do quadrado de lado igual a 1 cm é $1cm^2$. Podemos facilmente ver, na figura abaixo, que a área do círculo é menor do que 4 vezes a área de quatro quadrados de lado 1 cm.



Dividindo cada quadrado em 4 e depois em 16 quadradinhos congruentes, temos: que a área branca no interior do círculo corresponde a 2 cm^2, e, analisando a área externa ao círculo, vemos que do lado de fora do círculo a área é maior do que $0,5$ cm^2. Logo, concluímos que $2 < \pi < 3,5$.

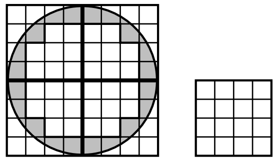


Figura 2.4: A área branca no interior do círculo corresponde a 2 cm^2

Para prosseguir nossa análise, observemos que o círculo é formado por quatro figuras de mesma área, logo basta que analisemos uma destas figuras e depois multipliquemos o resultado por 4.

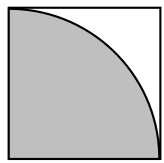


Figura 2.5:

Dividindo os lados do quadrado em partes cada vez menores, vamos observar que a área do círculo é maior do que 3,1 e menor do que 3,2 e, além disto, a área do círculo nunca vai ser inteiramente preenchida apenas com quadradinhos.

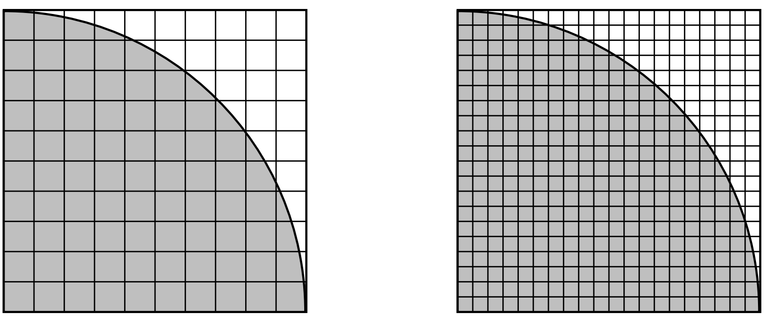


Figura 2.6: A área do círculo de raio 1 cm é igual a π.

O que significa dizer que nunca expressaremos a razão entre a área do círculo e a área do quadrado de forma análoga ao feito para os segmentos do exemplo anterior, isto é, como divisão de dois números inteiros. De fato, esta razão é igual a π cujo valor aproximado, com cinco casas decimais, é $3,14159$.

Observação 1. *Embora o exemplo anterior tenha sido feito com razão entre áreas, existem infinitos exemplos de razões, entre comprimentos de segmentos, que jamais poderão ser expressos como razão entre dois números inteiros. Veja exemplo 4.2.*

2.1 Teorema de Thales

A noção de razão fornece um dos mais belos teoremas da geometria plana: **Teorema de Thales.** Thales de Mileto nasceu na região hoje conhecida como Turquia, na cidade de Milletus, em 610 AC. Além de matemático, Thales foi o que hoje chamaríamos de engenheiro. Thales ficou conhecido por medir as pirâmides do Egito, comparando a razão entre a sua altura e sua sombra com a razão entre o comprimento das sombras das pirâmides. Em verdade, Thales resolveu uma proporção em que a altura era uma incógnita (valor a ser encontrado), para isto, ele multiplicou a razão entre sua altura e sua sombra pelo comprimento da sombra da pirâmide e assim, determinou o comprimento da pirâmide.

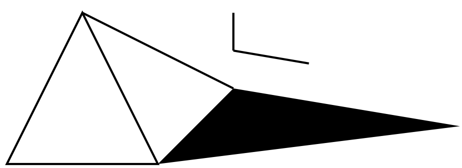


Figura 2.7: A artimanha de Thales

Teorema 2.3 (Teorema de Thales). Se duas retas são transversais a três retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer, determinados por uma delas, é igual à razão entre os segmentos correspondentes determinados pela outra. *Isto é, se A, B, C e P, Q, R são os pontos de interseção, respectivamente, entre as retas tranversais e as retas paralelas, então*

$$\frac{AB}{BC} = \frac{PQ}{QR} \qquad \frac{AC}{BC} = \frac{PR}{QR} \qquad \frac{AC}{AB} = \frac{PR}{PQ}.$$

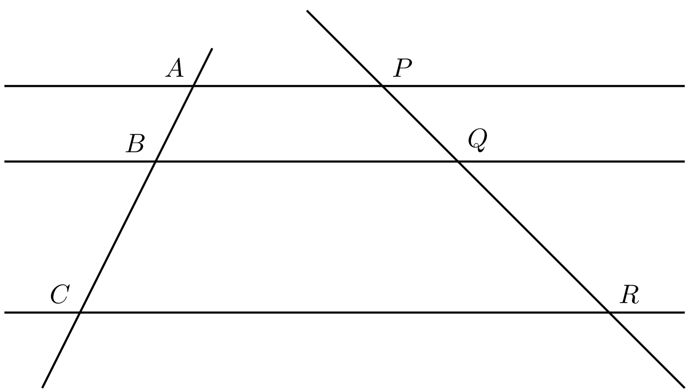


Figura 2.8: Teorema de Thales $\frac{AC}{BC} = \frac{PR}{QR}$.

Capítulo 3

Números racionais

3.1 O que é um número racional

Na seção anterior, dissemos que a noção intuitiva de número modificou-se ao longo do tempo para atender, entre outras necessidades humanas, as necessidades matemáticas de cada época. Vejamos as questões a seguir.

Questão 3.1.

1. Qual o número que devemos "somar"a 3 para obter, como resultado da soma, o número 2?
2. Qual o número que devemos "multiplicar"por 2 para obter, como resultado do produto, o número 3?
3. Qual o número cujo quadrado é 2?
4. Quanto mede o perímetro de um círculo de raio 1?
5. Existe algum número x tal que $10^x = 2$?
6. Existe algum número cujo quadrado é -1?

Cada questão acima nos leva à necessidade de ampliação do que foi chamado de número em cada época.

A primeira questão não tem como solução um número natural. De fato, somar dois números naturais sempre fornece como resultado um número maior ou igual aos dois números naturais que foram somados (lembre-se que $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \ldots\}$). Portanto, para responder corretamente a questão 1, precisamos de considerar os números inteiros negativos. Diophantus de Alexandria, que viveu no século II, em seu livro "Aritmetika", denominou os números inteiros negativos de *número absurdo ou impossível,* denominação que persistiu até o século XVI, quando finalmente passaram a ser chamados de números negativos, e somente no século XIX foram agregados ao conjunto dos números naturais para formar o conjunto dos números inteiros:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \ldots\}.$$

Durante todo este tempo, cerca de dois mil anos, os matemáticos trabalharam com uma noção intuitiva de números inteiros negativos: *"um número é chamado de número inteiro negativo se podemos somá-lo a um número natural para obter zero como resultado da soma."*

A questão 2 nos leva ao conceito de números racionais positivos. Intuitivamente, um número racional permite expressar a divisão ou partição de um objeto, matemático ou não, em quantidades que não poderiam ser quantificadas apenas com números inteiros. Por exemplo, quanto mede cada parte de uma corda de 2 m que foi dividida em 3 partes iguais? Ou em outras palavras, quanto é 2 dividido por 3 ?

Os números racionais positivos são conhecidos desde a antiguidade. O papiro de Ahmes, datado de 1700AC, ilustra vários problemas envolvendo frações de números naturais.

Após a aceitação dos números inteiros negativos os matemáticos também passaram a considerar frações de um número negativo.

As questões 3, 4 e 5, por sua vez, nos levam ao conceito de número irracional. Alguns números irracionais como $\sqrt{2}$ e π e a constante áurea φ já eram conhecidos desde a antiguidade. Outros, como $\log 2$, são mais recentes.

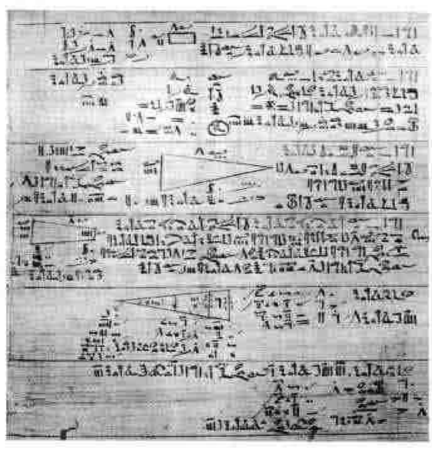


Figura 3.1: Papiro de Ahmes 1700 AC

Finalmente, a questão 6 nos leva ao conceito de número complexo.

Do ponto de vista matemático, a definição de número só foi formalizada por volta de 1922, como conseqüência dos trabalhos de George Cantor (1872), Richard Dedekind (1888), Ernest Zermelo (1908) e Adolf Fraenkel (1922).

De um modo geral, podemos dizer que **um número x é um número racional se podemos multiplicá-lo por algum número natural não-nulo e obter como resultado um número inteiro.** Ou seja, um número racional expressa a razão ou divisão entre dois números inteiros. A notação $\frac{2}{3}$ representa o número racional que multiplicado por 3 resulta em 2. De forma análoga, a notação $\frac{-2}{3}$ representa o número racional que multiplicado por 3 resulta em -2.

Desta forma, os números a seguir são exemplos de números racionais:

$$-0,2\,, \quad \frac{-3}{15}\,, \quad 0\,, \quad \frac{3}{15}, \quad \frac{-3}{4}, \quad \frac{1}{5}, \quad 0,25\,, \quad 0,825.$$

Observe que $-0,2 \times 10 = -2$, que $0,25 \times 4 = 1$. Logo, $-0,2 = \frac{-2}{10}$, assim como, $0,25$ é igual a $\frac{1}{4}$. De forma análoga, $0,825\ \times\ 40 = 33$, logo $0,825 = \frac{33}{40}$.

Definição 3.2. *Um número racional é todo e qualquer número que puder ser escrito na forma $\frac{x}{y}$, em que x e y são números inteiros, com y diferente de zero. O conjunto dos números racionais é usualmente representado por $\mathbb{Q}$.*

O valor x é chamado de **numerador** e o valor y é chamado de **denominador.** Por exemplo em $\frac{2}{3}$, o numerador é igual a 2 e o denominador é igual a 3.

Uma forma de compreender o conjunto $\mathbb{Q}$ é lembrar que: o conjunto dos números inteiros é formado pelos números naturais (incluindo o zero) e os seus opostos aditivos (os inteiros negativos). De forma análoga, o conjunto dos números racionais é composto pelas frações de números naturais e seus opostos aditivos. Além disto, os números racionais positivos, razão entre dois inteiros positivos, admitem uma interpretação como comprimento de segmentos de reta medidos a partir de um ponto fixo, representado pelo zero. Enquanto os seus opostos aditivos, os racionais negativos, são representados por um ponto em posição simétrica em relação ao zero.

Quando dois números racionais são iguais?

Sabemos que é um número racional todo número que multiplicado por um número inteiro, diferente de zero, resulta em um número inteiro. Esta ca-

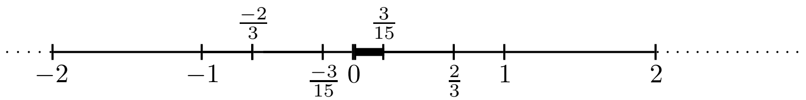


Figura 3.2: Posição relativa na reta

racterização de números racionais nos traz algumas questões interessantes. Por exemplo, como determinar se dois números racionais são iguais, uma vez que eles podem ter diferentes representações? Para ilustrar esta questão considere a questão abaixo.

Questão 3.3. *Na figura a seguir, os triângulos ABC e ADE são triângulos retângulos, nos quais $AB = BC = 1$, $AD = DE = 2$ e $BC||DE$. Qual a razão entre os comprimentos de AE e AC?*

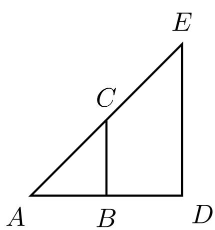


Figura 3.3: $\frac{AE}{AC} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ é racional.

Resposta: Como ABC e ADE são triângulos semelhantes (veja 2.3), facilmente concluímos que $\frac{AE}{AC} = 2$. Por outro lado, desde a antiguidade, os seres humanos sabem calcular os comprimentos de AE e AC (Teorema de Pitágoras: $(AE)^2 = (AD)^2 + (DE)^2$). De fato, o comprimento de AB é $\sqrt{2}$ e o comprimento de AE é o dobro, $2\sqrt{2}$. Logo, a razão também pode ser expressa por $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$. Portanto, $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2 = \frac{2}{1}$. □

Observação 2. *Para os alunos que não sabem o conceito de semelhança, basta observar que o ponto de interseção do segmento DE com a reta paralela ao segmento AD e que passa pelo ponto C determina um ponto P, tal que ABC e CPE são congruentes.*

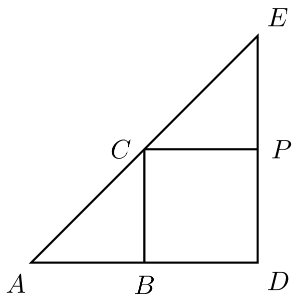


Figura 3.4: ABC é congruente a CPE.

Logo, o comprimento de AC é igual ao comprimento de CE.

O que esta questão nos ensina?

Esta questão nos ensina que a razão entre dois números pode resultar em um número racional, mesmo que estes números não sejam inteiros.

Como saber se uma razão é um número racional?

Para responder a esta pergunta, precisamos entender a *propriedade fundamental da igualdade entre razões:* **"Duas razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, com b e d diferentes de zero, são iguais se, e somente se,** $a \times d = b \times c$.**"** Logo, uma razão $\frac{a}{b}$, entre dois números, é um número racional se, e somente se, existem inteiros c e d, com d diferente de zero, tais que $a \times d = b \times c$. No exemplo 3.3, tem-se $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2}{1}$, pois $2\sqrt{2} \times 1 = 2 \times \sqrt{2}$.

Em particular, temos a seguinte regra para igualdade de números racionais.

Propriedade 3.4 (Igualdade de números racionais).

Dois números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são iguais se, e somente se,
$a \times d = b \times c$.

Exemplo 3.5.

1. Os números racionais $\frac{2}{3}$ e $\frac{-2}{-3}$ são iguais pois, $2 \times (-3) = 3 \times (-2)$.

2. Os números racionais $\frac{-3}{5}$ e $\frac{3}{-5}$ são iguais pois, $(-3) \times (-5) = 3 \times 5$.

Uma conseqüência da propriedade acima é dada a seguir.

Propriedade 3.6. Todo número racional pode ser representado na forma $\frac{a}{b}$ em que b é um número natural diferente de zero.

De fato, a propriedade acima nos diz que se b é um número natural não-nulo, então $\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b}$, pois $a \times (-b) = (-a) \times b$. Veja os exemplos em 3.5.

Como comparar dois números racionais?

Certamente, a comparação entre dois números racionais é fácil de ser feita quando os dois números têm um mesmo denominador positivo. Vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 3.7. *Vamos comparar os racionais* $\frac{2}{3}$ *e* $\frac{4}{5}$. *Podemos representar as razões* $\frac{2}{3}$ *e* $\frac{4}{5}$, *por meio das figuras a seguir, nas quais* $ABCD$ *e* $EFGH$ *são quadrados de mesma área.*

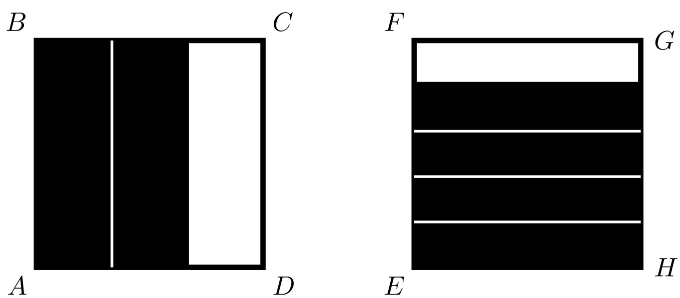


Figura 3.5: A área escura representa $\frac{2}{3}$ da área de $ABCD$ e em $EFGH$ representa $\frac{4}{5}$.

Se dividirmos a área de $ABCD$ *em três partes iguais e depois redividirmos cada parte em 5 partes iguais, a área de* $ABCD$ *será então dividida em 15 partes iguais, e os dois terços da área de* $ABCD$ *corresponderão a 10 destas novas partes. Da mesma forma, se dividirmos a área de* $EFGH$ *em cinco partes iguais e depois redividirmos cada parte em 3 partes iguais, a área de*

$EFGH$ será então dividida em 15 partes iguais, e os quatro quintos da área de $EFGH$ corresponderão a 12 destas novas partes.

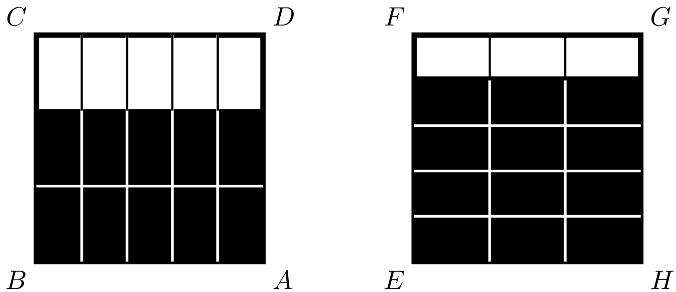


Figura 3.6: A área escura em $ABCD$ representa $\frac{10}{15}$ e em $EFGH$ representa $\frac{12}{15}$.

