Equações, Inequações e Desigualdades

Adán J. Corcho & Krerley Oliveira

17 de novembro de 2006

Os autores

Adán Corcho: *é Licenciado em Matemática pela Univesidad de Oriente-Cuba (1994), mestre pelo IMPA (1998) e doutor em Matemática pelo IMPA (2003). Suas atividades de pesquisa concentram-se na área de Equações Diferenciais Parciais, na qual tem publicado artigos científicos. Atualmente é professor da Universidade Federal de Alagoas, onde é membro fundador do programa de Mestrado em Matemática e participa ativamente no programa da Olimpíada Alagoana de Matemática.*

Krerley Oliveira: *é bacharel em Matemática pela UFRJ (2001), mestre pelo IMPA (2001) e doutor em Matemática pelo IMPA (2002). Seus interesses de pesquisa concentram-se na área de Sistemas Dinâmicos, na qual tem publicado livros e artigos científicos. Atualmente é professor da Universidade Federal de Alagoas, onde é membro fundador do programa de Pós-graduação em Matemática. Fundou a Olimpíada Alagoana de Matemática e vem desde 2003 treinando estudantes e professores em Alagoas. Quando mais jovem, participou de Olimpíadas de Matemática, obtendo medalha de bronze na OBM e prata na Ibero-americana Universitária. Também é torcedor do Fluminense e triatleta, tendo completado dois ironmans.*

Prefácio

Estas notas abordam um tema matemático extremamente importante devido às suas aplicações em diversos problemas de ordem prática. Resolver equações e inequações é muitas vezes ensinado no colégio mediante aplicação de regras e fórmulas, sem a preocupação de ilustrar a importância de deduzi-las. Nossa proposta neste texto é discutir as técnicas envolvidas na resolução dos problemas e não somente resolvê-los mecanicamente. Uma parte importante deste trabalho consiste em entender a tradução matemática de problemas que encontramos em nosso cotidiano e que podem ser modelados mediante equações e inequações.

A apostila é dividida em 4 capítulos, contendo vários exemplos e problemas resolvidos, expostos de acordo com o grau de dificuldade. Os dois primeiros capítulos tratam sobre equações e inequações do primeiro e do segundo graus e são destinados a alunos do Ensino Fundamental (grupo 1) e do Ensino Médio (grupo 2), entretanto é importante que o professor instrutor tome o cuidado necessário para separar alguns exemplos mais complicados, que são destinados somente para o grupo 2. O capítulo 3 trata sobre desigualdades clássicas e aplicações das mesmas, sendo destinado somente ao grupo 2, assim como a maior parte do capítulo 4, que é um pouco mais avançado e aborda propriedades das equações polinomiais. Incluímos também um apêndice tratando do Teorema Fundamental da Álgebra, cuja leitura é opcional.

No final de cada capítulo são propostos vários exercícios, que recomendamos sejam todos discutidos, e cujas algumas soluções e sugestões são dadas no final do material, apesar de que não se espera que o estudante resolva todos.

Finalmente, gostaríamos de agradecer aos alunos de iniciação científica Isnaldo Isaac, Karla Barbosa e Adriano Oliveira, pela ajuda na escolha dos problemas. Agradecemos também à Marcela Oliveira pela leitura cuidadosa, que evitou muitos desprazeres dos leitores com os erros de nosso português.

Esperamos que divirtam-se e aguardamos sugestões e críticas.

Maceió, 24 de Agosto de 2006

Adán Corcho & Krerley Oliveira

Sumário

Introdução

Na antiguidade, todo conhecimento matemático era passado de geração para geração através de *receitas*. A falta de símbolos e notação adequada complicava substancialmente a vida de quem precisava usar a Matemática e de quem apreciava sua beleza. Por exemplo, o uso de letras (x, y, z, etc) para representar números desconhecidos não tinha sido inventado ainda. Isso só veio ocorrer por volta dos meados do século XVI, ou seja, a menos de 500 anos atrás.

Apesar disso, o conhecimento matemático das antigas civilizações era surpreendente. Os egípcios, babilônios, mesopotâmios, gregos e vários outros tinham conhecimentos de métodos e técnicas que são empregados hoje, como soluções de equações do primeiro e segundo graus, inteiros que são soma de quadrados e vários outros conhecimentos. Especialmente os gregos, cuja cultura matemática resistiu aos tempos com a preservação de *Os Elementos* de Euclides, tinham desenvolvido e catalizado muitos dos avanços da época.

Entretanto, todos os resultados tinham uma linguagem através dos elementos de geometria, mesmo aqueles que só envolviam propriedades sobre os números. Essa dificuldade deve-se em parte ao sistema de numeração romano, utilizado também pelos gregos, que era muito pouco prático para realizar operações matemáticas.

Por volta de 1.100, viveu na Índia Bhaskara, um dos mais importantes matemáticos de sua época. Apesar de suas contribuições terem sido muito profundas na Matemática, incluindo-se aí resultados sobre equações diofantinas, tudo indica que Bhaskara não foi o primeiro a descobrir a fórmula, que no Brasil chamamos de fórmula de Bhaskara, assim como Pitágoras não deve ter sido o primeiro a descobrir o Teorema que leva o seu nome, já que 3.000 a.C os babilônios tinham conhecimento de ternas pitagóricas de números inteiros bem grandes.

Apesar de ter conhecimento de como solucionar uma equação do segundo grau, a fórmula que Bhaskara usava não era exatamente igual a que usamos hoje em dia, sendo mais uma receita de como encontrar as raízes de uma equação. Para encontrar essas raízes, os indianos usavam a seguinte regra:

Multiplique ambos os membros da equação pelo número que vale quatro vezes o coeficiente do quadrado e some a eles um número igual ao quadrado do coeficiente original da incógnita. A solução desejada é a raiz quadrada disso.

O uso de letras para representar as quantidades desconhecidas só veio a se tornar mais popular com os árabes, que também desenvolveram um outro sistema de numeração. Destaca-se também a participação do matemático francês François Vièti, que aprimorou esse uso dos símbolos algébricos em sua obra *In artem analyticam isagoge* e desenvolveu um outro método para resolver a equação do segundo grau.

Na mesma época, um outro grande desafio estava perturbando as mentes matemáticas de toda a Europa, em especial as da Itália. A solução explicita utilizando as operações elementares (soma, subtração, multiplicação, divisão, radiciação e potenciação) da equação do terceiro grau não era conhecida e muitos dos melhores matemáticos da época trabalharam neste problema, destacando-se entre eles Nicolo Fontana, o Tartaglia (gago, em italiano). A história da solução desta equação está repleta de intrigas, disputas e acusações, envolvendo Tartaglia e Cardano. Hoje os historiadores atribuem a Tartaglia a primazia na descoberta da solução da equação do terceiro grau como conhecemos. É desta época também a solução da equação do quarto grau, atribuída a Ludovico Ferrari.

Entretanto, apesar dos muitos esforços empreendidos na direção de encontrar a solução geral da equação do quinto grau, mais de duzentos anos se passaram sem nenhum sucesso. Até que em 1824, o matemático norueguês Niels Abel mostrou que é *impossível* resolver as equações de grau cinco em sua forma geral. Ou seja, nem todas as equações de grau cinco podem ser resolvidas com as operações elementares. Mais ainda, em 1830 o matemático francês Evariste Galois descobre um método que determina quando uma equação de grau *qualquer* é resolúvel com as operações elementares, encerrando um belíssimo capítulo da história da Matemática.

Capítulo 1

Equações

Para entender algumas das coisas que tratamos nesta breve introdução, vamos começar este capítulo estudando um objeto matemático de muita importância e que aparece em situações onde a Matemática é aplicada: *os polinômios.* Reveremos um pouco das suas propriedades, estudadas no Ensino Fundamental e veremos como podemos aplicar essas propriedades para resolver e obter informações sobre algumas equações algébricas. Primeiramente, vamos relembrar o que é um polinômio:

Definição 1.1. Um *polinômio* na variável x é uma expressão do tipo $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ onde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são números. Se $a_n \neq 0$, dizemos que n é o *grau* do polinômio e $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são seus *coeficientes.* O coeficiente a_n é chamado de *coeficiente líder* do polinômio.

Observação 1.2. Não se define o grau do polinômio nulo, que tem todos os coeficientes iguais a zero.

Por exemplo,

- $p(x) = 3x - 1$ é um polinômio de grau 1;
- $q(x) = 4x^3 + 7x + 1$ é um polinômio de grau 3;

- $t(x) = \dfrac{\pi}{2}x^4$ é um monômio de grau 4;
- $v(x) = \dfrac{-\pi}{2}x^4 + 5x^2 + 1$ é um polinômio de grau 4;
- $u(x) = 7$ é um polinômio de grau 0.

Uma equação polinomial de grau n, ou simplesmente uma equação de grau n, é uma sentença $p(x) = 0$, onde $p(x)$ é um polinômio de grau n com coeficientes reais. Por exemplo, $2x - 1 = 0$ é uma equação do primeiro grau, enquanto, $-x^5 + 4x^3 + 5x - 1 = 0$ é uma equação de grau 5. Note que nem todos os coeficientes precisam ser diferentes de zero.

Para obtermos o *valor* do polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ no número real r, devemos substituir x por r para obter o número real

$$p(r) = a_n r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0.$$

Por exemplo, o valor do polinômio $p(x) = 4x^3 - 7x + 1$ em 2 é $p(2) = 4 \cdot 2^3 - 7 \cdot 2 + 1 = 19$.

Dizemos que um número real r é uma raiz para a equação

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

se o valor de $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ em r é zero, ou seja, se r verifica

$$a_n r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0.$$

Por exemplo, 5 é raiz da equação:

$$2x - 10 = 0.$$

Na seção seguinte estudaremos com detalhe a equação do primeiro grau, e como podemos utilizá-la para resolver alguns problemas em Matemática.

1.1 Equações do Primeiro Grau

Para ilustrar o tema que iremos discutir, comece pensando no seguinte problema:

Exemplo 1.3. Qual é o número cujo dobro somado com sua quinta parte é igual a 121?

Solução: Vamos utilizar uma letra qualquer, digamos a letra x, para designar esse número desconhecido. Assim, o dobro de x é $2x$ e sua quinta parte é $\frac{x}{5}$. Logo, usando as informações do enunciado, obtemos que:

$$2x + \frac{x}{5} = 121,$$

ou ainda,

$$10x + x = 605,$$

onde $11x = 605$. Resolvendo, temos que $x = 605/11 = 55$.

$\square$

Se você já teve contato com o procedimento de resolução do exemplo acima, notou que o principal ingrediente é a *equação do primeiro grau* em uma variável. Vamos começar explicando que objeto é esse. A equação do primeiro grau na variável x é uma expressão do tipo:

$$ax + b = 0,$$

onde a e b são números reais e $a \neq 0$. Por exemplo, as seguintes equações são do primeiro grau:

$$\begin{aligned} 2x - 3 &= 0 \\ -4x + 1 &= 0 \\ \frac{3}{2}x - \pi &= 0. \end{aligned}$$

Para trabalhar com equações e resolvê-las, vamos pensar no modelo da balança de dois pratos. Quando colocamos dois objetos com o mesmo peso em cada prato da balança, os pratos se equilibram. Quando os pratos estão equilibrados, podemos adicionar ou retirar a mesma quantidade de *ambos* os pratos, que ainda assim eles permanecerão equilibrados. Essa é uma das principais propriedades quando estamos trabalhando com uma equação. Em geral, para resolver uma equação, utilizamos as seguintes propriedades da igualdade entre dois números:

- Se dois números são iguais, ao adicionarmos a mesma quantidade a cada um destes números, eles ainda permanecem iguais;

  Em outras palavras, escrevendo em termos de letras, se a e b são dois números iguais, então $a+c$ é igual a $b+c$. Ou seja:

  $$a = b \Rightarrow a + c = b + c.$$

  Note que podemos tomar c um número negativo, o que significa que estamos subtraindo a mesma quantidade dos dois números. Por exemplo, se x é um número qualquer que satisfaz:

  $$5x - 3 = 6,$$

  somando-se 3 a ambos os lados da equação acima, obtemos que x deve satisfazer:

  $$(5x - 3) + 3 = 6 + 3, \text{ ou seja, } 5x = 9.$$

  Podemos ainda usar outra propriedade:

- Se dois números são iguais, ao multiplicarmos a mesma quantidade por cada um destes números, eles ainda permanecem iguais;

  Em outras palavras, escrevendo em termos de letras, se a e b são dois números iguais , então $a \cdot c$ é igual a $b \cdot c$.

$$a = b \Rightarrow ac = bc.$$

Novamente, se $5x = 9$ podemos multiplicar ambos os lados da igualdade por $1/5$ para obter:

$$x = \frac{5x}{5} = \frac{9}{5},$$

encontrando o número que satisfaz a equação $5x - 3 = 6$.

Para nos familiarizarmos um pouco mais com a linguagem das equações, vamos pensar no seguinte problema:

Exemplo 1.4. Para impressionar Pedro, Lucas propôs a seguinte brincadeira:

- Escolha um número qualquer.

- Já escolhi, disse Pedro.

- Multiplique este número por 6. A seguir, some 12. Divida o que você obteve por 3. Subtraia o dobro do número que você escolheu. O que sobrou é igual a 4!

Pedro realmente ficou impressionado com a habilidade de *Lucas*. Mas não há nada de mágico nisso. Você consegue explicar o que Lucas fez?

Solução: Na verdade, Lucas tinha conhecimento de como operar com equações. Vamos ver o que Lucas fez de perto, passo-a-passo, utilizando a linguagem das equações. Para isso, vamos chamar a quantidade que Pedro escolheu de x:

– Escolha um número:

$$x.$$

– Multiplique este número por 6:

$$6x.$$

– A seguir, some 12:

$$6x + 12.$$

– Divida o que você obteve por 3:

$$\frac{6x+12}{3} = 2x + 4.$$

– Subtraia o dobro do número que você escolheu.

$$2x + 4 - 2x = 4.$$

– O que sobrou é igual a 4!

$\square$

Observação 1.5. Devemos ter cuidado na hora de efetuar divisões em ambos os lados de uma equação, para não cometer o erro de dividir os lados de uma igualdade por zero. Por exemplo, podemos dar uma prova (obviamente) falsa de que $1 = 2$, utilizando o seguinte tipo de argumento: Sempre é verdade que

$$x + 2x = 2x + x.$$

Logo,

$$x - x = 2x - 2x$$

Colocando $(x - x)$ em evidência:

$$1(x - x) = 2(x - x)$$

Dividindo por $(x - x)$ os dois lados da igualdade acima, temos que $1 = 2$. Encontrou o erro?

Voltando para nossa equação do primeiro grau, para encontrar a solução da equação $ax + b = 0$, procedemos do seguinte modo:

- Somamos $-b$ a ambos os lados da equação, obtendo

$$ax + b + (-b) = ax = -b.$$

Note que como somamos a mesma quantidade aos dois lados da equação, ela não se alterou.

- Dividimos os dois lados da equação por $a \neq 0$. Isso também não altera a igualdade e nos dá que o valor de x é:

$$x = \frac{ax}{a} = \frac{-b}{a}.$$

Assim, a solução da equação $ax + b = 0$ é $x = \dfrac{-b}{a}$.

Vamos ver agora alguns problemas que podem ser resolvidos utilizando as equações do primeiro grau:

Exemplo 1.6. Se x representa um dígito na base 10 e a soma $x11 + 11x + 1x1 = 777$, quem é x?

Solução: Para resolver este problema, precisamos nos recordar que se abc é a escrita de um número qualquer na base 10, então esse número é igual a $10^2a + 10b + c$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} x11 &= 100x + 11 \\ 11x &= 110 + x \\ 1x1 &= 101 + 10x \end{aligned}$$

Logo, temos a seguinte equação do primeiro grau:

$$100x + 11 + 110 + x + 101 + 10x = 777 \text{ ou } 111x + 222 = 777$$

Logo,

$$x = \frac{777 - 222}{111} = 5.$$

□

Exemplo 1.7. Determine se é possível completar o preenchimento do tabuleiro abaixo com os números naturais de 1 a 9, sem repetição, de modo que a soma de qualquer linha seja igual a de qualquer coluna ou diagonal.

1		6
	9	

Solução: Primeiro, observe que a soma de todos os números naturais de 1 a 9 é 45. Assim, se denotamos por s o valor comum da soma dos elementos de uma linha, somando as três linhas do tabuleiro, temos que:

$$45 = 1 + 2 + \cdots + 9 = 3s,$$

Onde s deve ser igual a 15. Assim, chamando de x o elemento da primeira linha que falta ser preenchido,

1	x	6
	9	

temos que $1 + x + 6 = 15$. Logo, $x = 8$. Assim, observando a coluna que contém 8 e 9, temos que sua soma é maior que 15. Logo, não é possível preencher o tabuleiro de modo que todas as linhas e colunas tenham a mesma soma.

□

Os quadrados de números com estas propriedades se chamam *quadrados mágicos*. Tente fazer um quadrado mágico. Você já deve ter percebido que no centro do quadrado não podemos colocar o número 9. De fato, vamos descobrir no exemplo abaixo qual é o número que deve ser colocado no centro de um quadrado mágico.