Portanto, temos $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$ e $\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$. Portanto, a fração $\frac{4}{5}$ representa uma parte maior do que a fração $\frac{2}{3}$, e portanto o número racional $\frac{4}{5}$ é maior do que o número racional $\frac{2}{3}$. $\square$

Logo, para comparar dois números racionais, basta reduzi-los a um mesmo denominador. Pois, **dois números racionais que possuem o mesmo denominador são iguais se, e somente se, os numeradores são iguais.** Além disto, se dois números racionais possuem um mesmo denominador **(positivo)**, o maior entre eles será aquele que possuir o maior numerador. Por exemplo, $\frac{2}{3}$ é maior do que $\frac{3}{5}$ e $\frac{3}{5}$ é maior do que $\frac{8}{-5}$. Pois, $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$, $\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$ e $\frac{8}{-5} = \frac{-24}{15}$. Por outro lado, 10 é maior do que 9 e 9 é maior do que -24.

Como reduzir dois números racionais a um mesmo denominador ?

De um modo geral, dados dois números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ temos $\frac{a}{b} = \frac{a \times d}{b \times d}$ e $\frac{c}{d} = \frac{c \times b}{b \times d}$. Logo, sempre é possível reescrever dois números racionais usando um mesmo denominador. Neste caso, o denominador, a ser obtido, será um múltiplo comum dos dois denominadores. Observe que como b e d são diferentes de zero, então o $MMC(b, d)$ é o menor número natural diferente de zero que é múltiplo de b e de d, logo sempre é possível multiplicar o numerador e o denominador de $\frac{a}{b}$ e, analogamente, de $\frac{c}{d}$, por números inteiros, de forma que o denominador das duas razões seja $MMC(b,d)$.

Exemplo 3.8. *Para reduzir os números racionais* $\frac{5}{6}$ *e* $\frac{3}{8}$ *a um mesmo denominador, observamos que* $MMC(6,8) = 24$. *Por sua vez,* $24 : 6 = 4$ *e* $24 : 8 = 3$. *Logo,* $\frac{5}{6} = \frac{5 \times 4}{6 \times 4} = \frac{20}{24}$ *e* $\frac{5}{8} = \frac{5 \times 3}{8 \times 3} = \frac{15}{24}$.

3.1.1 Representando números racionais com numerador e denominador relativamente primos

Todo número racional $\frac{a}{b}$ pode ser escrito na forma $\frac{x}{y}$ em que $MDC(x,y) = 1$.

De fato, se $d = MDC(a,b)$, então existem inteiros x e y tais que $a = x \times d$ e $b = y \times\ d$ e $MDC(x,y) = 1$. Logo, $\frac{a}{b} = \frac{x \times d}{y \times d} = \frac{x}{y}$.

Exemplo 3.9. *Vamos escrever os racionais* $\frac{6}{12}$, $\frac{90}{35}$ *e* $\frac{-20}{60}$ *com numeradores e denominadores relativamente primos. Temos* $MDC(6,12) = 6$, $MDC(90,35) = 5$ *e* $MDC(-20,60) = 20$. *Logo,*

$$\frac{6}{12} = \frac{1 \times 6}{2 \times 6} = \frac{1}{2} \qquad \frac{90}{35} = \frac{18 \times 5}{7 \times 5} = \frac{18}{7} \qquad \frac{-20}{60} = \frac{-1 \times 20}{3 \times 20} = \frac{-1}{3}$$

3.1.2 Ordenando os racionais

Todo número inteiro é um número racional. De fato, se n é um número natural então podemos escrevê-lo na forma de razão $\frac{n}{1}$. Sendo assim, para comparar dois números racionais precisamos de uma noção de comparação que coincida com a comparação de inteiros. Desta forma, todo número racional negativo, aquele que pode ser expresso na forma $\frac{a}{b}$ com numerador negativo e denominador positivo, deve ser menor do que zero e menor do que qualquer número racional positivo, aquele com numerador e denominador positivos.

Mais ainda, a um número racional positivo $\frac{a}{b}$ corresponde uma distância, medida entre o ponto que representa o zero e o ponto que representa $\frac{a}{b}$, enquanto que, ao seu oposto aditivo $\frac{-a}{b}$ corresponde o ponto em posição simétrica com respeito ao zero, conforme representado na figura abaixo.

Desta forma, se ordenamos os racionais positivos também ordenaremos, automaticamente, os racionais negativos. A propriedade a seguir nos permite comparar os números racionais, respeitando a noção de *maior ou menor* dos números inteiros.

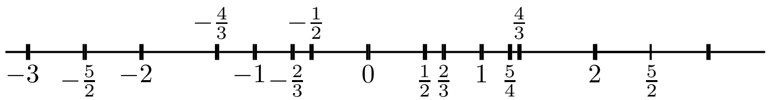


Figura 3.7: Representação de números racionais na reta

Propriedade 3.10 (Ordenando os números racionais). Se os números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ têm denominadores positivos, então o número racional $\frac{a}{b}$ é maior do que o número racional $\frac{c}{d}$ se, e somente se, $a \times d$ é maior do que $c \times b$.

A regra acima pode ser escrita usando o símbolo “ >” (lê-se “maior do que”).

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \text{ se, e somente se, } a \times d > c \times b.$$

Utilizando a regra acima, sempre poderemos ordenar os números racionais, escrevendo-os em ordem crescente ou decrescente.

Exercício 3.11. *Coloque os números racionais abaixo em ordem crescente.*

$$\frac{-1}{5} \quad \frac{-2}{3} \quad \frac{2}{4} \quad \frac{3}{7} \quad \frac{87}{2} \quad \frac{11}{23} \quad \frac{100}{3} \quad \frac{-10}{4}.$$

3.2 Operações aritméticas com números racionais

3.2.1 Soma e produto de números racionais

A soma e o produto dos números racionais são definidos como a seguir.

Definição 3.12 (Soma de números racionais). *Dados dois números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ temos:*

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{(a \times d) \quad + \quad (b \times c)}{b \times d}$$

Propriedade 3.13. *A soma de números racionais tem as seguintes propriedades:*

1. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$ (Comutatividade)
2. $(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}) + \frac{x}{y} = \frac{a}{b} + (\frac{c}{d} + \frac{x}{y})$ (Associatividade)
3. Para cada número racional $\frac{a}{b}$, existe um número racional $\frac{c}{d}$, tal que $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 0$.
   De fato, temos $\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = \frac{0}{b} = 0$. Neste caso, dizemos que $\frac{-a}{b}$ é o oposto aditivo de $\frac{a}{b}$ e escrevemos $-\frac{a}{b}$ em lugar de $\frac{-a}{b}$.

O que significa somar dois números racionais?

Para entender o que significa somar dois números racionais, vamos considerar o caso da soma de dois números racionais positivos.

Nas duas figuras a seguir os quadrados $ABCD$ e $EFGH$ são congruentes, a parte escura representa, respectivamente, $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{8}$ das áreas dos quadrados $ABCD$ e $EFGH$.

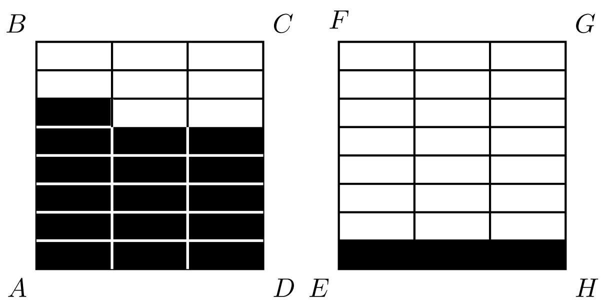


Figura 3.8: Os quadrados $ABCD$ e $EFGH$ têm 24 retângulos de mesma área.

Se juntarmos a parte que representa $\frac{2}{3}$ com a parte que representa $\frac{1}{8}$ (lembre-se que $\frac{2}{3} = \frac{16}{24}$ e $\frac{1}{8} = \frac{3}{24}$), obteremos 19 partes de um quadrado que foi dividido em 24 partes iguais.

Logo, a razão entre a área da união das partes escuras das duas figuras e a área do quadrado, será igual a $\frac{19}{24}$, ou seja, $\frac{16}{24} + \frac{3}{24} = \frac{19}{24}$.

Deste exemplo, percebemos que para somar números racionais com um mesmo denominador basta somar os numeradores e manter o denominador. De um modo geral, dados dois números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ temos $\frac{a}{b} = \frac{a \times d}{b \times d}$ e $\frac{c}{d} = \frac{c \times b}{b \times d}$. Portanto, a soma é igual a $\frac{a \times d + c \times b}{b \times d}$.

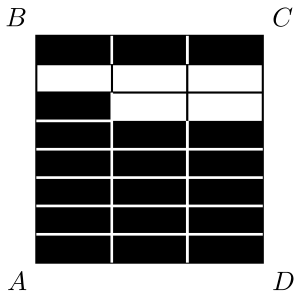


Figura 3.9: A área dos retângulos escuros, juntos, representa uma fração igual a $\frac{19}{24}$ do quadrado.

Quanto é $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{5}$?

Na figura 3.10, a área do retângulo $AEHD$ corresponde a $\frac{2}{5}$ da área do retângulo $ABCD$.

Se dividirmos o retângulo $ABCD$, horizontalmente, em 5 partes iguais e depois dividimos, verticalmente, cada parte em 4 partes iguais, o retângulo $ABCD$ será dividido em 20 partes iguais e a área do retângulo $AEHD$ será dividida em 8 partes iguais. Desta forma, $\frac{3}{4}$ da parte escura corresponde a 6 partes de um total de 20 partes da unidade, veja a figura 3.10. Logo, $\frac{3}{4}$ da parte escura é igual a $\frac{6}{20}$.

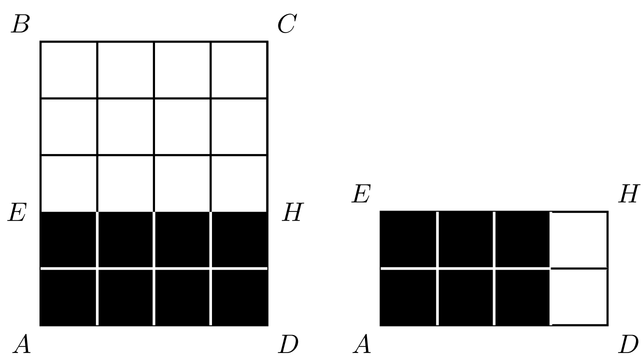


Figura 3.10:

Reduzindo a fração, temos que:

$$\frac{6}{20} = \frac{3 \times 2}{4 \times 5} = \frac{3}{10}$$

De uma forma geral, calcular uma fração $\frac{a}{b}$ de uma fração $\frac{c}{d}$ corresponde à fração $\frac{a \times c}{b \times d}$. Esta interpretação se estende para os números racionais.

Definição 3.14 (Produto de números racionais). *Dados dois números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ temos:*

$$\tfrac{a}{b} \times \tfrac{c}{d} = \tfrac{a \times c}{b \times d}$$

Propriedade 3.15. *O produto de números racionais tem as seguintes propriedades:*

1. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$ (Comutatividade)
2. $(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}) \times \frac{x}{y} = \frac{a}{b} \times (\frac{c}{d} \times \frac{x}{y})$ (Associatividade)
3. $(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}) \times \frac{x}{y} = \frac{a \times c \times x}{b \times d \times y}$
4. Para cada número racional $\frac{a}{b}$, com $a \neq 0$, existe um número racional $\frac{c}{d}$, tal que $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = 1$.
   De fato, temos $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{a \times b}{a \times b} = \frac{1}{1} = 1$. Neste caso, dizemos que $\frac{b}{a}$ é o inverso de $\frac{a}{b}$.
5. $\frac{a}{b} \times (\frac{c}{d} + \frac{x}{y}) = (\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}) + (\frac{a}{b} \times \frac{x}{y})$ (Distributividade)

A forma mais fácil de entender o que são e para que servem os números racionais é observar o que representam os números racionais positivos. Cada número racional positivo representa uma fração racional, isto é, a expressão da relação entre partes de um todo e uma unidade, em que a unidade, a parte e o todo são divididos em partes menores de mesmo tamanho.

Exemplo 3.16. *Na figura 3.11 o quadrado foi dividido em 16 quadrados de mesmo tamanho.*

A parte escura corresponde a 4 quadrados de um total de 16 quadrados iguais. Portanto, a razão entre a área escura e a área total do quadrado é igual a $\frac{4}{16}$. Ora, quatro partes iguais em um total de 16 partes iguais correspondem a um quarto do total.

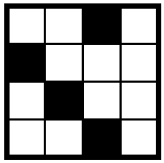


Figura 3.11: A área escura representa $\frac{4}{16}$ da área do quadrado

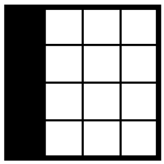


Figura 3.12: A área escura representa $\frac{1}{4}$ da área do quadrado

Ou seja, se a unidade fosse divida em quatro partes iguais, a área escura corresponderia a uma parte do total de quatro partes iguais. Desta forma, o número racional $\frac{1}{4}$ expressa a mesma relação que $\frac{4}{16}$.

Neste caso, foi muito fácil expressar o quanto a parte escura representa do todo. Qualquer pessoa entende rapidamente quando alguém diz que comeu metade, ou um terço, ou um quarto de uma barra de chocolate, pois todos nós imaginamos a barra de chocolate dividida em pedaços menores e de igual tamanho. Além disto, todos entendem que metade da barra de chocolate é menor que a barra inteira.

Exemplo 3.17. *Joãozinho ganhou duas barras, idênticas, de chocolates. Cada barra estava dividida em 4 quadrados iguais. Joãozinho comeu uma barra inteira e a metade da outra barra. Vamos representar cada barra de chocolate por um quadrado em que a área escura corresponde à parte que Joãozinho comeu. Qual a fração que expressa a relação entre o quanto Joãozinho comeu e o tamanho da barra de chocolate?*

Ora, cada barra foi dividida em 4 quadrados iguais. Joãozinho comeu 6 quadrados. Cada quadrado corresponde a um quarto da barra, logo Joãozinho comeu 6 quartos de uma barra. Neste caso, a unidade é uma barra e o " todo"corresponde às duas barras. O número racional $\frac{6}{4}$ expressa a razão entre a parte escura e a unidade.

Figura 3.13: A área escura corresponde à fração $\frac{6}{4}$

Observemos que a parte escura é igual a três vezes a metade de uma barra, portanto o número racional $\frac{3}{2}$ expressa a mesma relação que $\frac{6}{4}$.

Exercício 3.18. *Em cada caso, escreva a fração racional que representa a relação entre a parte escura e a unidade.*

1. No exercício a seguir, cada retângulo representa a unidade e cada unidade foi dividida em partes de mesmo tamanho. A qual fração do retângulo, corresponde a área escura em cada figura?

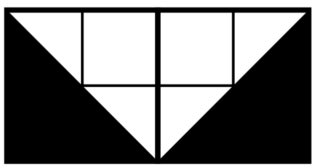


Figura 3.14: A área escura corresponde à fração ....

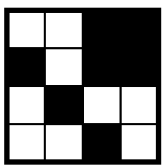


Figura 3.15: A área escura corresponde à fração ...

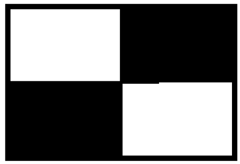


Figura 3.16: A área escura corresponde à fração ...

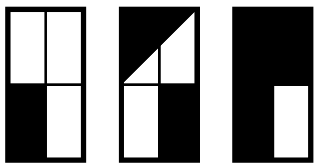


Figura 3.17: A área escura corresponde à fração ...

Exercício 3.19. *Considerando a unidade indicada, escreva a fração racional que representa a relação entre a parte em negrito e a unidade.*

1. O segmento AB representa a unidade. A qual fração correspondem juntos os segmentos em negrito?

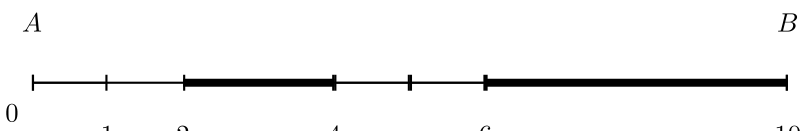


Figura 3.18: Os segmentos em negrito correspondem à fração ....

2. O disco representa a unidade. A qual fração corresponde a área escura?

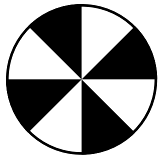


Figura 3.19: A área em negrito corresponde à fração ....