Exemplo 1.8. Descubra os valores de x de modo que seja possível completar o preenchimento do quadrado mágico abaixo:

	x	

Solução: Para descobrir x, vamos utilizar o fato de que a soma de qualquer linha, coluna ou diagonal é igual a 15, já obtido no exemplo anterior. Se somarmos todas as linhas, colunas e diagonais que contêm x, teremos que a soma será $4 \cdot 15 = 60$, pois existem exatamente uma linha, uma coluna e duas diagonais que contêm x. Note também que cada elemento do quadrado mágico será somado exatamente uma vez, exceto x que será somado quatro vezes. Assim:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 9 + 3x = 60,$$

onde temos que

$$45 + 3x = 60, \text{ onde } x = 5.$$

$\square$

O exemplo a seguir é um fato curioso que desperta nossa atenção para como a nossa intuição às vezes é falha. Imagine que você possui um fio de cobre extremamente longo, mas tão longo, que você consegue dar a volta na Terra com este fio. Para simplificar a nossa vida e nossas contas, vamos supor que a Terra é uma bola redonda (o que não é exatamente verdade) sem nenhuma montanha ou depressão e que seu raio é de exatamente 6.378.000 metros.

O fio com seus milhões de metros está ajustado à Terra, ficando bem colado ao chão ao longo do equador. Digamos agora que você acrescente 1 metro ao fio e molde este fio de modo que ele forme um círculo enorme, cujo raio é um pouco maior que o raio da Terra e tenha o mesmo centro. Você acha que essa folga será de que tamanho?

Nossa intuição nos leva a acreditar que como aumentamos tão pouco o fio, a folga que ele vai ter será também muito pequena, digamos alguns poucos milímetros. Mas veremos que isso está completamente errado!

Utilizaremos para isso a fórmula que diz que o comprimento C de um círculo de raio r é

$$C = 2\pi r,$$

onde π (lê-se *pi*) é um número irracional que vale aproximadamente $3,1415$ (veja a observação abaixo).

De fato, o comprimento da Terra C_T calculado com essa fórmula é aproximadamente:

$$C_T = 2\pi r_T \cong 2 \times 3,1415 \times 6.378.000 = 40.072.974 \text{ metros},$$

onde r_T é o raio da Terra.

Se chamamos de x o tamanho da folga obtida em metros e r_f o raio do fio, temos que a folga será igual a $x = r_f - r_T$. Logo, basta calcular r_f. Por um lado, o comprimento do fio é igual a $C_T + 1 = 40.072.975$. Logo,

$$40.072.975 = 2\pi r_f \text{ onde } r_f = \frac{40.072.975}{2\pi}.$$

Fazendo o cálculo acima, temos que r_f é aproximadamente igual a $6.378.000,16$ metros. Assim, x é aproximadamente igual a $x = r_f - r_T = 0,16$ metros, ou seja, 16 centímetros!

Observação 1.9. Vale observar que a folga obtida aumentando o fio não depende do raio em consideração. Por exemplo, se repetíssemos esse processo envolvendo a Lua ao invés da Terra, obteríamos que ao aumentar o fio em um metro, a folga obtida seria dos mesmos 16 centímetros. Verifique isso!

Observação 1.10. De fato, podemos definir (e calcular!) o número π de várias maneiras práticas. Vamos considerar dois experimentos (que se você não conhece π deve fazer):

- Experimento 1: Pegar um cinto e fazer um círculo com ele. Calcule o comprimento do cinturão e divida pelo diâmetro do círculo obtido.

- Pegar uma tampa de um lata e medir o comprimento do círculo da tampa e dividir pelo diâmetro da tampa.

Se você efetuou os cálculos acima com capricho, você deve ter notado que o número obtido é aproximadamente o mesmo. Se nossos círculos fossem perfeitos (eles nunca são: sempre têm algumas imperfeições) obteríamos o número π. Uma aproximação para π é

$$\pi \cong 3,14159265358979323846264338327 95.$$

1.2 Sistemas de Equações do Primeiro Grau

Nesta seção iremos discutir situações onde queremos descobrir mais de uma quantidade, que se relacionam de modo linear, ou seja, através de equações do primeiro grau. Por exemplo, considere o seguinte problema:

Exemplo 1.11. João possui 14 reais e deseja gastar esse dinheiro em chocolates e sanduíches para distribuir com seus 6 amigos, de modo que cada um fique exatamente com um chocolate ou um sanduíche. Sabendo que cada chocolate custa 2 reais e cada sanduíche custa 3 reais, quantos chocolates e sanduíches João deve comprar?

Para resolver esse problema, vamos chamar de x a quantidade de chocolates que João deve comprar e y o número de sanduíches. Assim, como João deseja gastar 14 reais, temos que

$$2x + 3y = 14. \tag{1.1}$$

Como João comprará exatamente 6 guloseimas, uma para cada amigo, temos que

$$x + y = 6. \tag{1.2}$$

Note que não encontramos uma equação do primeiro grau em uma variável e sim *duas* equações do primeiro grau em *duas* variáveis. Esse é um caso particular de um sistema de equações do primeiro grau em várias variáveis.

Uma equação do primeiro grau nas variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$ é uma expressão da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0,$$

onde os números $a_1, a_2, \dots, a_n$ são diferentes de zero.

Por exemplo:

$$2x - 3y = 0$$

é uma equação do primeiro grau nas variáveis x e y

$$2a - b + \frac{c}{3} = 5$$

é uma equação do primeiro grau nas variáveis a, b e c.

Dizemos que os números $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ formam uma solução da equação, se substituindo x_1 por r_1, x_2 por r_2, …, x_n por r_n, temos que a equação acima é satisfeita, isto é, $a_1r_1+a_2r_2+\cdots+a_nr_n+b = 0$.