Exercício 3.20. *Faça um desenho que expresse a relação indicada pelos seguintes números racionais:*

$$\frac{3}{5}, \qquad \frac{8}{4}, \qquad \frac{4}{5}, \qquad \frac{5}{4}, \qquad \frac{16}{3}$$

3.2.2 Subtraindo números racionais

A subtração de números racionais é definida a seguir:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{(a \times d) \quad - \quad (b \times c)}{b \times d}$$

Em verdade, a subtração $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ corresponde à soma de $\frac{a}{b}$ com o oposto de $\frac{c}{d}$. Ou seja,

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \frac{-c}{d}.$$

3.2.3 Divisão de números racionais

Quando dividimos 6 por 3 sabemos que o resultado é igual a 2 pois $2 \times 3 = 6$. De forma análoga, dividir o número racional $\frac{4}{5}$ pelo número racional $\frac{2}{3}$, corresponde a procurar o número racional $\frac{x}{y}$ tal que $\frac{2}{3} \times \frac{x}{y} = \frac{4}{5}$. Desta forma, o resultado da divisão de $\frac{4}{5}$ pelo número racional $\frac{2}{3}$ é igual a $\frac{6}{5}$. Pois, $\frac{2}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{4}{5}$. De um modo geral, temos:

$$\frac{c}{d} \times \frac{x}{y} = \frac{a}{b} \quad \text{se, e somente se, } \frac{c \times x}{d \times y} = \frac{a}{b}.$$

Por outro lado,

$$\frac{c \times x}{d \times y} = \frac{a}{b} \quad \text{se, e somente se,} \quad (c \times x) \times b = (d \times y) \times a,$$

ou seja,

$$x \times (b \times c) = y \times (a \times d), \qquad \text{isto é,} \qquad \frac{x}{y} = \frac{a \times d}{b \times c}.$$

Portanto, para dividir um número racional $\frac{a}{b}$ por um número racional não-nulo $\frac{c}{d}$, basta multiplicar $\frac{a}{b}$ por $\frac{d}{c}$.

A divisão de um número racional $\frac{a}{b}$ por outro número racional $\frac{c}{d}$, diferente de zero, é definida a seguir:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

É comum o uso da notação $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ para indicar a divisão de $\frac{a}{b}$ por $\frac{c}{d}$.

Questão 3.21.

1. Qual o número racional que devemos multiplicar por $\frac{2}{3}$ para obtermos como resultado o número racional $\frac{4}{5}$?

2. Qual o número racional que devemos multiplicar por $\frac{3}{7}$ para obtermos como resultado o número racional $\frac{-9}{5}$?

3. Qual o número racional que devemos multiplicar por $\frac{3}{5}$ para obtermos como resultado o número racional $\frac{3}{1}$?

4. É verdade que todo número inteiro pode ser escrito como um número racional?

5. Qual o menor inteiro positivo que devemos multiplicar por $\frac{6}{4}$ para obtermos como resultado um número inteiro positivo?

6. Podemos afirmar que para cada fração $\frac{a}{b}$, diferente da fração nula, existe um menor inteiro positivo x tal que $\frac{a}{b} \times \frac{x}{1}$ é um número inteiro?

Exercício 3.22. *Calcule o resultado das seguintes expressões:*

1. $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$

2. $(\frac{1}{4} + \frac{3}{8}) - \frac{2}{3}$

3. $\frac{1}{4} + (\frac{3}{8} - \frac{2}{3})$

4. $\frac{1}{3} - \frac{3}{8} - \frac{5}{7}$

5. $\frac{3}{4} \times (\frac{6}{8} + \frac{1}{3})$

6. $(\frac{3}{4} \times \frac{6}{8}) + (\frac{3}{4} \times \frac{1}{3})$

7. $\frac{3}{4} \times (\frac{6}{8} - \frac{1}{3})$

8. $\frac{-2}{6} - \frac{8}{48}$

9. $\frac{1}{1} - \frac{1}{4}$

10. $\frac{-5}{13} \times \frac{13}{12}$

11. $\frac{1}{4} - (2 + \frac{1}{3})$

12. $\frac{-7}{12} \times \frac{-3}{8}$

13. $\frac{1}{3} \times \frac{-5}{8}$

14. $\frac{1}{3} - (\frac{1}{4} \times \frac{3}{8})$

15. $\frac{2}{3} - \frac{3}{4} - \frac{2}{5}$

16. $\frac{0}{1} - \frac{5}{8}$

17. $\frac{2}{3} \div \frac{5}{4}$

18. $\frac{3}{5} \div \frac{1}{10}$

Observação 3. *As operações de soma, produto, subtração e divisão de números racionais obedecem às mesmas regras de precendência de sinais que as operações com números inteiros. Numa expressão sem parênteses, primeiro realizamos o produto ou a divisão e, por fim, a soma ou multiplicação. Esta ordem de operação só é alterada pelo uso dos parênteses, neste caso, primeiro deve-se calcular as operações indicadas entre os parênteses.*

Assim, o resultado da expressão $\frac{1}{3} \div \frac{3}{4} + \frac{3}{5} - \frac{1}{4} \times \frac{3}{2}$ é calculado como abaixo.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} \div \frac{3}{4} + \frac{3}{5} - \frac{1}{4} \times \frac{3}{2} &= \left(\frac{1}{3} \div \frac{3}{4}\right) + \frac{3}{5} - \left(\frac{1}{4} \times \frac{3}{2}\right) \\
&= \left(\frac{1}{3} \times \frac{4}{3}\right) + \frac{3}{5} - \frac{3}{8} \\
&= \frac{4}{9} + \frac{3}{5} - \frac{3}{8} \\
&= \frac{160}{360} + \frac{216}{360} - \frac{135}{360} \\
&= \frac{160}{360} + \frac{216}{360} + \frac{-135}{360} \\
&= \frac{160 + 216 - 135}{360} \\
&= \frac{241}{360}
\end{aligned}$$

Enquanto o resultado da expressão $\frac{1}{3} \div (\frac{3}{4} + \frac{3}{5}) - (\frac{1}{4} \times \frac{3}{2})$ é dado a seguir:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} \div \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{5}\right) - \left(\frac{1}{4} \times \frac{3}{2}\right) &= \frac{1}{3} \div \left(\frac{15}{20} + \frac{12}{20}\right) - \frac{3}{8} \\
&= \frac{1}{3} \div \frac{27}{20} - \frac{3}{8} \\
&= \left(\frac{1}{3} \div \frac{27}{20}\right) - \frac{3}{8} \\
&= \left(\frac{1}{3} \times \frac{20}{27}\right) - \frac{3}{8} \\
&= \frac{20}{81} - \frac{3}{8} \\
&= \frac{160 - 243}{648} \\
&= \frac{-83}{648}
\end{aligned}$$

Exercício 3.23. *Coloque os parênteses nas expressões abaixo para indicar a ordem em que as operações devem ser executadas.*

1. $\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} - \frac{4}{5} \div \frac{1}{2}$
2. $\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \div \frac{2}{5} - \frac{4}{5} \div \frac{1}{2}$
3. $\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \div \frac{2}{5} + \frac{4}{5} \div \frac{1}{2}$
4. $\frac{1}{3} \div (\frac{2}{3} - \frac{2}{5}) \div \frac{1}{5} + 2 - \frac{4}{5} \div \frac{1}{2}$

Exercício 3.24. *Calcule o resultado das expressões indicadas abaixo:*

1. $\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} - \frac{4}{5} \div \frac{1}{2}$
2. $\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \div \frac{2}{5} - \frac{4}{5} \div \frac{1}{2}$
3. $\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \div \frac{2}{5} + \frac{4}{5} \div \frac{1}{2}$
4. $\frac{1}{3} \div (\frac{2}{3} - \frac{2}{5}) \div \frac{1}{5} + 2 - \frac{4}{5} \div \frac{1}{2}$
5. $\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \div 5$
6. $\frac{1}{5} + \frac{2}{3} \times (\frac{1}{2} + \frac{1}{3})$

3.3 Representação decimal para números racionais

De acordo com o significado de número racional, vimos que um número é racional se, e somente se, podemos multiplicá-lo por algum número natural não-nulo e obter como resultado um número inteiro. Desta forma, podemos pensar os números racionais como resultado da divisão de dois números inteiros. Por exemplo, $\frac{1}{8} = 0,125$ enquanto que $\frac{1}{100} = 0,01$. Como ficaria a representação decimal de $\frac{1}{3}$?

Observe que

$$0,3 \times 3 = 0,9\,, \quad 0,33 \times 3 = 0,99\,, \qquad 0,3333333333 \times 3 = 0,9999999999$$

e que quanto mais casas decimais usamos, o produto por 3 fica cada vez mais próximo de 1. Mas se usamos um número finito de casas decimais iguais a 3, o resultado do produto por 3 nunca será igual a 1. Sendo assim, é impossível representar $\frac{1}{3}$ usando um número finito de casas decimais. Neste caso, dizemos que o número racional $\frac{1}{3}$ é representado por uma dízima periódica simples $0,33333\ldots$, isto é, um número cujas casas decimais, a partir de um certo ponto, constituem-se da repetição infinita de um único algarismo. Quando as casas decimais de um número se repetirem indefinidamente numa seqüência de dois ou mais algarismos, dizemos que o número é uma dízima periódica composta. Por exemplo, $40 \div 33 = 1,212121\ldots$ repete infinitamente a seqüência de algarismos 21 a partir da prim eira casa decimal. Observe que multiplicando os números $1,21\,,\quad 1,2121\,,\quad 1,212121\,,\quad 1,21212121$ e $1,2121212121$ por 33 obtemos, respectivamente, os números $39,93,\quad 39,9993,\quad 39,999993$, $39,99999993$ e $39,9999999993$, que estão cada vez mais próximos de 40. De forma análoga, a divisão de 2102 por 900 nos fornece $2102 \div 900 = 2,335555\ldots$.

Para indicar que uma seqüência de algarismos se repete infinitamente, usamos uma barra sobre ela. Desta forma, a notação $0,\overline{3}$ representa a repetição infinita do número 3 a partir da primeira casa decimal, enquanto que $1,\overline{21}$ representa a repetição infinita de 21 após a primeira casa decimal. De forma análoga, $2,33\overline{5}$ representa a repetição infinita do algarismo 5 a partir da terceira casa decimal.

De acordo com a notação acima, temos que $\frac{1}{3} = 0,\overline{3}\,,\quad \frac{40}{33} = 1,\overline{21}$ e $\frac{2102}{900} = 2,33\overline{5}$. De acordo com a noção de números racionais, percebe-se que todo número racional tem uma expressão decimal. Esta expressão pode ter um número finito de casas decimais ou ser uma dízima periódica simples ou composta. Para ser mais preciso, observando que um número racional, com um número finito de casas decimais não-nulas, corresponde a uma dízima periódica que consiste da repetição do algarismo zero, então todo número racional é uma dízima. Por exemplo, temos $\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0,5 = 0,50 = \frac{50}{100} = \frac{500}{1000} = 0,500 = \cdots = 0,5\overline{0}$. Qual a pergunta natural a ser feita aqui? Pense um pouco...

Questão 3.25. *Toda dízima periódica corresponde a um número racional?*

A resposta é sim. A seguir apresentamos um artifício para encontrar o número racional que corresponde a uma dízima.

1. Primeiro verificamos qual a seqüência de algarismos que se repete infinitamente.

2. Contamos quantos algarismos tem na seqüência que se repete.

3. Chamamos a dízima de x.

4. Multiplicamos por 10 até que a seqüência que se repete comece, imediatamente, após a vírgula. Chamemos este valor de ax.

5. Multiplicamos x por um múltiplo de 10 que desloque a vírgula para a segunda seqüência de algarismos. Chamemos este valor de cx.

6. O valor $cx - ax$ é um número inteiro. Chamemos este número de n.

7. Temos $cx - ax = n$. Logo, $x = \frac{n}{c-a}$. (Observe que $a < c$.)

Vamos aplicar a técnica acima para a dízima $1,3\overline{2}$

Temos:

$$\begin{aligned}
x &= 1,3\overline{2} = 1,3222222\ldots \\
10x &= 13,\overline{2} = 13,22222222222\ldots \\
100x &= 132,\overline{2} = 132,222222222\ldots \\
90x &= 132,222222222\ldots - 13,22222222222\ldots \\
90x &= 132 - 13 = 119 \\
x &= \frac{119}{90}
\end{aligned}$$

Exercício 3.26.

1. *Encontre os números racionais que representam as seguintes dízimas periódicas:*

   (a) $1,254\overline{2}$

   (b) $0,\overline{32}$

   (c) $-0,\overline{32}$

   (d) $2,1\overline{5}$

   (e) $3,\overline{132}$

   (f) $-1,\overline{12}$

   (g) $0,135\overline{32}$

   (h) $0,25\overline{0}$

   (i) $0,825\overline{0}$

   (j) $2,\overline{9}$

   (k) $0,\overline{9}$

2. *Verifique que se n é um número natural, então $n,\overline{9} = n + 1$.*

3. *Encontre o resultado das expressões abaixo e escreva o resultado como uma dízima periódica.*

   (a) $3 \div 6$
   (b) $1 - 3,\overline{3}$
   (c) $0,\overline{32} \times 10$
   (d) $0,\overline{9} - \frac{1}{5}$
   (e) $0,\overline{45} \times \frac{2}{3}$
   (f) $2,\overline{13} \div 1,\overline{31}$

3.3.1 Frações decimais

Uma fração decimal é uma número racional positivo, cujo denominador é uma potência de 10. Todo número racional pode ser escrito como soma de um número inteiro mais a soma de um certo número de frações decimais. Veja os exemplos a seguir:

$$\begin{aligned} 1,25 &= 1 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100} \\ 0,356 &= 0 + \frac{3}{10} + \frac{5}{100} + \frac{6}{1000} \\ 5,010010001 &= 5 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^5} + \frac{1}{10^9} \\ -1,25 &= -2 + \frac{7}{10} + \frac{5}{10^2} \end{aligned}$$

O número de frações decimais necessárias para expressar um número racional como número decimal pode ser finito, como nos casos acima, mas também pode ser infinito, como nos exemplos abaixo:

$$\begin{aligned} 1,\overline{3} &= 1 + \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \cdots \\ 3,21\overline{5} &= 3 + \frac{2}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{5}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{5}{10^5} + \cdots \\ 1,\overline{32} &= 1 + \frac{3}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \frac{2}{10^6} + \cdots + \frac{3}{10^n} + \frac{2}{10^{n+1}} + \cdots, \\ & \text{onde } n \text{ é ímpar.} \end{aligned}$$

Mas afinal, o que é um número decimal?

Definição 3.27. *Um número decimal é todo número que pode ser expresso como soma de um número inteiro mais uma certa quantidade de frações decimais. A quantidade de frações decimais na expressão de um número decimal pode ser finita ou infinita. Assim como, os numeradores destas frações decimais podem repetir, periodicamente, um grupo de algarismos, a partir de uma certa casa decimal (dízima periódica), ou podem jamais repetir, periodicamente, qualquer seqüência finita de algarismos. Em geral, um número decimal tem a forma:*

$$b+\frac{\alpha_1}{10}+\frac{\alpha_2}{10^2}+\frac{\alpha_3}{10^3}+\cdots+\frac{\alpha_n}{10^n}+\cdots, \qquad \textit{em que } b\in\mathbb{Z} \textit{ e } \alpha_1,\alpha_2,\ldots\in\{0,1,2,\ldots,9\}.$$

O valor b é dito ser a parte inteira do número decimal e $\frac{\alpha_1}{10}+\frac{\alpha_2}{10^2}+\frac{\alpha_3}{10^3}+\cdots+\frac{\alpha_n}{10^n}+\cdots$, a parte decimal.

Um número decimal $b+\frac{\alpha_1}{10}+\frac{\alpha_2}{10^2}+\frac{\alpha_3}{10^3}+\cdots+\frac{\alpha_n}{10^n}+\cdots$ **é dito negativo, se** $b<0$. **Se um número decimal, diferente de zero, não é negativo, então dizemos que ele é positivo.** Por exemplo:

- Os números racionais negativos também são números decimais negativos.
- O número $-2+\frac{5}{10}+\frac{8}{100}+\frac{7}{10^3}+\cdots$ é um número decimal negativo.
- Os números decimais com parte inteira igual a zero e com alguma parcela (fração decimal) $\frac{\alpha_n}{10^n}$ diferente de zero são números decimais positivos.
- Todo número decimal com parte inteira maior ou igual a 1 é um número decimal positivo.

Observação 4. *Para escrever $-\frac{1}{5}$ em sua forma decimal, observe que $\frac{-1}{5}=\frac{4}{5}-1$. Logo, a forma decimal de $\frac{-1}{5}$ é -1 mais a forma decimal de $\frac{4}{5}$.*

$$-\frac{1}{5}=-1+\frac{4}{5}=(-1)+0,8=-1+\frac{8}{10}$$

Exercício 3.28. *Baseando-se nos exemplos acima, expresse os números racionais a seguir em sua forma decimal*

1. $\frac{1}{8}$
2. $\frac{3}{10^5}$

3. $\frac{-1}{8}$
4. $\frac{235}{100}$
5. $\frac{-2}{3}$
6. $(-1) \times (1,\overline{3})$ *(Dica: converta em fração e lembre-se que* $-2 + \frac{2}{3} = -\frac{4}{3}$*.)*

Exercício 3.29. *Para cada número racional a seguir, determine em sua representação decimal o centésimo e o* 501º *(quintocentésimo primeiro) algarismo após a vírgula.*

1. $\frac{1}{8}$
2. $0,\overline{123}$
3. $\frac{-1}{8}$
4. $(-1) \times (1,\overline{3})$
5. $0,\overline{12345}$
6. $0,121\overline{35}$

Exercício 3.30.

1. Mostre que se b e d são inteiros positivos e $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ então $\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$.
2. Qual o valor decimal da razão $\frac{1+2+3+4+\cdots+1000}{5+10+15+20+\cdots+5000}$?
3. Qual o valor da razão $\frac{2+4+6+\cdots+34}{3+6+9+\cdots+51}$?
4. Mostre que se b, d e y são inteiros positivos e $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{x}{y}$ então $\frac{a+c+x}{b+d+y} = \frac{x}{y}$.
5. Se a, b, c são três inteiros positivos distintos tais que $\frac{b}{a-c} = \frac{a+b}{c} = \frac{a}{b}$, qual o valor de $\frac{a}{b}$?
6. Mostre que se x, y são números naturais, tais que $0 < x < y$, então existe um único natural $n \geq 1$ tal que $\frac{1}{n+1} < \frac{x}{y} \leq \frac{1}{n}$.
7. Mostre que para todo número natural $n \geq 1$ tem-se que $\frac{x}{y} = \frac{1}{n} + \frac{nx-y}{ny}$.
8. Mostre que se $n > 2$ e $\frac{1}{n} \leq \frac{x}{y} < \frac{1}{n-1}$ então:

(a) $\frac{nx-y}{ny}$ é uma fração própria.

(b) $\frac{x}{y} - \frac{1}{n} < \frac{1}{n}$.

9. Escreva as frações $\frac{2}{5}$ e $\frac{4}{3}$ como soma de frações distintas com numeradores iguais a 1.

10. Encontre os números naturais não-nulos x, y, z, tais que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

11. **Desafio!!**

    Todo número racional positivo pode ser escrito como soma de uma certa quantidade de frações distintas, com numeradores iguais a 1. Verdadeiro ou falso?

3.4 Números racionais e Proporção

Uma das mais belas, antigas e naturais noções matemáticas é a noção de proporção. Com base nesta noção o homem construiu os mais belos monumentos da história da civilização humana, assim como a música e as mais belas pinturas já feitas pelos artistas. A seguir definiremos o que é uma proporção e faremos vários exemplos de aplicação desta noção.

Definição 3.31. *Uma proporção é a ocorrência de uma igualdade entre duas razões. Neste caso, dizemos que as duas razões são proporcionais.*

A expressão $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ é uma proporção e as razões $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{6}$ são razões proporcionais. Para indicar que duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são proporcionais, nós usamos a notação $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$.

Questão 3.32. *Paulo e seu irmão João ganharam um pacote de biscoito com 42 biscoitos. Juntos decidiram comer os biscoitos durante o recreio. A cada biscoito que Paulo comia, João comia dois. Quantos biscoitos cada um deles comeu?*

Resposta: Vamos resolver o problema de duas maneiras: Com e sem a atribuição de incógnitas para a resolução do problema.

(a) **Primeira Forma:** Se a cada biscoito que Paulo come, João come 2, então a quantidade total de biscoitos comidos pelos dois corresponderá ao triplo da quantidade de biscoitos comida por Paulo. Logo, o total de biscoitos será igual a três vezes o que Paulo comeu. Portanto, Paulo comeu $\frac{42}{3}$ do pacote de biscoitos. Isto é, Paulo comeu 14 biscoitos. Conseqüentemente, João comeu 28 biscoitos. $\square$

(b) **Segunda Forma:** Chamemos de x e y, respectivamente, a quantidade que Paulo e João comeram. A razão entre o que Paulo comeu e João comeu deve ser igual a $\frac{1}{2}$. Logo devemos ter:

$$\begin{cases} x+y = 42 \\ \frac{x}{y} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad \begin{cases} x+y = 42 \\ 2x = y \end{cases}$$

Substituindo o valor de y na primeira igualdade (**lembre-se dos princípios do senso comum!**), devemos ter $x + 2x = 42$. Ou seja, $3x = 42$ e portanto $x = 14$ e $y = 28$. $\square$

Questão 3.33. *Como dividir 44 bolas entre duas pessoas de forma que a razão formada pelas quantidades de bolas que elas receberam seja igual a* $\frac{4}{7}$*?*

Resposta: Chamemos de x e y, respectivamente, a quantidade que cada pessoa recebeu. Devemos ter:

$$\begin{cases} x+y = 44 \\ \frac{x}{y} = \frac{4}{7} \end{cases} \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad \begin{cases} x+y = 44 \\ 7x = 4y \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por 4, devemos ter

$$\begin{cases} 4x+4y = 176 \quad (*) \\ 7x = 4y \end{cases}$$

Substituindo $4y$ por $7x$, na equação $(*)$, teremos $4x + 7x = 176$. Ou seja, $11x = 176$. Portanto, $x = \frac{176}{11} = 16$ e $y = 44 - 16 = 28$. $\square$

Questão 3.34. *Franklim e Tássio compraram juntos um pacote de bombons por R\$* 22,00*. Tássio contribuiu com R\$* 12,00 *e Franklim com R\$* 10,00*. Os dois venderam os bombons e conseguiram um total de R\$* 55,00*. Divida o valor da venda de forma que a quantidade recebida por cada um deles seja diretamente proporcional ao que investiram, isto é, quem investiu mais, ganha mais.*

Questão 3.35. *As irmães Dayse e Mirella foram juntas a uma lanchonete e compraram juntas uma porção de 10 pastéis por 12 reais. Mirella comeu sete pastéis e Dayse comeu 3. Divida o total a pagar de forma que cada irmã pague um total diretamente proporcional ao que consumiu, isto é, quem comeu mais, paga mais.*

Resposta: Ora, como a porção de 10 pastéis custa 12 reais, então cada pastel custa R$ 1, 20. Logo, numa divisão diretamente proporcional ao que cada uma consumiu, Mirella deve pagar R$ 8, 40 e Dayse deve pagar R$ 3, 60. $\square$

Vejamos outra forma de encontrar quanto cada uma deve pagar. Chamemos de x e y, respectivamente, a quantidade que Mirella e Dayse devem pagar. Devemos ter:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 12 \\ \frac{x}{7} & = & \frac{y}{3} \end{array}\right. \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad \left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 12 \\ 3x & = & 7y \end{array}\right.$$

Multiplicando a primeira equação por 3, devemos ter

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x+3y & = & 36 \quad (*) \\ 3x & = & 7y \end{array}\right.$$

Substituindo $3x$ por $7y$, na equação $(*)$, teremos $7y+3y=36$. Ou seja, $10y = 36$. Portanto, $y=\frac{36}{10}=3,60$ e $x=12-3,60=8,40$. $\square$

3.4.1 Divisão em partes proporcionais

As questões apresentadas acima são exemplos de divisão de um valor em partes diretamente proporcionais a uma lista de valores dados. Esta divisão também pode ser feita em valores inversamente proporcionais a uma lista de valores dados.

Definição 3.36 (Razões diretamente ou inversamente proporcionais). *Duas razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{x}{y}$ são ditas diretamente proporcionais se ocorre a proporção $\frac{a}{b}=\frac{x}{y}$. Elas serão ditas inversamente proporcionais se ocorrer a proporção $\frac{a}{b}=\frac{y}{x}$.*

A divisão de um valor em partes diretamente proporcionais, ou inversamente proporcionais, a uma lista de valores é uma aplicação do Teorema de Thales (veja teorema 2.3). Para dividir um segmento de 24 cm em partes diretamente proporcionais a 2, 4, e 6, utilizando o Teorema de Thales, procedemos da seguinte maneira:

- Construa um triângulo ABC tal que $AB=24$ e $AC=2+4+6=12$.
- Marque no segmento AC pontos P,Q tais que $AP=2$, $PQ=4$, e $QC=6$.

- Trace pelos pontos P e Q retas paralelas ao segmento BC. Determinando, respectivamente, os pontos M e N

- De acordo com o Teorema de Thales, temos que:

$$\frac{24}{AM} = \frac{12}{AP} = \frac{12}{2} \qquad \frac{24}{MN} = \frac{12}{PQ} = \frac{12}{4} \qquad \frac{24}{NB} = \frac{12}{QC} = \frac{12}{6}$$

  Logo, resolvendo as proporções, temos : $AM = 4\ cm$, $MN = 8\ cm$ e $NB = 12\ cm$.

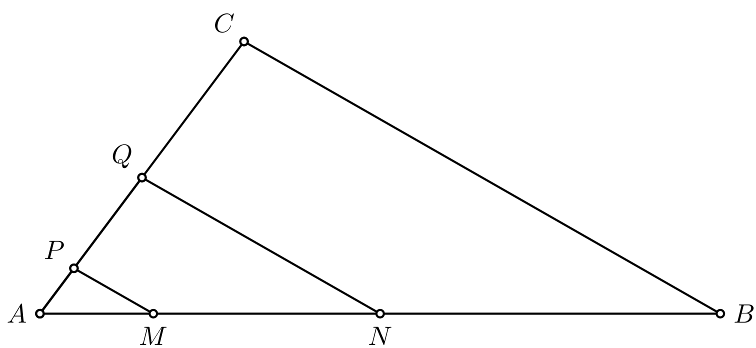


Figura 3.20: Divisão em partes proporcionais

Observação 5. *O Teorema de Thales permite fazer a divisão de um valor α em partes diretamente proporcionais a uma lista com dois ou mais valores $p, q, r, s, \ldots$. Para isto, consideramos a soma σ dos valores $p, q, r, s, \ldots$ e traçamos o triângulo ABC, tal que $AB = \alpha$ e $AC = \sigma$. A seguir, marcamos no segmento AC os pontos $P, Q, R, S \ldots$ tais que $AP = p$, $PQ = q$, $QR = r$, ... e procedemos traçando, por estes pontos, retas paralelas ao segmento BC e determinando $P', Q', R', S' \ldots$, suas respectivas interseções com o segmento AB. De forma análoga ao que foi feito acima, resolvemos as proporções correspondentes para encontrar a divisão procurada.*

$$\frac{\alpha}{AP'} = \frac{\sigma}{AP} = \frac{\sigma}{p} \qquad \frac{\alpha}{P'Q'} = \frac{\sigma}{PQ} = \frac{\sigma}{q} \qquad \ldots$$

Observação 6. *Para dividir um valor em partes inversamente proporcionais, utilizando o Teorema de Thales, basta dividi-lo em partes diretamente proporcionais aos inversos dos valores. Por exemplo, se queremos dividir 20 em partes inversamente proporcionais a 2 e 3, basta dividi-lo em partes diretamente proporcionais a* $\frac{1}{2}$ *e* $\frac{1}{3}$.

Questão 3.37. *Como dividir* 20 *em duas partes diretamente proporcionais a* 3 *e* 2*?*

Resposta: Queremos encontrar valores x e y tais que $x + y = 20$ e $\frac{x}{3} = \frac{y}{2}$. Ou, de forma equivalente, tais que $x + y = 20$ e $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$.

Devemos ter

$$\begin{cases} x + y &= 20 \\ 2x &= 3y \end{cases}$$

Multiplicando $x + y = 20$ por 2, temos $2x + 2y = 40$. Substituindo $2x$ por $3y$, devemos ter $3y + 2y = 40$. Ou seja, $5y = 40$. Logo, $y = 8$ e $x = 12$.

Questão 3.38. *Como dividir* 30 *em duas partes inversamente proporcionais a* 3 *e* 2*?*

Resposta: Queremos encontrar valores x e y tais que $x + y = 30$ e $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$. Ou, de forma equivalente, tais que $x + y = 30$ e $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$. Devemos ter

$$\begin{cases} x + y &= 30 \\ 3x &= 2y \end{cases}$$

Multiplicando $x + y = 30$ por 3, temos $3x + 3y = 90$. Substituindo $3x$ por $2y$ devemos ter $2y + 3y = 90$. Ou seja, $5y = 90$. Logo, $y = 18$ e $x = 12$.

Observe que, de fato, $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$.

Questão 3.39. *Como dividir* 6 *em duas partes inversamente proporcionais a* 3 *e* 2, *usando o Teorema de Thales?*

Resposta: Basta dividir em partes diretamente proporcionais a $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$. Desta forma, consideremos um triângulo ABC, tal que $AB = 6$ e $AC = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$.

Seja P o ponto do segmento AC, tal que $AP = \frac{1}{3}$ e $PC = \frac{1}{2}$. Seja D o ponto do segmento AB, tal que $PD || BC$. Temos

$$\frac{6}{AD} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{5}{2} \qquad \frac{6}{DB} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{3}$$

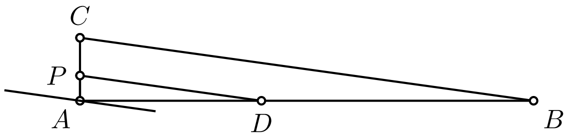


Figura 3.21: $AP = \frac{1}{3}$, $PC = \frac{1}{2}$, $AD = 2,4$ e $DB = 3,6$.

Resolvendo as proporções, temos: $AD = 2,4$ e $DB = 3,6$. Logo, as partes procuradas são $2,4$ e $3,6$.

Exercício 3.40. *Use o Teorema de Thales para responder às seguintes questões.*

1. Divida 20 em partes diretamente proporcionais a 2, 3, 4 e 5.

2. Divida 15 em partes inversamente proporcionais a 3, 4 e 5.

Questão 3.41. *Como dividir 23 em duas partes, tais que $\frac{2}{5}$ de uma parte corresponda a $\frac{3}{4}$ da outra?*

Resposta: Queremos encontrar valores x e y, tais que $x+y = 23$ e $x \times \frac{2}{5} = y \times \frac{3}{4}$. Ou, equivalentemente, valores x e y, tais que $x + y = 23$ e $\frac{x}{y} = \frac{5}{2} \times \frac{3}{4}$.

Devemos ter

$$\begin{cases} x + y & = & 23 \\ 8x & = & 15y \end{cases}$$

Multiplicando $x+y = 23$ por 8, temos $8x+8y = 184$. Substituindo $8x$ por $15y$, devemos ter $15y + 3y = 184$. Ou seja, $23y = 184$. Logo, $y = 8$ e $x = 15$. □

A questão 3.41 nos leva à seguinte definição.

Definição 3.42 (Razões diretamente e inversamente proporcionais). *Uma razão $\frac{x}{y}$ é dita ser diretamente proporcional a $\frac{a}{b}$ e inversamente proporcional a $\frac{c}{d}$ se ocorre a proporção $\frac{x}{y} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$.* **Neste caso, dizemos que x e y são diretamente proporcionais a a e b e inversamente proporcionais a c e d.**

Exercício 3.43.

1. Divida 20 em partes diretamente proporcionais a 2 e 3 e inversamente proporcionais a 4 e 5.

2. Divida 15 em partes inversamente proporcionais a 3, 4 e 5.

3. Um carro percorre 140 km com um litro de gasolina. Quantos quilometros conseguirá percorrer com 9 litros.

4. Uma pousada oferece um desconto de 10% para pessoas que fiquem hospedadas por 3 ou mais dias. Se a diária custa R\$ $75,00$, qual o total obtido em desconto, por quem fica 4 dias?

5. Uma máquina de fazer gelo consegue produzir 32 kg em 6 horas, quantas horas serão precisas para produzir 800 kg.

6. Um produtor de tomate afirma que a cada 2 kg produzidos, 200 g estragam durante o transporte. O supermercado, para o qual ele fornece, paga R\$1,80 por quilograma, pagando apenas pelo tomate não estragado. Se o produtor recebeu R\$ $3600,00$ quantos quilos de tomate ele enviou para o supermercado?

7. Um agricultor gasta 10 kg de sementes para semear uma área de 2800 m^2. Mantendo a mesma proporção, quantos m^2 poderá semear com 12 kg?

O que é uma grandeza?

Uma grandeza é um valor ou medida associada a um objeto matemático. São exemplos de grandezas: comprimento, altura, área, volume, custo, preço, velocidade, tempo, quantidade, capacidade de armazenamento de informação (byte,MB, GB). Duas grandezas podem ser dependentes uma da outra. Por exemplo, a velocidade com que um carro percorre uma distância d depende do tempo que o carro levou para percorrê-la, assim como, o tempo a ser gasto depende da velocidade e da distância. Se fixarmos uma distância, sabemos que quanto maior for a velocidade do carro, menor será o tempo preciso para percorrê-la. Neste caso, as grandezas velocidade e tempo são **grandezas inversamente proporcionais**: *o aumento do valor de uma acarreta na redução do valor da outra.* Por outro lado, se fixamos o valor de um dos lados de um retângulo, a área depende da altura e quanto maior for a altura, maior será área do retângulo obtido. Neste caso, área e altura são **grandezas diretamentes proporcionais**: *o aumento do valor de uma, acarreta o aumento do valor da outra.*

3.4.2 Regra de três simples e composta

Considere um paralelepípedo de largura x, comprimento y e altura z. Sabemos que o volume do paralelepípedo é igual à área da base vezes a altura. Logo, o volume depende das dimensões x, y e z. Vamos escrever $\vartheta(P) = f(x, y, z)$ para expressar esta dependência (lê-se: $\vartheta(P)$ **é função de** x, y **e** z). Se fixarmos duas das dimensões, percebemos que o volume é diretamente proporcional a cada uma das dimensões.