Por exemplo, $(3, 2)$ é uma solução da equação $2x - 3y = 0$ acima, pois

$$2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = 0.$$

Note que a ordem que apresentamos os números importa, pois $(2, 3)$ não é solução da equação $2x-3y = 0$, já que $2\cdot2-3\cdot3 = -5 \neq 0$. Do mesmo modo, $(2, 0, 3)$ é solução da equação $2a - b + \frac{c}{3} = 5$, pois

$$2 \cdot 2 - 0 + \frac{3}{3} = 5.$$

Um *sistema de equações* do primeiro grau em n variáveis x_1, $x_2, \dots, x_n$ é um conjunto de equações do primeiro grau nas variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$. Dizemos que os números $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ formam uma solução do sistema de equações, se $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ é solução para todas as equações simultaneamente.

Para encontrar soluções de um sistema de equações, procedemos do seguinte modo:

- Isolamos o valor de uma das variáveis (digamos x_1) como função das demais variáveis em uma das equações (digamos na primeira equação);
- Substituímos esse valor na segunda equação, encontrando uma equação com $n-1$ variáveis.
- Repetimos esse processo até encontrarmos uma equação do primeiro grau em uma variável.

Observação 1.12. Quando consideramos um sistema de equações do primeiro grau, podem acontecer três situações: o sistema tem uma única solução, várias soluções ou nenhuma solução.

Vamos ilustrar esse método resolvendo o sistema proposto no Exemplo 1.11:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

Isolamos o valor de uma das variáveis numa das equações. Por conveniência, é melhor isolar o valor de x na segunda equação, obtendo:

$$x = 6 - y.$$

A seguir, substituímos esse valor na outra equação, obtendo uma equação do primeiro grau. Resolvendo temos:

$$\begin{aligned} 2(6-y) + 3y &= 14 \\ 12 - 2y + 3y &= 14 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Assim, $y = 2$. Imediatamente, encontramos o valor de $x = 6 - 2 = 4$. Vamos agora resolver alguns problemas semelhantes.

O problema a seguir foi proposto na primeira fase da Olimpíada Brasileira de Matemática.

Exemplo 1.13. Passarinhos brincam em volta de uma velha árvore. Se dois passarinhos pousam em cada galho, um passarinho fica voando. Se todos os passarinhos pousam, com três em cada galho, um galho fica vazio. Quantos são os passarinhos?

Solução: Vamos chamar de p o número de passarinhos e g o número de galhos da árvore. Temos que se dois passarinhos pousam em cada galho, um passarinho fica voando, ou seja,

$$2g = p - 1.$$

Além disso, se todos os passarinhos pousam, com três em um mesmo galho, um galho fica vazio:

$$3(g - 1) = p.$$

Substituindo na equação anterior, temos que $2g = 3g - 3 - 1$, onde segue-se que $g = 4$ e $p = 9$. □

Exemplo 1.14. Quanto medem as áreas na figura abaixo, sabendo

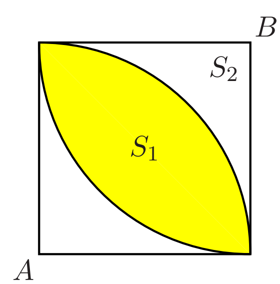


Figura 1.1:

que o quadrado tem lado 1 e as curvas são arcos de círculos com centros nos vértices A e B do quadrado, respectivamente.

Solução: Da figura temos que

$$\begin{cases} S_1 + S_2 = \frac{\pi^2}{4} \\ S_1 + 2S_2 = 1 \end{cases}$$

ou seja, chegamos a um sistema de equações do primeiro grau com duas incógnitas S_1 e S_2. Da primeira equação temos que

$$S_1 = \frac{\pi^2}{4} - S_2;$$

substituindo esta na segunda equação obtemos

$$\frac{\pi^2}{4} - S_2 + 2S_2 = 1,$$

de onde

$$\frac{\pi^2}{4} - S_2 = 1.$$

Logo,

$$S_2 = 1 - \frac{\pi^2}{4}$$

e

$$S_1 = \frac{\pi^2}{4} - \left(1 - \frac{\pi^2}{4}\right) = \frac{\pi^2}{2} - 1$$

□

Exemplo 1.15. Carlos e Cláudio são dois irmãos temperamentais que trabalham carregando e descarregando caminhões de cimento. Para Carlos e Cláudio tanto faz carregar ou descarregar o caminhão, o trabalho realizado por eles é o mesmo. Quando estão de bem, trabalham juntos e conseguem carregar um caminhão em 15 minutos. Cláudio é mais forte e trabalha mais rápido conseguindo carregar sozinho um caminhão em 20 minutos.

1. Um dia, Cláudio adoeceu e Carlos teve que carregar os caminhões sozinho. Quanto tempo ele leva para carregar cada um?

2. Quando os dois brigam, Carlos costuma se vingar descarregando o caminhão, enquanto Cláudio o carrega com sacos de cimento. Quanto tempo Cláudio levaria para carregar o caminhão com Carlos descarregando?

Solução: Vamos chamar de x a quantidade de sacos que Cláudio carrega por minuto e y a quantidade de sacos que Carlos carrega por minuto. Como Cláudio carrega mais que Carlos, sabemos que $y < x$. Do enunciado, sabemos que os dois juntos carregam um caminhão em 15 minutos. Se um caminhão tem capacidade para c sacos, temos que:

$$15x + 15y = c.$$

Além disso, sabemos que Cláudio sozinho carrega o mesmo caminhão em 20 minutos. Logo,

$$20x = c.$$

Assim, igualando as duas equações, temos que

$$15x + 15y = 20x, \quad \text{onde} \;\; 15y = 20x - 15x = 5x.$$

Logo, dividindo ambos os lados por 5, temos que $3y = x$. Assim, Cláudio carrega três vezes mais sacos que Carlos e a resposta do primeiro item é 20×3 minutos, já que $60y = 20 \times 3y = 20x = c$.