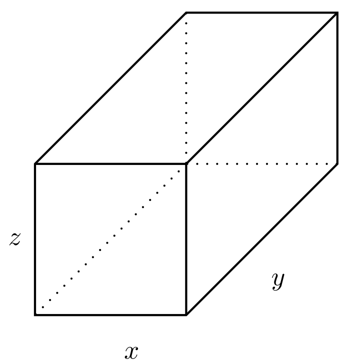


Figura 3.22: Paralelepípedo de largura x, comprimento y e altura z.

Vejamos outro exemplo: a velocidade de um automóvel depende da distância e do tempo. Vamos escrever $\vartheta = f(d, t)$ para expressar esta dependência. Se fixarmos a distância, quanto maior for o tempo, menor será a velocidade desenvolvida pelo automóvel. Se fixarmos o tempo, quanto maior for a distância, maior será a velocidade. Nosso interesse é calcular a expressão da função que relaciona grandezas direta e inversamente proporcionais.

Definição 3.44. *Sejam x, a, b grandezas dependentes e seja $f(a, b)$ a função que expressa a dependência de x com respeito às demais grandezas. Dizemos que x é diretamente proporcional à grandeza a (respectivamente b) se* *ao fixarmos b temos* $x = a \times f(1,b)$ *(respectivamente, ao fixarmos a temos* $x = b \times f(a,1)$*). Dizemos que x é inversamente proporcional à grandeza a (respectivamente b) se ao fixarmos b temos* $x = \frac{1}{a} \times f(1,b)$ *(respectivamente, ao fixarmos a temos* $x = \frac{1}{b} \times f(a,1)$*).*

A Definição para o caso com mais uma ou mais grandeza é análoga.

Observação 7. *As notações* $f(a,1)$ *e* $f(1,b)$ *denotam, respectivamente, a relação obtida quando* $b = 1$ *e quando* $a = 1$.

Uma função pode ser diretamente proporcional a uma das variáveis e inversamente proporcional à outra. Quando a dependência de x em função das outras grandezas é diretamente ou inversamente proporcional, então a função que expressa esta relação fica completamente determinada se conhecemos o valor que assume quando as outras grandezas têm valor conhecido.

De fato, se $x = f(a,b)$ e x é diretamente proporcional a a e inversamente proporcional a b, então temos $x = \frac{a}{b} \times f(1,1)$. Note que $f(1,1)$ representa o valor obtido quando $a = b = 1$.

Exemplo 3.45. *Uma torneira semi-aberta tem uma vazão de 6 litros d'água por hora. Quantos litros esta torneira irá deixar vazar, se permanecer semi-aberta durante 10 horas?*

Resposta: Todos nós sabemos resolver este problema. Mas vejamos como ele pode ser entendido usando as definições acima. A quantidade de água que vaza depende do tempo que a torneira fica aberta. Seja q a quantidade e t o tempo. Temos

$$q = f(t).$$

Como a vazão é diretamente proporcional ao tempo, devemos ter $q = t \times f(1)$. Como em uma hora vazam 6 litros, temos $f(1) = 6$. Logo,

$$q = 6 \times t.$$

Portanto, para $t = 10$ teremos $q = 60$ litros. □

Exemplo 3.46. *Vejamos como podemos calcular a fórmula para o volume de um paralelepípedo. Temos* $\vartheta(P) = f(x,y,z)$*. Como o volume é diretamente proporcional a x y e z temos:*

$$\vartheta(P) = x \times y \times z \times f(1,1,1).$$

Como um paralelepípedo, de lados iguais a 1, tem volume igual a uma unidade, temos $f(1,1,1) = 1$. Logo,

$$\vartheta(P) = x \times y \times z.$$

Exemplo 3.47. *10 homens, trabalhando 6 horas por dia, constroem um muro de 100 m^2 em 8 dias. Em quantos dias estes 10 homens construirão um muro de 200 m^2, se trabalharem 8 horas por dia no mesmo ritmo?*

Resposta: A quantidade d de dias depende da quantidade p de homens, da área a do muro e das horas h trabalhadas por dia. Logo, podemos escrever

$$d = f(p, h, a).$$

Sabemos que $8 = f(10, 6, 100)$. Por outro lado, d é inversamente proporcional a p, pois quanto mais homens trabalharem, menor será a quantidade de dias necessários para construir o mesmo muro. A grandeza d é inversamente proporcional ao número de horas trabalhadas, pois quanto mais horas trabalharem, menor a quantidade de dias necessários para construir o mesmo muro, e d é diretamente proporcional à área do muro. Logo,

$$d = \frac{1}{p} \times \frac{1}{h} \times a \times f(1,1,1).$$

Portanto, para $p = 10, \quad h = 6, \quad a = 100$ e $d = 8$ temos:

$$8 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{6} \times 100 \times f(1,1,1).$$

Logo, $f(1,1,1) = \frac{24}{5}$. Conseqüentemente, temos

$$d = \frac{1}{p} \times \frac{1}{h} \times a \times \frac{24}{5}.$$

Em particular, para $p = 10, h = 8$ e $a = 200$ temos:

$$d = \frac{1}{10} \times \frac{1}{8} \times 200 \times \frac{24}{5} = 12.$$

O número de dias necessários será igual a 12. □

Exercício 3.48. *Para cada caso a seguir, encontre a função que expressa a dependência entre as grandezas e responda o que for pedido.*

1. Se 10 kg de feijão custam R\$ $2,20$, quanto custarão 13 kg?

2. Uma quantia de R$20.000,00 foi emprestada a uma taxa de 5% ao mês. Se os juros pagos no final do empréstimo foram R$1.800,00, quantos meses durou o empréstimo?

3. Dez robôs idênticos, trabalhando 10 horas por dia, durante 30 dias, conseguem produzir 3000 peças de carro. Quantas peças serão produzidas por 15 robôs, iguais aos 10 primeiros, se trabalharem 12 horas por dia, durante 32 dias, mantendo a mesma velocidade de produção?

4. Uma empresa distribui, igualmente entre seus funcionários, um certo percentual do seu lucro anual . Em 2005, se fosse distribuido 15% do lucro entre os 1000 funcionários, cada funcionário receberia R\$ $900,00$. Quanto receberia cada funcionário, se a empresa distribuísse 12% do mesmo lucro anual e o número de funcionários aumentasse para 1200?

Capítulo 4

Números irracionais

No capítulo anterior, vimos que cada dízima corresponde a um número racional e vice-versa, todo número racional é uma dízima (simples ou periódica). Além disto, é possível representar, ordenadamente, os números racionais como pontos de uma reta. Mais ainda, a um número racional positivo $\frac{a}{b}$ corresponde a distância medida entre o ponto que representa o zero e o ponto que representa $\frac{a}{b}$. Enquanto que, ao seu oposto aditivo, $\frac{-a}{b}$ corresponde o ponto em posição simétrica com respeito ao zero, conforme representado na figura abaixo:

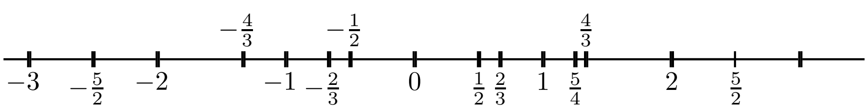


Figura 4.1: Representação de números racionais na reta

Surge então a seguinte pergunta.

Questão 4.1. *O comprimento de um segmento de reta é sempre um número racional?*

Resposta: NÃO! O comprimento de um segmento **não** é sempre um número racional. Existem segmentos cujos comprimentos não podem ser expressos como um número racional. Vejamos o exemplo a seguir.

4.1 Quanto mede isto?

Exemplo 4.2. *Considere o retângulo* $ACFD$ *e os pontos* B *e* E*, tais que* $AB = AD = BC = 1$*,* $BE||AD$ *e* $AE = BF = x$*. Os triângulos* ADE*,* ABE*,* BCF *e* BEF *são triângulos retângulos congruentes.*

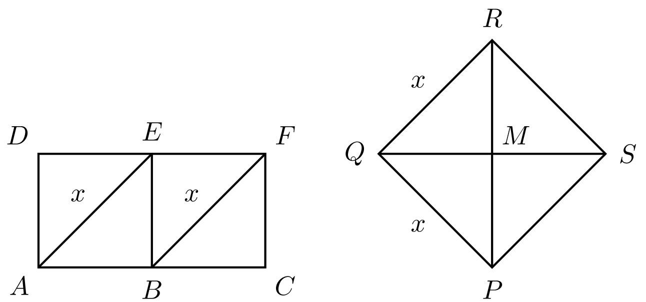


Figura 4.2: $AB = AD = BC = 1$, $AE = BF = x$, $x^2 = 2$, e $PQ = QR = x$.

Podemos construir um quadrado $PQRS$*, cujas diagonais se intersectam no ponto* M*, de forma que os triângulos retângulos*

$$ADE, \quad ABE, \quad BCF, \quad BEF, \quad PMQ, \quad PMS, \quad QMR, \quad e \quad SMR$$

são congruentes e, além disto, $PQ = QR = x$*.*

Por outro lado, o retângulo $ACFD$ *tem área 2 e o quadrado* $PQRS$ *tem área* x^2*. Logo, o quadrado do comprimento do segmento* AE *é igual a 2. Como não existe número racional cujo quadrado é 2, concluímos que* $x = \sqrt{2}$ **não é um número racional.** $\square$

Propriedade 4.3 ($\sqrt{2}$ não é racional). *Se* p *e* q *são números naturais diferentes de zero então* $(\frac{p}{q})^2 \neq 2$*.*

Demonstração. De fato, como todo número racional não-nulo pode ser escrito na forma $\frac{p}{q}$, com $MDC(p,q) = 1$, podemos supor que $MDC(p,q) = 1$.

Suponha que $\frac{p}{q} \times \frac{p}{q} = 2$. Neste caso, deveríamos ter $p^2 = 2q^2$. Como 2 é um número primo, isto nos levaria a concluir que p é um múltiplo de 2. Assim, poderíamos escrever $p = 2x$, para algum x natural e diferente de zero. Portanto, teríamos $p^2 = 4x^2 = 2q^2$. Ou seja, $q^2 = 2x^2$ e, conseqüentemente, q seria um múltiplo de 2. O que nos leva a um absurdo, pois isto significa que existiria um número natural y, tal que $2y = MDC(p,q) = 1$. Logo, se p e q são números naturais diferentes de zero, então $(\frac{p}{q})^2 \neq 2$. □

4.2 O que é um número irracional?

Um número irracional é um número decimal

$$a + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3} + \cdots + \frac{\alpha_n}{10^n} + \cdots \qquad \text{(veja definição 3.27)}$$

que **não é uma dízima periódica.** Ou seja, um número decimal que não pode ser escrito como uma fração $\frac{x}{y}$ em que x é um número inteiro e y um número natural.

Definição 4.4. *O conjunto dos números reais é o conjunto formado por todos os números decimais. Ou seja, é o conjunto dos números que correspondem a comprimentos de segmentos de reta, dos seus opostos aditivos e do zero. Um número real pode ser racional ou irracional.*

Um número irracional que corresponde ao comprimento de um segmento de reta, iniciando no ponto zero, é dito ser um irracional positivo. O seu oposto aditivo corresponde ao ponto da reta obtido de forma que o zero seja o ponto médio do segmento, e é dito ser um irracional negativo. De forma análoga, definimos o que é um número racional positivo e o que é um número racional negativo.

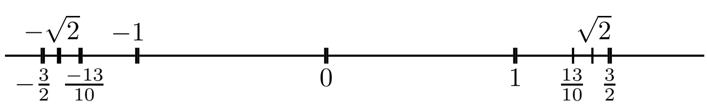


Figura 4.3: Representação na reta de $\sqrt{2}$ e seu oposto aditivo $-\sqrt{2}$.

No exemplo 4.2, vimos que $\sqrt{2}$ corresponde ao comprimento de um segmento de reta e não é um número racional. De fato, $\sqrt{2}$ é um número irracional. $\sqrt{2}$ não é uma dízima periódica, pois não é racional, e seu valor aproximado, com 30 casas decimais, é 1.4142135623730950488016887242097.

Outro exemplo de número irracional é o número π. O número irracional π corresponde à metade do comprimento de uma circunferência de raio igual a 1. Um valor, aproximado para π, é
$3,14159265358979323846264 33$.

Os números $\sqrt[n]{p}$ (raiz n-ésima de um número primo p) também são irracionais: $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{5}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[6]{3}$, entre outros.

4.3 Aritmética dos Números irracionais

Vimos que a soma e produto de números racionais sempre resulta em um número racional. Tal propriedade não é verdadeira para números irracionais. Por exemplo, $\sqrt{2}$ e $1-\sqrt{2}$ são números irracionais, mas $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$ e $1-\sqrt{2}+\sqrt{2}=1$ são números racionais. A soma e produto de dois números decimais ainda é um número decimal, de forma que podemos somar e multiplicar números irracionais. Podemos entender o que significa somar dois números reais, apelando para a representação na reta e usando a noção de translação, como a seguir.

Definição 4.5 (Soma de números reais). *Sejam ω e ϑ números reais. Sejam OW e OV os segmentos de reta determinados, respectivamente, por ω e ϑ.*

1. *Se ω e ϑ são ambos positivos, então a soma $\omega+\vartheta$ corresponde ao ponto S à direita de W, tal que $WS = OV$.*

2. *Se ambos são negativos, então a soma $\omega+\vartheta$ é o simétrico da soma dos opostos aditivos de ω e ϑ.*

3. *Se um deles é negativo, digamos $\omega < 0$, e o outro é positivo, então a soma $\omega+\vartheta$ corresponde ao ponto S à esquerda de V, tal que $SV = OW$*

4.3.1 Representando o produto de irracionais

A soma e produto de números reais têm as mesmas propriedades que a soma e produto dos números racionais (veja propriedades 3.13 e 3.15). A

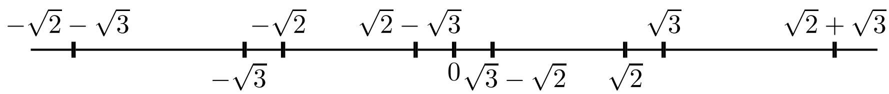


Figura 4.4: Representação na reta da soma de irracionais.

representação do produto de dois números reais pode ser feita utilizando o Teorema de Thales. Em particular, podemos utilizá-lo também para determinar o inverso de um número real. Ilustraremos no exemplo 4.6 como determinar o inverso de um número real positivo, assim como, o produto de dois números reais positivos, no exemplo 4.7. (Para os casos envolvendo números negativos, podemos considerar o oposto de cada número negativo e aplicar o método, obtendo assim o oposto do inverso ou do produto).

4.3.2 Qual o inverso de $\sqrt{2}$?

De um modo geral, para encontrar o inverso de um número real positivo x, procedemos da seguinte forma:

- Traçamos uma reta ℓ e marcamos o ponto O, correspondente ao zero, e depois os pontos A e B correspondentes, respectivamente, a 1 e x.
- Traçamos, pelo ponto O, uma reta s perpendicular à reta ℓ e marcamos o ponto P correspondente a 1.
- Traçamos o segmento PB e a reta paralela a PB que passa por A e marcamos o ponto de interseção com s. Chamemos este ponto de I.
- Temos que OI é o inverso de x.

Observação 8. Observe que se $0 < x < 1$**, então** $1 < \frac{1}{x}$**, enquanto que, se** $1 < x$**, então** $0 < \frac{1}{x} < 1$.

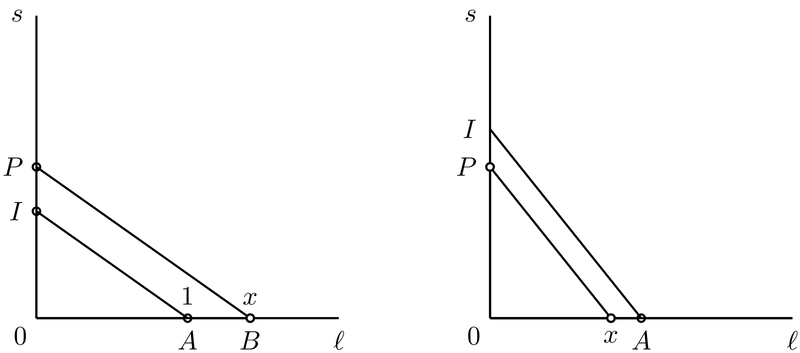


Figura 4.5: Representação do inverso de x : $OP = OA = 1$ e $OI = \frac{1}{x}$.

Exemplo 4.6. *Sabemos, pela propriedade de razão, que o inverso de* $\sqrt{2}$ *é* $\frac{\sqrt{2}}{2}$*. A figura 4.6 mostra a representação na reta do inverso de* $\sqrt{2}$*, obtido como descrito no parágrafo acima.*

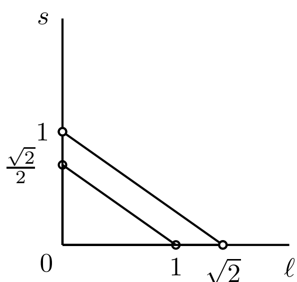


Figura 4.6: Representação na reta de $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

De forma análoga ao que foi feito para representar o inverso de um número real, podemos representar na reta o produto de dois números reais positivos.