Para descobrir quanto tempo os dois levam para carregar o caminhão quando estão brigados, observamos que a cada minuto eles carregam $x - y$ sacos, ou seja, $3y - y = 2y$ sacos. Logo, precisam de 30 minutos, já que $30 \times 2y = 60y = c$. $\square$

1.3 Exercícios

1. Observe as multiplicações a seguir:

   (a) $12.345.679 \times 18 = 222.222.222$

   (b) $12.345.679 \times 27 = 333.333.333$

   (c) $12.345.679 \times 54 = 666.666.666$

   Para obter 999.999.999 devemos multiplicar 12.345.679 por quanto?

2. Outro dia ganhei 250 reais, incluindo o pagamento de horas extras. O salário (sem horas extras) excede em 200 reais o que recebi pelas horas extras. Qual é o meu salário sem horas extras?

3. Uma torneira A enche sozinha um tanque em $10\,h$, uma torneira B enche o mesmo tanque sozinha em $15\,h$. Em quantas horas as duas torneiras juntas encherão o tanque?

4. O dobro de um número, mais a sua terça parte, mais a sua quarta parte somam 31. Determine o número.

5. Uma certa importância deve ser dividida entre 10 pessoas em partes iguais. Se a partilha fosse feita somente entre 8 dessas pessoas, cada uma destas receberia R$5.000,00 a mais. Calcule a importância.

6. Roberto disse a Valéria: "pense um número, dobre esse número, some 12 ao resultado, divida o novo resultado por 2. Quanto deu?" Valéria disse "15" ao Roberto, que imediatamente revelou o número original que Valéria havia pensado. Calcule esse número.

7. Por $2/3$ de um lote de peças iguais, um comerciante pagou R$8.000,00 a mais do que pagaria pelos $2/5$ do mesmo lote. Qual o preço do lote todo?

8. Determine um número real a para que as expressões $\frac{3a+6}{8}$ e $\frac{2a+10}{6}$ sejam iguais.

9. Se você multiplicar um número real x por ele mesmo e do resultado subtrair 14, você vai obter o quíntuplo do número x. Qual é esse número?

10. Eu tenho o dobro da idade que tu tinhas quando eu tinha a tua idade. Quando tu tiveres a minha idade, a soma das nossas idades será de 45 anos. Quais são as nossas idades?

11. Um homem gastou tudo o que tinha no bolso em três lojas. Em cada uma gastou 1 real a mais do que a metade do que tinha ao entrar. Quanto o homem tinha ao entrar na primeira loja?

12. Com os algarismos x, y e z formam-se os números de dois algarismos xy e yx, cuja soma é o número de três algarismos zxz. Quanto valem x, y e z?

1.4 Equação do Segundo Grau

Como já mencionamos em nossa introdução, o conhecimento de métodos para solucionar as equações do segundo grau remontam às civilizações da antiguidade, como os babilônios e egípcios. Apesar disso, a fórmula que conhecemos por *fórmula de Bhaskara*, em homenagem ao matemático indiano de mesmo nome e que determina as soluções de uma equação do segundo grau, só veio a aparecer do modo que usamos muito mais tarde, com o francês Vièti. Nesta seção iremos deduzir esta fórmula e aplicá-la a alguns problemas interessantes.

1.4.1 Completando Quadrados

Um modo de resolver uma equação do segundo grau é o método de *completar quadrados.* Ele consiste em escrever a equação numa forma equivalente que nos permita concluir quem são as soluções diretamente. Vamos ilustrar isso com um exemplo, resolvendo a equação

$$x^2 - 6x - 8 = 0.$$

Podemos escrever essa equação como:

$$x^2 - 6x = 8.$$

Somando 9 ao lado esquerdo, obtemos $x^2 - 6x + 9$ que é o mesmo que $(x-3)^2$. Assim, somando 9 a ambos os lados da equação, obtemos:

$$(x-3)^2 = 9 + 8 = 17.$$

Logo, $x - 3 = \sqrt{17}$ ou $x - 3 = -\sqrt{17}$. Logo, as soluções são:

$$x_1 = 3 + \sqrt{17} \quad \text{e } x_2 = 3 - \sqrt{17}.$$

Na sua forma geral, a equação do segundo grau com coeficientes a, b e c é a equação:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad \text{onde} \quad a \neq 0. \tag{1.3}$$

Para encontrar as soluções desta equação, vamos proceder do seguinte modo: isolando o termo que não contém a variável x do lado direito da igualdade na equação (1.3)

$$ax^2 + bx = -c$$

e dividindo os dois lados por a, obtemos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a}.$$

Agora vamos acrescentar uma número em ambos os lados da equação acima, de modo que o lado esquerdo da igualdade seja um quadrado perfeito. Para isso, observe que é necessário adicionar $\frac{b^2}{4a^2}$ aos dois lados da igualdade. Assim, temos que:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Em geral, chamamos a expressão $b^2 - 4ac$ de *discriminante* da equação (1.3) e denotamos pela letra maiúscula Δ (lê-se *delta*) do alfabeto grego. Assim, podemos escrever a igualdade anterior como:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{\Delta}{4a^2}. \tag{1.4}$$

Por isso, para que exista algum número real satisfazendo a igualdade acima, devemos ter que $\Delta \geq 0$, já que o termo da esquerda na igualdade é maior ou igual a zero. Extraindo a raiz quadrada quando $\Delta \geq 0$, temos as soluções:

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ e } x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Assim, obtemos as duas solucões:

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

e

$$x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{4a^2} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Observe que só existem soluções reais quando $\Delta \geq 0$. Quando $\Delta > 0$ temos duas soluções diferentes e quando $\Delta = 0$ as soluções x_1 e x_2 coincidem. Caso $\Delta < 0$ soluções reais não existem.