4.3.3 Qual o produto de $\sqrt{2}$ por $\sqrt{3}$?

De um modo geral, para encontrar o produto de dois números reais positivos x e y, procedemos da seguinte forma:

- Traçamos uma reta ℓ e marcamos o ponto O, correspondente ao zero, e depois os pontos A e B correspondentes, respectivamente, a 1 e y.
- Traçamos, pelo ponto O, uma reta s perpendicular à reta ℓ e marcamos o ponto C correspondente a x.
- Traçamos o segmento CA e a reta paralela a CA que passa por y e marcamos o ponto de interseção com s. Chamemos este ponto de P.
- Temos que OP é o produto de x por y.

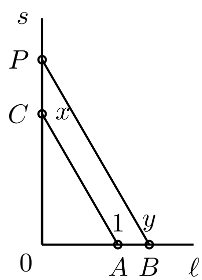


Figura 4.7: Representação do produto de números reais: $OA = 1$, $OB = y$, $OC = x$ e $OP = xy$.

Exemplo 4.7. *Sabemos que* $\sqrt{2}$ *e* $\sqrt{3}$ *são os números reais positivos cujos quadrados são, respectivamente, 2 e 3. Desta forma* $(\sqrt{2} \times \sqrt{3})^2 = 2 \times 3 = 6$*. Logo,* $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$*. Na figura 4.8 representamos* $\sqrt{6}$*, utilizando a mesma notação do método descrito acima, onde:*

$$OA = 1, \qquad OB = \sqrt{2}, \qquad OC = \sqrt{3} \quad e \qquad OP = \sqrt{6}.$$

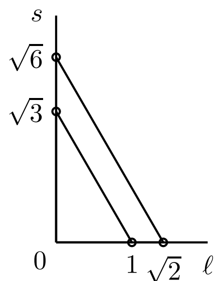


Figura 4.8: Representação de $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$.

Existem frações de irracionais?

Resposta: Sim. Podemos construir frações cujos numeradores e os denominadores são números irracionais. A necessidade de considerar frações desta natureza surge naturalmente com a necessidade de comparar números reais.

Exemplo 4.8. *Na figura 4.9, a razão entre a área do círculo e a área do quadrado é igual a* $\frac{\pi}{4}$*.*

De fato, suponha que o círculo tenha raio de comprimento r*. Neste caso, os lados do quadrado têm comprimento* $2r$*. A área de um círculo de raio* r *é igual a* πr^2 *e a área do quadrado será* $4r^2$*. Logo, a razão (divisão) entre os números reais* πr^2 *e* $4r^2$ *é igual a* $\frac{\pi r^2}{4r^2} = \frac{\pi}{4}$*.*

De um modo geral, se ϑ é um número real positivo, entendemos uma razão $\frac{\omega}{\vartheta}$ entre os números reais ω e ϑ, como sendo o número real que multiplicado por ϑ resulta em ω. As regras para soma, produto, subtração, divisão e comparação de frações de números reais são iguais às regras para números racionais.

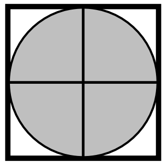


Figura 4.9: A área cinza representa $\frac{\pi}{4}$ da área do quadrado

Exercício 4.9. *Encontre para cada razão abaixo, uma razão equivalente que tenha como denominador um número natural positivo.*

1. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$
2. $\frac{-1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$
3. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

Quantos irracionais existem ?

Existem infinitos números irracionais. Para ser mais exato, se r é um número racional e ω é irracional, então $r + \omega$ é irracional.

Propriedade 4.10. *Se r é um número racional e ω é irracional, então $r + \omega$ é irracional.*

Demonstração. Suponha que $r = \frac{a}{b}$ seja racional e que $\omega + r$ fosse racional. Digamos $\omega + \frac{a}{b} = \frac{x}{y}$ em que $\frac{x}{y}$ é um número racional. Neste caso, nós teríamos $\omega = \frac{x}{y} - \frac{a}{b}$. Uma vez que a subtração de números racionais é um número racional, $\omega = \frac{x}{y} - \frac{a}{b}$, nos levaria a concluir que ω é racional. Um absurdo! Logo, se r é um número racional e ω é irracional, então $r + \omega$ é irracional. □

Uma conseqüência da propriedade acima, é que podemos construir uma infinidade de números irracionais. Para isto basta ,por exemplo, considerar as somas $n + \sqrt{2}$ com $n \in \mathbb{N}$.

$$\sqrt{2}\,, \quad 1 + \sqrt{2}, \quad 2 + \sqrt{2}, \quad 3 + \sqrt{2}, \ldots, n + \sqrt{2}, \ldots$$

Exemplo 4.11 (Para N2 e N3). *O logaritmo de 2 na base 10 é um número irracional.*

De fato, se $\log 2$ *fosse racional, teríamos* $\log 2 = \frac{a}{b}$*, em que* $a \in \mathbb{Z}$ *e* $b \in \mathbb{N} - \{0\}$*. Desta forma, teríamos* $2 = 10^{\frac{a}{b}}$*. Elevando ambos os lados da igualdade a* b *teríamos:* $2^b = 10^a = 2^a 5^a$*. Como* b *é um número natural, diferente de zero,* 2^b *é um número natural maior que 1. Por outro lado, a igualdade* $2^b = 2^a 5^a$ *nos diz que* 5 *divide* 2^b*. Um absurdo, pois os divisores de* 2^b *são potências de 2. Logo,* $\log 2$ *não pode ser racional (lembre-se que* $\log 2$ *é um número real) e portanto é irracional.*

Exercício 4.12. *Mostre que os seguintes números reais são irracionais.*

1. $\sqrt{3}$
2. $\sqrt{5}$
3. $\sqrt{6}$ (**Dica: Veja a demonstração de que** $\sqrt{2}$ **não é racional.**)
4. $\log 3$ (**Dica: Veja a demonstração de que** $\log 2$ **não é racional.**)
5. $\log 21$
6. $\log 5$

Podemos construir outros exemplos de números irracionais por meio da radiciação de números naturais.

Definição 4.13 (Radiciação). *Dados um número natural* n *e um racional* $\frac{a}{b}$*, a raiz* n*-ésima de* $\frac{a}{b}$ *é o número real não-negativo* y*, tal que* $y^n = x$*. Neste caso, escrevemos* $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ *em lugar de* y*.*

A raiz n-ésima de um racional pode ser um número racional, mas também pode ser irracional. Por exemplo, temos que:

1. $\sqrt[3]{8} = 2$ pois $2^3 = 8$.
2. $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ pois $\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(\sqrt{2})^2}{2^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
3. $\sqrt[4]{5}$ não é um número racional.

   De fato, se $\sqrt[4]{5}$ fosse racional, deveríamos ter $(\sqrt[4]{5}) = \frac{a}{b}$ em que $MDC(a,b) = 1$. Portanto, $5 = (\frac{a}{b})^4 = \frac{a^4}{b^4}$. Ou seja, $5b^4 = a^4$ e, conseqüentemente, como

5 é número primo e a^4 e b^4 são números inteiros, temos que 5 divide a^4 e portanto divide a. Logo, existe um inteiro u tal que $a = 5u$. Substituindo a^4 por $(5u)^4$, teremos $5^4u^4 = 5b^4$. Dividindo por 5, teremos $5^3u^4 = b^4$ e portanto, pelo mesmo raciocínio, 5 divide b. O que los leva a concluir que $MDC(a, b)$ é um múltiplo inteiro de 5. Um absurdo pois, $MDC(a, b) = 1$.

Exercício 4.14. *Mostre que os números abaixo são irracionais:*

1. $\sqrt[3]{2}$
2. $\sqrt[5]{2}$

A estratégia utilizada acima, para mostrar que $\sqrt[4]{5}$ é irracional, pode ser generalizada se respondermos à seguinte questão.

Questão 4.15. *Dado um número racional não-nulo $\frac{a}{b}$, em sua forma irredutível, e um natural positivo n, quais são os racionais x, tais que $x^n = \frac{a}{b}$?*

Resposta: A expressão $x^n = \frac{a}{b}$ é equivalente à expressão $bx^n = a$. Suponha que um racional irredutível $\frac{c}{d}$ satisfaça à condição. Teremos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{c}{d}\right)^n &= \frac{a}{b} \\ \frac{c^n}{d^n} &= \frac{a}{b} \\ bc^n &= ad^n \end{aligned}$$

Logo, temos que c divide ad^n e d divide bc^n. Uma vez que $MDC(c, d) = 1$ temos, obrigatoriamente, que $MDC(c, d^n) = MDC(c^n, d) = 1$. Portanto concluímos que c divide a e d divide b. Ou seja, se existirem números racionais, tais que $x^n = \frac{a}{b}$, então devem ser frações cujos numeradores são divisores inteiros de a e os denominadores são divisores inteiros de b. □

Exemplo 4.16. *Vejamos os casos a seguir.*

1. *Não existem números racionais $x \in \mathbb{Q}$, tais que $x^2 = 5$. De fato, $5 = \frac{5}{1}$, os divisores inteiros de 5 são $\{-5, -1, 1, 5\}$ e os divisores inteiros de 1 são $\{-1, 1\}$. De acordo com a questão 4.15, os candidatos a satisfazerem a condição são $\{\frac{-5}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{5}{1}\}$ e nenhum deles satisfaz a condição $x^2 = 5$. Logo, não existem números racionais $x \in \mathbb{Q}$, tais que $x^2 = 5$. (conclusão: como $(\sqrt{5})^2 = 5$ temos que $\sqrt{5}$ é irracional.)*

2. $\sqrt{6}$ *é irracional. De fato, não existem racionais x tais que $x^2 = 6$. Pois, os divisores inteiros de 6 são $\{-6, -3, -2, 1, 2, 3, 6\}$ e nenhum deles satisfaz a condição $x^2 = 6$. Concluímos que $\sqrt{6}$ é irracional, pois $(\sqrt{6})^2 = 6$.*

3. $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ *é irracional. De fato, se $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ fosse racional, digamos $r = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ então, elevando ao quadrado, teríamos*

$$r^2 = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2}\,\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3$$

Portanto,

$$r^2 - 5 = 2\sqrt{6}$$

ou seja,

$$\frac{r^2 - 5}{2} = \sqrt{6}. \qquad \textit{ÊPA!!!!}$$

Se $r = \frac{a}{b}$ for racional ($a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{N} - \{0\}$) , então $\frac{r^2-5}{2} = \frac{(\frac{a}{b})^2-5}{2} = \frac{a^2-5b^2}{2b^2}$ é um número racional. Logo, não pode ser igual a $\sqrt{6}$. Portanto, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ não é racional.

Exercício 4.17. *Mostre que os números reais a seguir são irracionais:*

1. $\sqrt{15}$

2. $\sqrt{3} + \sqrt{5}$

3. $\frac{1}{\sqrt{5}}$

Exercício 4.18. *Seja ω um número irracional e seja r um número racional não-nulo. Mostre que os números a seguir são irracionais:*

1. $r \times \omega$

2. $\frac{\omega}{r}$

3. $-\omega$

4. $\frac{1}{\omega}$

4.3.4 Aproximando um número irracional por um número racional

Dado um número irracional ω e um número natural $n \geq 1$, sempre podemos encontrar um número racional $\frac{x}{y}$, tal que

$$0 < \omega - \frac{x}{y} < \frac{1}{10^n}\,.$$

De fato, temos

$$\omega = a + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3} + \cdots + \frac{\alpha_n}{10^n} + \cdots\,, \quad \text{em que } a \in \mathbb{Z} \text{ e } \alpha_1, \alpha_2, \ldots \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$$

Considere

$$\frac{x}{y} = a + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3} + \cdots + \frac{\alpha_n}{10^n}.$$

Neste caso, temos

$$\omega - \frac{x}{y} = \frac{\alpha_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{\alpha_{n+2}}{10^{n+2}} + \frac{\alpha_{n+3}}{10^{n+3}} + \cdots + \frac{\alpha_{n+r}}{10^{n+r}} + \cdots < \frac{1}{10^n}\,.$$

pois, multiplicando $\frac{\alpha_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{\alpha_{n+2}}{10^{n+2}} + \frac{\alpha_{n+3}}{10^{n+3}} + \cdots + \frac{\alpha_{n+r}}{10^{n+r}} + \cdots$ por 10^n, temos

$$\frac{\alpha_{n+1}}{10^1} + \frac{\alpha_{n+2}}{10^2} + \frac{\alpha_{n+3}}{10^3} + \cdots + \frac{\alpha_{n+r}}{10^r} + \cdots = 0, \alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\alpha_{n+3}\ldots < 1$$

□

Observação 9. *De forma análoga ao que foi feito acima, dado um número irracional ω e um número natural $n \geq 1$, sempre podemos encontrar um número racional $\frac{c}{d}$, tal que*

$$0 < \frac{c}{d} - \omega \; < \frac{1}{10^n}\,.$$

Para isto, basta observar que $\frac{c}{d} = a + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3} + \cdots + \frac{1+\alpha_{n+1}}{10^{n+1}} > \omega$. De fato,

$$10^{n+1} \times \left(\omega - \frac{c}{d}\right) = -1 + \frac{\alpha_{n+2}}{10^1} + \frac{\alpha_{n+3}}{10^2} + \cdots + \frac{\alpha_{n+r}}{10^{r-1}} > -1.$$

Logo, $\frac{c}{d} - \omega < \frac{1}{10^{n+1}} < \frac{1}{10^n}$.

Exemplo 4.19. *Sabendo-se que uma aproximação para* $\sqrt{2}$ *com 9 casas decimais corretas é dada por* 1.414213562 *temos:*

$$
\begin{array}{lcl}
\sqrt{2} - \frac{14}{10} & < & \frac{1}{10} \\
\sqrt{2} - \frac{141}{100} & < & \frac{1}{10^2} \\
\sqrt{2} - \frac{1414}{1000} & < & \frac{1}{10^3} \\
\sqrt{2} - \frac{14142}{10000} & < & \frac{1}{10^4} \\
\sqrt{2} - \frac{141421}{10000} & < & \frac{1}{10^5}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
\frac{15}{10} - \sqrt{2} & < & \frac{1}{10} \\
\frac{142}{100} - \sqrt{2} & < & \frac{1}{10^2} \\
\frac{1415}{1000} - \sqrt{2} & < & \frac{1}{10^3} \\
\frac{14143}{10000} - \sqrt{2} & < & \frac{1}{10^4} \\
\frac{141422}{100000} - \sqrt{2} & < & \frac{1}{10^5}
\end{array}
$$

4.3.5 Calculando aproximações para $\sqrt{b}$

No exemplo 4.19 afirmamos que uma aproximação para $\sqrt{2}$ com 9 casas decimais corretas é dada por 1.414213562. Se queremos uma aproximação com poucas casas decimais corretas (duas ou três!), podemos encontrá-la da seguinte forma:

- Identificamos o maior inteiro positivo cujo quadrado é menor ou igual a dois. Neste caso, 1.

- Como $1^2 < 2$, testamos o número decimal $1,1$. Neste caso, temos $(1 + \frac{1}{10})^2 = 1^2 + \frac{2}{10} + \frac{1}{100} = \frac{121}{100} = 1,21$.

- Como $1,21 < 2$, podemos aumentar o valor da primeira casa decimal e testamos $1,2$. Neste caso, temos $(1,2)^2 = 1,44$.

- Para $1,5$ já obtivemos que $(1,5)^2 = 2,25$ e este valor é maior que dois. Sendo assim, temos que $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$. Logo, a aproximação deve ter a primeira casa decimal igual a 4.

- Passamos então para a segunda casa decimal e repetimos o processo: $(1,41)^2 = 1,9881$ e $(1,42)^2 = 2,0164$. Neste caso, obtemos $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$.

- Podemos repetir o processo até obter a aproximação com o número de casas decimais corretas desejadas.

Como podemos encontrar uma aproximação melhor sem ter que fazer tantas contas? (sem o uso de calculadora!!!!)

Vamos analisar o caso geral:

Se x é um número real maior que zero e n é um número racional positivo que está "próximo" de x (escreve-se $n \approx x$), então $x + n$ está "próximo" de $2n$. Logo, multiplicando por $x - n$ concluímos que:

$$x^2 - n^2 = (x+n)(x-n) \approx 2n(x-n).$$

Dividindo por $2n$, obtemos que

$$\frac{x^2 - n^2}{2n} + n \approx x.$$

O argumento acima nos permite calcular raízes aproximadas. Por exemplo, para calcular uma aproximação para $\sqrt{2}$ procedemos da seguinte forma. Substituindo, x por $\sqrt{2}$ e n por 1, temos que: $\sqrt{2} \approx \frac{(\sqrt{2})^2 - 1^2}{2} + 1 = \frac{3}{2}$. Desta forma, obtemos uma segunda aproximação para $\sqrt{2}$.

Repetindo o argumento, usando $n = \frac{3}{2}$ obtemos:

$$\sqrt{2} \approx \frac{(\sqrt{2})^2 - (\frac{3}{2})^2}{2 \times \frac{3}{2}} + \frac{3}{2} = \frac{2 - (\frac{9}{4})}{3} + \frac{3}{2} = \frac{-1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{2} = \frac{17}{12}.$$

Observe que $\frac{17}{12} = 1.41\overline{6}$.

Repetindo novamente com a nova aproximação, isto é, fazendo $n = \frac{17}{12}$ temos

$$\sqrt{2} \approx \frac{(\sqrt{2})^2 - (\frac{17}{12})^2}{2 \times \frac{17}{12}} + \frac{17}{12} = \frac{577}{408} = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{2}{10000} + \frac{64}{4080000}.$$

Se quiser uma aproximação ainda melhor, repita o passo com $n = \frac{577}{408}$.

Exercício 4.20. *Encontre uma aproximação para os irracionais abaixo, usando a expressão* $\frac{x^2 - n^2}{2n} + n \approx x$*:*

1. $\sqrt{3}$

2. $\sqrt{5}$

3. $\sqrt{6}$

4. $\frac{\sqrt{7}}{2}$

4.3.6 Nosso amigo Dedekind

Muito embora os matemáticos já utilizassem a noção de números inteiros e racionais desde a antiguidade (200 AC) e a existência dos números irracionais fosse naturalmente sugerida pela geometria, como vimos no exemplo 4.2, foi somente por volta de 1888 que o alemão Julius Wilhelm Richard Dedekind formalizou a noção de números inteiros, números racionais e números irracionais.

Dedekind nasceu em 6 de outubro de 1831, na cidade de Braunschweig e faleceu, na sua cidade natal, em 12 de fevereiro de 1916. Dedekind era o mais novo dos quatro filhos de Julius Levin Ulrich Dedekind, professor de Direito, que nasceu em Braunschweig (Brunswick) em 6 de outubro de 1831. Dos sete até os dezesseis anos, Dedekind estudou no ginásio de sua cidade e não demonstrava qualquer evidência de seu gênio matemático. Gostava inicialmente de Química e Física, passando a interessar-se por Matemática por volta dos dezessete anos. Ingressou na Universidade de Göttingen em 1850 com a idade de dezenove anos. Recebeu o título de doutor em Matemática em 1852, aos 21 anos de idade. Em 1872 conheceu o matemático George Cantor, que lhe apresentou o trabalho sobre a construção dos números reais. Influenciado por Cantor, Dedekind escreveu em 1888 o livro **“ O que são e para que servem os números”**, no qual apresenta a construção formal dos números inteiros, dos racionais e dos números irracionais. Alguns anos mais tarde, George Cantor apresentou outra construção do conjunto dos números reais (união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais). Neste trabalho ele mostra que um segmento de reta tem como comprimento um número racional ou um número irracional e, além disto, mostra que **entre dois números reais distintos, sempre existe um número racional.**

4.3.7 Irracional tão pequeno ou tão grande quanto se queira

Vimos anteriormente que, fixando um ponto de referência sobre uma reta (ponto zero), a cada número real positivo ω podemos fazer corresponder um ponto P sobre a reta, de forma que a distância ao ponto zero seja exatamente o valor do número ω. Além disto, vimos que para cada número natural n o número $n+\sqrt{2}$ é irracional. Desta forma, quanto maior for o valor de n, mais distante do zero estará o ponto que representa $n+\sqrt{2}$. Portanto, podemos concluir que existem números irracionais tão grandes quanto se queira. Por outro lado, resta saber se podem existir números irracionais, cuja representação na reta seja um segmento tão pequeno quanto se queira.

Questão 4.21. *Existe um número irracional positivo menor que $\frac{1}{10^5}$? Ou ainda, se n for um número natural diferente de zero, existe algum irracional positivo menor do que $\frac{1}{10^n}$?.*

Resposta: Sim. Existe uma infinidade de números irracionais positivos tão pequenos quanto se queira. Sabemos que $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e que multiplicar um número racional por um irracional sempre resulta em um número irracional. Logo, $\frac{1}{10^n} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2 \times 10^n}$ é irracional. Vamos mostrar que este número irracional é menor do que $\frac{1}{10^n}$. Como $\sqrt{2} < 2$ temos que $\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$. Logo, a representação decimal de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ tem a forma a seguir:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \cdots + \frac{\alpha_m}{10^m} + \cdots, \qquad \text{em que } \alpha_1, \alpha_2, \ldots \in \{0, 1, ..., 9\}.$$

Multiplicando por $\frac{1}{10^n}$ temos:

$$\frac{\sqrt{2}}{2 \times 10^n} = 0 + \frac{\alpha_1}{10^{n+1}} + \frac{\alpha_2}{10^{n+2}} + \cdots + \frac{\alpha_m}{10^{m+n}} + \cdots < \frac{1}{10^n}.$$

Ou seja, a fração correspondente a $\frac{1}{10^n}$ do segmento cujo comprimento é $\frac{\sqrt{2}}{2}$ é menor do que a correspondente fração da unidade. De um modo geral, se ω é um irracional positivo, o número $\frac{\omega}{10^n}$ também é um número irracional e sua distância ao ponto zero é 10^n vezes menor do que ω. Portanto, podemos concluir que existe uma infinidade de números irracionais tão pequenos quanto se queira pois, quanto maior o valor de n menor será o número $\frac{\omega}{10^n}$.

4.3.8 Irracionais algébricos e transcendentes

Um número real x é dito um número algébrico, se existe um número natural n e n números racionais $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, tais que $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$.

Se $b \in \mathbb{N}$ é um número natural que não é um quadrado perfeito, então os números da forma $\sqrt{b}$ são números irracionais algébricos. Em geral, pode-se mostrar que **se b é um número natural maior do que zero, os números reais x que satisfazem à condição $x^n = b$ ou são números inteiros ou são irracionais.**

Questão 4.22. *Como descobrir se um número real é algébrico?*

Resposta: Provar que um número real é um número algébrico pode ser extremamente simples ou extremamente complicado. Por exemplo, todo número racional é um número algébrico. De fato, se $x = \frac{c}{d}$ então considerando $n = 1$ e $a_0 = -\frac{c}{d}$ temos que $x + a_0 = 0$. Por outro lado, podemos precisar de argumentos mais sofisticados para provar que um número irracional é algébrico.

Exemplo 4.23. $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ *é um irracional algébrico.*

De fato, escrevamos $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Elevando ao quadrado temos, $x^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3$. Isto é, $\frac{x^2-5}{2} = \sqrt{6}$. Elevando novamente ao quadrado, temos $\left(\frac{x^2-5}{2}\right)^2 = 6$. Ou seja, $x^4 - 10x^2 + 25 = 24$. Portanto, $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$. Logo, concluímos que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é algébrico.

Exercício 4.24. *Mostre que os números a seguir são algébricos:*

1. $1 + \sqrt{2}$
2. $3\sqrt[3]{4}$
3. $\sqrt{3} - \sqrt{5}$
4. $\frac{1}{\sqrt{2}}$
5. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

O irracional $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é a constante áurea

Um número real que não é algébrico é dito ser um número real transcendente.

São exemplos de números transcendentes : π e seus múltiplos racionais.

Outro exemplo é a constante de Liouville $\alpha = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^{24}} + \frac{1}{10^{120}} + \cdots + \frac{1}{10^{n!}} + \cdots$

Capítulo 5

Frações contínuas

Um tema interessante ligado aos números racionais e irracionais é o das **frações contínuas**. Vamos começar pelos números racionais.

5.1 Frações contínuas e números racionais

1. Simplifique as expressões:

   (a) (Resolvido)

   $$1 + \frac{1}{1} = 2$$

   (b) (Resolvido)

   $$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

   (c) (Resolvido - Usando o item anterior)

   $$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}} = 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

   Agora você:

(d) (Usando o item anterior)

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}=$$

(e) (Usando o item anterior)

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}}=$$

2. Você consegue perceber a regra de formação das frações do item anterior?

   Uma pista: procure o material complementar de divisibilidade, logo no princípio.

3. Simplifique as expressões

   (a)

$$1+\frac{1}{2}=$$

   (b)

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}=$$

   (c)

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}}=$$

4. Essas frações são chamadas **frações contínuas** e temos uma forma compacta de simbolizar:

   (a)
   $$1 + \frac{1}{2} = [1, 2]$$

   (b)
   $$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}} = [1, 2, 3]$$

   (c)
   $$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4}}} = [1, 2, 3, 4]$$

   (d)
   $$[1, 1, 1, 1, 1] = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}}$$

5. Construa a fração contínua e simplifique:

   (a) $[1, 3, 2] =$
   (b) $[1, 3] =$
   (c) $[1, 4, 2, 3] =$
   (d) $[1, 4, 2] =$
   (e) $[1, 4] =$

6. Vamos agora fazer o caminho inverso. Como transformar uma fração irredutível numa fração contínua?

(a) (Exemplo)

$$\frac{17}{5} = 3 + \frac{2}{5} = 3 + \frac{1}{\frac{5}{2}} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}$$

Bem, agora a última fração tem denominador 1 e já temos nossa fração contínua.

$$\frac{17}{5} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} = [3, 2, 2]$$

(b) (Outro exemplo)

$$\frac{38}{31} = 1 + \frac{7}{31} = 1 + \frac{1}{\frac{31}{7}} = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{3}{7}} = 1 + \cfrac{1}{4 + \frac{1}{\frac{7}{3}}} =$$

$$1 + \cfrac{1}{4 + \frac{1}{\frac{7}{3}}} = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}} = [1, 4, 2, 3]$$

Observe que paramos quando obtivemos uma fração com denominador 1.

Experimente você:

(c) $\frac{15}{11} =$

(d) $\frac{27}{22} =$

(e) $\frac{26}{19} =$

7. Por motivos que veremos depois, não gostaríamos que nossa seqüência terminasse pelo número 1. Isso pode ser remediado.

   Mostre que:

   (a) $[1, 4, 2, 1] = [1, 4, 3]$

Solução:

$$[1,4,2,1] = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}}} = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3}} = [1,4,3]$$

(b) $[1,3,5,1] = [1,3,6]$

(c) $[1,2,2,1] = [1,2,3]$

(d) $[1,1,1,1,1,1] = [1,1,1,1,2]$

8. Volte ao item 6. Se você prestou atenção no que fazia, reparou que as operações são equivalentes ao Algoritmo de Euclides da primeira apostila. Não é de admirar que sempre cheguemos numa fração de denominador 1. Vejamos no exemplo do item 6(a).

(a) Compare

$$\frac{17}{5} = 3 + \frac{2}{5} = 3 + \cfrac{1}{\cfrac{5}{2}} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} = [3,2,2]$$

com

Quociente		**3**	**2**	
	17	5	**2**	
Resto	2	1		

A seqüência $[3,2,2]$ aparece naturalmente, pois as operações feitas foram exatamente as mesmas do Algoritmo de Euclides.

(b) Compare

$$\frac{38}{31} = 1 + \frac{7}{31} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{31}{7}} = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{3}{7}} = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\frac{7}{3}}} =$$

$$1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\frac{7}{3}}} = 1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}} = [1,4,2,3]$$

com

Quociente		**1**	**4**	**2**
	38	31	7	**3**
Resto	7	3	1	

Verifique agora para os outros itens:

(c) $\frac{15}{11} =$

(d) $\frac{27}{22} =$

(e) $\frac{26}{19} =$

9. Ótimo! Podemos fazer o caminho inverso do Algoritmo de Euclides e nos pouparemos das contas delicadas com frações. Vejamos:

(a)

$$[1,4,3,2,2] = 1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}$$

Isso poderia ser bem chato! Mas agora podemos reconstruir o Algoritmo de Euclides correspondente. Lembre-se que são frações irredutíveis, logo o último resto (que é o mdc entre o numerador e o denominador) é sempre 1. Vejamos:

	1	4	3	2	
				2	1

$$2\times 2+1=5$$

	1	4	3	2	
			5	2	1

$$3 \times 5 + 2 = 17$$

	1	4	3	2	
		17	5	2	1

$$4 \times 17 + 5 = 73$$

	1	4	3	2	
	73	17	5	2	1

$$1 \times 73 + 17 = 90$$

	1	4	3	2	
90	73	17	5	2	1

A fração procurada é:

$$[1,4,3,2,2] = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}} = \frac{90}{73}$$

(b) Um exemplo mais simples:

$$[1,3,2,5] = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5}}}$$

Usando nosso método:

	1	3	2	
			5	1

	1	3	2	
		11	5	1

	1	3	2	
	38	11	5	1

	1	3	2	
49	38	11	5	1

$$[1,3,2,5] = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5}}} = \frac{49}{38}$$

Agora vocês.

Qual a fração reduzida que corresponde a:

(c) $[1,2,3,2]$

(d) $[1,4,3,7]$

(e) $[1,1,1,2]$

10. ATENÇÃO: Se a representação terminar em 1, usamos o exercício 7.

(a) Exemplo: $[1,1,1,1,1,1] = [1,1,1,1,2]$

	1	1	1	1	
13	8	5	3	2	1

$[1,1,1,1,1,1] = [1,1,1,1,2] = \frac{13}{8}$

Agora vocês:

(b) $[2,1,3,1] =$

(c) $[1,1,2,1] =$

(d) $[4,5,1,1] =$

11. Observe que podemos usar o Algoritmo de Euclides para produzir a fração contínua. Nosso trabalho ficou decididamente mais fácil.

(a) Construir a fração contínua correspondente a $\frac{17}{5}$.

Quociente		**3**	**2**	
	17	5	**2**	
Resto	2	1		

O que nos dá:

$$\frac{17}{5} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} = [3, 2, 2]$$

Agora vocês. Construir a fraçaõ contínua correspondente a:

(b) $\frac{42}{17} =$

(c) $\frac{18}{7} =$

(d) $\frac{12}{5} =$

(e) $\frac{55}{34} =$

12. Vamos usar uma propriedade interessante das frações contínuas para resolver equações diofantinas (vide material complementar de divisibilidade).

(a) Exemplo: Vamos comparar $[1, 3, 2]$ com $[1, 3]$.

$$[1, 3, 2] = \frac{9}{7}$$

$$[1, 3] = \frac{4}{3}$$

Lembre-se que para comparar as frações teríamos de igualar os denominadores, etc .... Mas também, podemos compará-las multiplicando o numerador de uma pelo denominador de outra.

$3 \times 9 = 27$ e $4 \times 7 = 28$

A diferença é 1. Lembre-se que uma das etapas da resolução de equações diofantinas exigia que se encontrasse uma maneira de "produzir"o valor 1, a partir de dois números primos entre si. Bem, está feito; para produzir o número 1, a partir de 7 e 9, fazemos:

$$3 \times 9 - 4 \times 7 = 1$$

Será coincidência?

(b) Comparemos $[1, 3, 2, 5]$ com $[1, 3, 2]$

$$[1, 3, 2] = \frac{9}{7}$$
$$[1, 3, 2, 5] = \frac{49}{38}$$

$$49 \times 7 - 38 \times 9 = 1$$

Funciona! Não provaremos esse fato, que é uma conseqüência dos algoritmos que estamos utilizando. Mas você pode testar.

A seguir, alguns exemplos, mas você pode inventar os seus.

Compare:

(c) $[1, 2]$ com $[1, 2, 4]$

(d) $[1, 2, 4]$ com $[1, 2, 4, 5]$

(e) $[1, 2, 4]$ com $[1, 2, 4, 3]$

(f) $[1, 2, 4]$ com $[1, 2, 4, 2]$

13. Encontre dois números inteiros a e b tais que

$$a \cdot 25 + b \cdot 17 = 1$$

Observe que isso só será possível pois o $mdc(17, 25) = 1$.

$$\frac{25}{17}$$

	1	**2**	
25	17	**8**	
	8	1	

O que nos dá:

$$\frac{25}{17} = [1, 2, 8] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{8}}$$

Basta agora calcular: $[1, 2] = \frac{3}{2}$.

Pronto:

$3 \times 17 = 51$ e $2 \times 25 = 502$

$a = -2$ e $b = 3$.

Dados x e y encontre números inteiros a e b tais que $a \cdot x + b \cdot y = 1$

(a) $x = 6$ e $y = 35$

(b) $x = 13$ e $y = 8$

(c) $x = 55$ e $y = 21$

(d) $x = 34$ e $y = 13$

5.2 Frações contínuas e números irracionais

Vamos agora tentar expressar números irracionais como frações contínuas. Já sabemos que isso não será possível de forma finita usando só números racionais. Teremos que recorrer a frações contínuas de representação infinita.

(a) Mostre que $\sqrt{2} = 1 + \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$

Solução: Observe que:

$$(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}-1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1} \Leftrightarrow \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

(b) Mostre que

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1+\sqrt{2}}}$$

Sugestão: Use o item anterior e substitua $\sqrt{2}$ do lado direito por $1 + \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$.

(c) Mostre que

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1+\sqrt{2}}}}$$

14. Pela lei de formação desta fração contínua, percebemos que, desprezando a última fração, podemos ir aproximando $\sqrt{2}$ por

$$[1,2] = \frac{3}{2}$$

$$[1,2,2] = \frac{7}{5}$$

$$[1,2,2,2] = \frac{17}{12}$$

$$[1,2,2,2,2] = \frac{29}{17}$$

Construa as frações e, usando uma máquina de calcular, verifique que efetivamente vamos nos aproximando de $\sqrt{2}$.

15. Não é sempre simples encontrar a representação em forma de fração contínua de um numero irracional. Mas todos os chamados números algébricos, isto é, que são solução de uma equação polinomial de coeficientes racionais, têm uma representação periódica como função contínua infinita.