Em resumo:

$\Delta > 0$	duas soluções reais
$\Delta = 0$	uma solução real
$\Delta < 0$	sem solução real

Vamos fazer alguns exemplos:

Exemplo 1.16. Encontre as soluções da equação $2x^2 - 4x = 0$.

Solução: Observe que $a = 2, b = -4$ e $c = 0$. Logo,

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 0 = 16.$$

Assim, as soluções são:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + \sqrt{16}}{4} = 2 \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - \sqrt{16}}{4} = 0.$$

$\square$

Exemplo 1.17. Encontre as raízes da seguinte equação do segundo grau:
$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Solução: Basta aplicarmos diretamente a fórmula que acabamos de deduzir. Como $a = 1$, $b = -1$ e $c = -1$, calculando Δ temos:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4. \cdot 1 \cdot (-1) = 5.$$

Logo, as soluções são:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

e

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

□

Observação 1.18. O número $(1+\sqrt{5})/2$ é chamado de *razão áurea*. Este número recebe essa denominação pois, freqüentemente, as proporções mais belas e que a natureza nos proporciona estão próximas da razão áurea. Por exemplo, no arranjo das pétalas de uma rosa, nas espirais que aparecem no abacaxi, na arquitetura do Parthenon, nos quadros de da Vinci e nos ancestrais de um zangão podemos encontrar a razão áurea.

O problema a seguir está relacionado com a *seqüência de Fibonacci* e com a razão áurea. Dizemos que uma seqüência de números a_n satisfaz a relação de Fibonacci se, para todo $n \geq 0$, temos que

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n. \tag{1.5}$$

Exemplo 1.19. Encontre todas as seqüências a_n da forma $a_n = x^n$ para algum $x \neq 0$ que satisfazem a relação de Fibonacci.

Solução: Sabendo que a_n satisfaz a relação de Fibonacci e que a_n é da forma x^n, podemos concluir que para todo $n \geq 0$:

$$x^{n+2} - x^{n+1} - x^n = 0.$$

Colocando x^n em evidência na equação acima, temos que:

$$x^n(x^2 - x - 1) = 0$$

Logo, temos duas possibilidades: ou x^n é zero, ou $x^2 - x - 1 = 0$. Como $x \neq 0$, temos que $x^n \neq 0$ e que $x^2 - x - 1 = 0$. Logo, observando a solução do Exemplo 1.17, temos que as únicas seqüências são:

$$a_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad \text{ou} \qquad a_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

□

Exemplo 1.20. Sabendo que x é um número real que satisfaz

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}},$$

determine os valores possíveis de x.

Solução: A solução desse problema consiste numa simples manipulação algébrica, que feita com cuidado nos levará a uma equação do segundo grau. Vejamos:

$$1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x} \Rightarrow 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1 + \frac{x}{1+x} = \frac{1+2x}{1+x}$$

Logo, nós temos que:

$$x = \frac{1+2x}{1+x} \Rightarrow x^2 + x = 1 + 2x \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0,$$

de onde segue-se que

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

□

Observação 1.21. Se a_n e b_n satisfazem a relação de Fibonacci 1.5, então dados números reais c e d, qualquer seqüência da forma $ca_n + db_n$ satisfaz a relação. Pode-se provar que as seqüências dessa forma com $a_n = x_1^n$ e $b_n = x_2^n$ calculados anteriormente, são as únicas seqüências que satisfazem a relação.

1.4.2 Relação entre Coeficientes e Raízes

Dada a equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, já calculamos explicitamente as suas raízes, x_1 e x_2. Vamos estabelecer agora as relações entre a, b e c e as raízes x_1 e x_2. Como já obtivemos, temos que:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Assim, somando x_1 com x_2:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}. \tag{1.6}$$

Por outro lado, fazendo o produto x_1x_2 temos:

$$\begin{aligned} x_1x_2 &= \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\cdot\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \\ &= \frac{\big(-b+\sqrt{\Delta}\big)\big(-b-\sqrt{\Delta}\big)}{4a^2} = \\ &= \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Em particular, quando $a = 1$, se escrevemos S para a soma $S = x_1 + x_2$ e P para o produto $P = x_1 x_2$, temos que x_1 e x_2 são raízes de

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

Exemplo 1.22. Paulo cercou uma região retangular de área 28 m^2 com 24 metros de corda. Encontre as dimensões dessa região.

Solução: Se chamamos de a e b os lados do retângulo construído por Paulo, as condições sobre o perímetro e a área desse retângulo nos levam às seguintes equações:

$$\begin{cases} a + b = 12 \\ ab = 28 \end{cases}$$

Como já observamos, a e b são raízes da equação $x^2 - 12x + 28 = 0$. Calculando o discriminante, obtemos $\Delta = 12^2 - 4 \cdot 28 = 32$. Utilizando a fórmula, temos que as soluções são:

$$a = \frac{12 + \sqrt{32}}{2} = 6 + 2\sqrt{2}$$

e

$$b = \frac{12 - \sqrt{32}}{2} = 6 - 2\sqrt{2}.$$

□

Exemplo 1.23. Mostre que a equação $x^2 + bx + p$ não possui raiz inteira, se b é um número natural e p é um primo positivo.

Solução: Observe que se n é uma raiz inteira da equação acima e a é a outra raiz, então $n + a = -b$, onde a deve ser necessariamente um número inteiro. Isso nos leva a concluir que $an = p$ o que só é possível se $a = 1$ ou $n = 1$. Como $b \geq 0$, temos que nem a nem n podem ser iguais a 1, já que ambos são raízes da equação $x^2 + bx + p$. Isso é uma contradição.