Podemos usar a notação:

$$\sqrt{2} = [1,2,2,\ldots] = [1,\bar{2}]$$

O leitor interessado pode encontrar um método geral no artigo "Um processo finito para a raiz quadrada"de José Paulo Q. Carneiro na Revista do Professor de Matemática, número 34, página 36.

Um fato interessante é que os números que não são quadrados perfeitos (isto é, não são quadrados de números inteiros) não têm representação decimal finita, nem podem ser representados por uma fração. Mas, em se tratando de frações contínuas, isso é sempre possível, embora possa ser por vezes um pouco complicado.

Exemplos:

$\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, \ldots] = [1, \overline{2}]$

$\sqrt{3} = [1, 1, 2, 1, 2, \ldots] = [1, \overline{1, 2}]$

$\sqrt{5} = [2, 4, 4, 4, \ldots] = [2, \overline{4}]$

$\sqrt{6} = [2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, \ldots] = [2, \overline{2, 4}]$

$\sqrt{7} = [2, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, \ldots] = [2, \overline{1, 1, 1, 4}]$

$\sqrt{8} = [2, 1, 4, 1, 4, \ldots] = [2, \overline{1, 4}]$

$\sqrt{10} = [3, 6, 6, 6, \ldots] = [3, \overline{6}]$

$\sqrt{31} = [5, 1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10, \ldots] = [5, \overline{1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10}]$

Aparentemente, alguns são mais simples do que outros.

No caso dos quadrados perfeitos $+1$, a representação é bem mais simplificada. Já vimos o exemplo de $\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, \ldots] = [1, \overline{2}]$. Vamos examinar $\sqrt{5}$.

16. Mostre que $\sqrt{5} = 2 + \dfrac{1}{2 + \sqrt{5}}$.

Solução: Observe que:

$$(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{5} - 2 = \frac{1}{\sqrt{5} + 2} \Leftrightarrow \sqrt{5} = 2 + \frac{1}{2 + \sqrt{5}}.$$

Deixamos ao leitor prosseguir da mesma forma como fizemos com $\sqrt{2}$.

De forma análoga, chegamos ao resultado:

$\sqrt{5} = [2, 4, 4, 4, \ldots] = [2, \overline{4}]$.

17. Mostre que $\sqrt{c^2 + 1} = c + \dfrac{1}{c + \sqrt{c^2 + 1}}$.

Sugestão: Adapte o item anterior com c no lugar do 2 e $c^2 + 1$ no lugar do 5.

Chegue à conclusão que:

$\sqrt{c^2 + 1} = [c, 2 \cdot c, 2 \cdot c, 2 \cdot c, \ldots] = [c, \overline{2 \cdot c}]$.

Encontre a representação de

(a) $\sqrt{17} =$

(b) $\sqrt{50} =$

(c) $\sqrt{626} =$

(d) $\sqrt{190097} =$

(e) $\sqrt{101} =$

18. Podemos aproximar $\sqrt{3}$ por

$$[1,1] = 2$$

$$[1,1,2] =$$

$$[1,1,2,1] =$$

$$[1,1,2,1,2] =$$

$$[1,1,2,1,2,1] =$$

Construa as frações e, usando uma máquina de calcular, verifique que efetivamente vamos nos aproximando de $\sqrt{2}$.

19. Voltando ao início.

Nossa primeira atividade foi calcular os valores de:

$$[1,1] = 1 + \frac{1}{1} = 2$$

$$[1,1,1] = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$[1,1,1,1] = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}} = 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

$$[1,1,1,1,1] = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}} = \frac{8}{5}$$

$$[1,1,1,1,1,1] = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}}} = \frac{13}{8}$$

A esta altura você deveria ter desconfiado. As frações expressam as relações entre números consecutivos da série de Fibonacci:

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

Podemos escrever os números apresentados sob a forma periódica:

$$[1, 1, 1, 1, \ldots] = [1, \overline{1}].$$

Mas que número está sendo aproximado por esta série?

Tentemos usar a mesma idéia que usamos para $\sqrt{2}$:

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}$$

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}}$$

Essas equações mostram que a substituição de x, a partir da primeira equação, resulta na seqüência periódica:

$$x = [1, 1, 1, 1, \ldots]$$

Usando a primeira equação obtemos:

$$x = 1 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

A raiz positiva é $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que é um dos números mais estudados da Matemática. Este é o número φ, a **razão áurea**.

Mostramos (sem demonstrar) assim que a razão entre membros sucessivos da série de Fibonacci aproxima-se da razão áurea.

20. Apenas como informação, é sabido que todos os números admitem uma representação por frações contínuas, mas nem sempre elas serão periódicas. Dois exemplos são o número π e o número e.

$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, 3, 13, 1, 4, 2, \ldots$

$e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, 1, 12, 1, 1, 14, 1, 1, 16, 1, 1, 18, 1, 1, 20, 1, \ldots].$

Apêndice A

Problemas interessantes

A.1 O problema dos 35 camelos

Este problema aparece no livro "O Homem que calculava"de Malba Tahan, mas certamente já existia antes disso. O livro acompanha as aventuras matemáticas de Beremiz Samir e um amigo (o narrador).

Em certo episódio, eles encontram 3 irmãos que disputam uma herança de 35 camelos. O pai havia deixado um testamento, especificando que: o filho mais velho deveria receber a metade dos camelos, o filho do meio deveria receber um terço dos camelos e o caçula faria jus a um nono dos camelos.

A discussão estava acesa, pois não havia meio de se entenderem. O mais velho deveria receber 17 camelos e meio! O filho do meio deveria receber 11 camelos e mais 2/3 de camelo! E o mais novo receberia 3 camelos e mais 8/9 de camelo .... Enfim, todos percebiam que não dava certo, mas ninguém queria abrir mão da sua "parte"de camelo.

A surpreendente solução de Beremiz é oferecer um camelo aos herdeiros! Com isso, o número de camelos passa a ser 36, que é múltiplo de 2, de 3 e de 9. O mais velho ficará com 18 camelos, o do meio com 12 camelos e o caçula com 4.

Mas o melhor é que, depois da divisão, sobram 2 camelos! O camelo oferecido por Beremiz é recuperado e ele ainda ganha um, como pagamento pela sua solução.

Pergunta: Como é possível que todos saiam ganhando mais do que ganhariam antes?

A.2 Hércules e a tartaruga

Hércules era um grande atleta da Grécia antiga. Um dia encontrou uma tartaruga, que descansava embaixo de uma árvore a 100 metros de onde ele se encontrava.

Hércules gritou: "Boa tarde, tartaruga, como vai?". Mas a tartaruga não respondeu.

Hércules pensou: "Deve ser surda". Ele se aproximou, cautelosamente, caminhando 50 metros, a metade do caminho. E gritou outra vez: "Boa tarde, tartaruga, como vai?". Mas a tartaruga, nada.

Já um pouco aborrecido, Hércules caminhou mais 25 metros, a metade do caminho restante. E a tartaruga, nem te ligo. Hércules continuou se aproximando, sempre andando metade do caminho.

- Pergunta 1: Depois de quantas etapas Hércules alcançará a tartaruga?
- Pergunta 2: Depois de quantas etapas Hércules estará a menos de 10 metros da tartaruga?
- Pergunta 3: Depois de quantas etapas Hércules estará a menos de 1 metro da tartaruga?
- Pergunta 4: Por que a tartaruga não respondeu?

A.3 João e Maria

João e Maria moram a 27 km de distância um do outro. Eles querem se encontrar mas fizeram uma combinação esquisita. Eles vão caminhando por etapas. Em cada etapa eles andam 1/3 do caminho restante. Assim, na primeira etapa eles andam 9 km cada um, ficando a 9 km de distância. Na segunda etapa ... bem, vocês já entenderam.

- Pergunta 1: Depois de quantas etapas eles se encontram?
- Pergunta 2: Depois de quantas etapas eles estarão a menos de 270 metros?
- Pergunta 3: Depois de quantas etapas eles estarão a menos de 27 metros?
- Pergunta 4: Por que nos livros de Matemática as pessoas fazem combinações tão estranhas?

A.4 O π dos egípcios

Os egípcios utilizavam a fração 22/7 como aproximação de π.

- Pergunta 1: Você acha que é uma boa aproximação?
- Pergunta 2: Como você avaliaria o erro produzido por esta aproximação?

A.5 Aproximando a raiz quadrada de 2

Um aproximação decimal de $\sqrt{2}$ é $1,41421356$ mas, em geral, não necessitamos de tanta precisão.

- Pergunta 1: Que fração você utilizaria para aproximar $\sqrt{2}$, usando numerador e denominador com um algarismo?
- Pergunta 2: Como você avaliaria o erro produzido por esta aproximação?

A.6 Aproximando a $\sqrt[3]{9}$

- Pergunta 1: Que fração você utilizaria para aproximar $\sqrt[3]{9}$, usando numerador e denominador com três algarismos?
- Pergunta 2: Como você avaliaria o erro produzido por esta aproximação?

A.7 Divisão de frações

Uma operação que gera sempre alguma dificuldade é a divisão de frações. Em que situações ela é encontrada? Vejamos alguns exemplos.

- Um trabalhador constrói 1/2 km de estrada por dia. A estrada deverá ter 1 e 3/4 km. Em quantos dias o trabalhador construirá a estrada?
- Um agricultor trabalha 1 e 3/4 alqueires de terra em 1/2 mês. Quanta terra ele trabalhará em 1 mês?
- Tenho uma peça de 1 e 3/4 m e quero fazer aventais, usando 1/2 m para cada um. Quanto aventais posso produzir?

Todas estas histórias levam à mesma operação:

$$1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$$

No problema dos aventais obteríamos:

$$1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{7}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{7}{4} \times \frac{2}{1} = \frac{7}{2} = 3,5$$

Claro que não fabricarei 1/2 avental! A resposta será inteira: 3 aventais.

1. Invente um problema que leve à operação:

$$2\frac{1}{3} \div \frac{5}{6}$$

2. Transformando o divisor na unidade - outra maneira de executar a divisão seria:

$$1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{7}{4} \div \frac{1}{2}$$

Multiplicando as duas frações por $\frac{2}{1}$ (o inverso de $\frac{1}{2}$):

$$\frac{14}{4} \div \frac{2}{2} = \frac{14}{4} \div 1 = \frac{7}{2}$$

Deu certo. Foi coincidência ou vai funcionar sempre?

3. Experimente o método acima com:

$$2\frac{3}{5} \div \frac{2}{7}$$

Observação 10. *A notação $a\frac{c}{d}$, comumente chamada de número misto, é uma forma simplificada para escrever a soma $a + \frac{c}{d}$ ou, equivalentemente, a fração $\frac{ad+c}{d}$. Assim,*

$$3\frac{4}{5} = 3 + \frac{4}{5} = \frac{15+4}{5} = \frac{19}{5}.$$

Apêndice B

Para saber mais

B.1 Livro recomendado

Números - Uma introdução à Matemática; Millies, Cesar Polcino e Coelho, Sonia Pitta, EDUSP, 2000.

B.2 Artigos recomendados

Para saber mais você pode consultar os artigos da Revista do Professor de Matemática, editada pela SBM - o número da revista onde o artigo pode ser encontrado está assinalado.

Sobre critérios de divisibilidade – Carmem M. G. Taboas – N.06

Sobre o processo de divisão de inteiros – Jaime M. Cardoso – N.08

Restos, congruência e divisibilidade – Luiz R. Dante – N.10

Outros critérios de divisibilidade – Mário G. P. Guedes – N.12

Um método para o cálculo do mdc e do mmc – Roberto R. Paterlini – N.13

A prova dos noves – Flávio W. Rodrigues – N.14

Divisores, múltiplos e decomposição em fatores primos – Paulo Argolo – N.20

Congruência, divisibilidade e adivinhações – Benedito T. V. Freire – N.22

Uma interpretação geométrica do mdc – Zelci C. de Oliveira – N.29

A escolha do goleiro e o resto de uma divisão – Cláudio Arconcher – N.30

Dispositivo prático para expressar o MDC de dois números como combinação linear deles – José P. Q. Carneiro – N.37

$2 \times 3 = 0$? – Cristina Ochoviet – N.41

Divisibilidade por 7 – Arnaldo Umbelino Jr. – N.43

A prova dos onze – Eric C.B. Guedes – N.44

Os primos esquecidos – Chico Nery e Cláudio Possani – N.47

Uma demonstração de Euclides – Arthur Almeida – N.49

Um exemplo de situação problema: O problema do bilhar – Marcelo Câmara dos Santos – N.50

Um resultado recente: um algoritmo rápido para detectar números primos – Ricardo Bianconi – N.50

B.3 Respostas de exercícios selecionados do Capítulo 3

3.26 3. Converta todas as dízimas em fração e depois realize as operações aritméticas indicadas.

3.28

1. $\frac{1}{8} = 0 + \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000}$
2. Já está na forma decimal.
3. $-1 + \frac{8}{10} + \frac{7}{100} + \frac{5}{1000}$ (lembre-se que $-\frac{1}{8} = -1 + \frac{7}{8}$).
4. $2 + \frac{3}{10} + \frac{5}{100}$
5. $-1 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \cdots$
6. $-2 + \frac{6}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \cdots$

3.29

1. Tanto o centésimo quanto o quintocentésimo primeiro são iguais a zero.
2. O centésimo é 1 e o quintocentésimo primeiro é 3.
3. Tanto o centésimo quanto o quintocentésimo primeiro são iguais a zero.
4. Tanto o centésimo quanto o quintocentésimo primeiro são iguais a 6.
5. O centésimo é 5 e o quintocentésimo primeiro é 1.
6. O centésimo é 3 e o quintocentésimo primeiro é 5.

3.30

1. Temos $ad = bc$ e $(a+c) \times d = ad + dc$.
   Logo, $(a+c) \times d = ad + dc = bc + dc = (b+d) \times c$.
2. Para todo natural n, diferente de zero, temos $\frac{1}{5} = \frac{n}{5n}$. Logo, usando o item anterior, temos que a resposta é $\frac{1}{5}$.
3. De forma análoga ao anterior, temos que a resposta é $\frac{2}{3}$.
4. Temos $\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d} = \frac{x}{y}$. Logo, $\frac{x}{y} = \frac{a+c+x}{b+d+y}$.
5. Temos $\frac{a}{b} = \frac{b+(a+b)+a}{(a-c)+c+b} = \frac{2a+2b}{a+b} = 2$.
6. Lembre-se que dados dois naturais positivos $x < y$, existe um único natural n tal que $nx \leq y < (n+1)x$. Logo, dividindo por x e tomando os inversos, temos: $\frac{1}{n+1} < \frac{x}{y} \leq \frac{1}{n}$.
7. Reduza $\frac{1}{n}$ e $\frac{nx-y}{ny}$ a um mesmo denominador ny e depois some as frações.
8. Observe que $0 < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)} < 1$. Logo, pelo item anterior, $0 \leq \frac{x}{y} - \frac{1}{n} < 1$, ou seja, $0 \leq nx - y < ny$.
9. Use os itens 6 e 7. Temos $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{3\times 2-5}{15} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$ e $\frac{4}{3} = \frac{1}{3} + 1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.
10. Suponha $0 < z \leq y \leq x$. Neste caso, $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{z}$. Como a soma dos três é igual a 1, o maior deles deve ser maior ou igual a $\frac{1}{3}$. Ou seja, $\frac{1}{z} \geq \frac{1}{3}$. Logo, $z \in \{1, 2, 3\}$.
    Vamos analisar os três casos:
    - z não pode ser 1, pois isto exigiria que x ou y fosse negativo.

- Se $z = 2$ então $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ e assim o maior deles será maior ou igual a $\frac{1}{4}$. Logo, $\frac{1}{y} \geq \frac{1}{4}$ ou seja $y \in \{1, 2, 3, 4\}$. Verificando estes valores com a equação $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$, vemos que os valores possíveis são $y = 3$ e $x = 6$ ou $y = 4$ e $x = 4$. Logo, podemos ter $z = 2$, $y = 3$ e $x = 6$ ou $z = 2$, $y = 4$ e $x = 4$.
- Se $z = 3$ então $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3}$. Assim, $\frac{1}{y} \geq \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, ou seja, $y \in \{1, 2, 3\}$. Verificando estes valores com a equação $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3}$, vemos que os valores possíveis são $y = 2$ e $x = 6$ ou $y = 3$ e $x = 3$. Logo, podemos ter $z = 3$, $y = 2$ e $x = 6$ ou $z = 3$, $y = 3$ e $x = 3$. Logo, a resposta é: $z = 2$, $y = 3$ e $x = 6$ ou $z = 2$, $y = 4$ e $x = 4$. ou $z = 3$, $y = 2$ e $x = 6$ ou $z = 3$, $y = 3$ e $x = 3$.

11. Verdadeiro.
    Veja a resposta na revista Eureka02 no site abaixo:
    http://www.obm.org.br/eureka/eureka2.pdf

Bibliografia

[1] Carvalho, Paulo C. P., & outros, *A Matemática do Ensino Médio*, Coleção do Professor de Matemática, Vol 1, SBM, 2001.

[2] Niven, Ivan, *Números racionais e irracionais*, Coleção Fundamentos da Matemática Elementar, SBM, 1984.