□

Exemplo 1.24. Numa reunião havia pelo menos 12 pessoas e todos os presentes apertaram as mãos entre si. Descubra quantas pessoas estavam presentes na festa, sabendo que houve menos que 75 apertos de mão.

Solução: Vamos denotar por a o número de apertos de mão e enumerar as pessoas com os números do conjunto $\mathcal{P} = \{1, 2, \ldots, n\}$. A cada aperto de mão associaremos um par (i, j), significando que a pessoa i apertou a mão da pessoa j. Assim, os apertos de mão envolvendo a pessoa 1 foram:

$$A_1 = \{(1,2), (1,3), \ldots, (1,n)\}.$$

Do mesmo modo, definimos os apertos de mão envolvendo a pessoa 2 que não envolvem a pessoa 1, como:

$$A_2 = \{(2,3), (2,4), \ldots, (2,n)\}.$$

Note que o aperto $(2,1)$ é o mesmo que o aperto $(1,2)$, já que se 1 aperta a mão de 2, então 2 aperta a mão de 1. Analogamente,

$$A_i = \{(i, i+1), (i, i+2), \ldots, (i, n)\}, \text{ para } 1 \leq i \leq n-1$$

Note que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$. Observe também que todos os apertos aparecem em um dos conjuntos A_i. Assim, $A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}$ contém todos os apertos de mão. Logo,

$$\begin{aligned} \#(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1}) &= \#A_1 + \#A_2 + \cdots + \#A_{n-1} \\ &= (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 \\ &= \frac{(n-1)n}{2} = a. \end{aligned}$$

Logo, $n^2 - n - 2a = 0$ admite uma raiz inteira, maior ou igual a 12. Deste modo, basta descobrirmos para que valores de a menores que 75 a equação acima admite raízes maiores ou iguais a 12. Observe que o produto das raízes deve ser menor em módulo que 150, já que

a é menor que 75. Se denotarmos essas raízes por n_1 e n_2, temos que n_1 e n_2 são inteiros com $n_1 \geq 12$ e pelas relações entre as raízes

$$\begin{cases} n_1 n_2 = -2a \\ n_1 + n_2 = 1 \end{cases}$$

concluímos que $-n_2 = n_1 - 1 \geq 11$. Assim, podemos deduzir que $-n_2 n_1$ é maior ou igual a $11 \cdot 12 = 132$, já que $n_2 \geq 12$.

Observe que o mesmo raciocínio nos leva a concluir que se $n_1 \geq 13$, $-n_2 n_1 = 2a \geq 12 \cdot 13 = 156$, onde a deve ser maior que 78. Assim, a raiz positiva para tal equação não pode ser maior que 13, restando somente 12 como solução. De fato, essa solução é possível, se considerarmos $a = 66$. Logo, havia 12 pessoas na festa. $\square$

Um fato importante e que merece destaque é que se α e β são raízes da equação do segundo grau $x^2 - Sx + P = 0$ já sabemos que $\alpha + \beta = S$ e $\alpha\beta = P$. Assim, temos que o produto

$$(x - \alpha)(x - \beta) = x^2 - (\beta + \alpha)x + \alpha\beta = x^2 - Sx + P. \tag{1.8}$$

Em geral, dada a equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, podemos escrevê-la como $a(x^2 - Sx + P) = 0$, com $S = -b/a$ e $P = c/a$. Note que se α e β são as raízes da equação do segundo grau $x^2 - Sx + P = 0$, então α e β são raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$. Isso nos leva a concluir, pela equação (1.8), que :

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 - Sx + P) = a(x - \alpha)(x - \beta). \tag{1.9}$$

A equação (1.9) mostra que se α é uma raiz de um polinômio do segundo grau, então a divisão desse polinômio pelo polinômio $(x - \alpha)$ é uma divisão exata. Voltaremos a tratar desse assunto no Teorema 4.4.

1.4.3 Equações Biquadradas

A dedução da solução da equação do segundo grau nos permite resolver equações de grau mais alto, desde que elas se apresentem numa forma peculiar, que nos permita reduzi-las a uma equação do segundo grau. Por exemplo:

Exemplo 1.25. Resolva a equação

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 0. \tag{1.10}$$

Apesar da equação acima ser de grau quatro, podemos solucioná-la utilizando o que aprendemos até agora. O truque será denotar por y o valor x^2.

Solução: Denote por $y = x^2$. Neste caso, temos que $0 = y^2 - 2y + 1 = (y-1)^2$. Logo, $y - 1 = 0$. Assim, $x^2 = y = 1$ e $x = 1$ ou $x = -1$. □

1.4.4 O Método de Vièti

A maneira que François Vièti (1540-1603) descobriu para resolver a equação do segundo grau baseia-se em relacionar a equação

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1.11}$$

como uma equação do tipo

$$Ay^2 + B = 0, \tag{1.12}$$

onde A e B são números que dependem de a, b, c, de modo que qualquer solução da equação (1.12) determinará uma solução da equação (1.11). Note que a última equação possui soluções

$$y_1 = \sqrt{-\frac{B}{A}} \quad \text{e} \quad y_2 = -\sqrt{-\frac{B}{A}}, \quad \text{se} \quad -\frac{B}{A} \geq 0.$$

Para fazer isso, usamos o seguinte truque: escrevendo $x = u + v$ como a soma de duas novas variáveis u e v, a equação (1.11) se escreve como:

$$a(u+v)^2 + b(u+v) + c = 0 \text{ ou } au^2 + 2auv + av^2 + bu + bv + c = 0.$$

Se escrevemos a expressão acima como uma equação na variável v temos que:

$$av^2 + (2au + b)v + au^2 + bu + c = 0.$$

Assim, podemos obter uma equação do tipo da Equação (1.12), escolhendo o valor de u de modo que o termo que contém v se anule. Escolhendo $u = -b/2a$ temos que:

$$av^2 + a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 - b\frac{b}{2a} + c = 0 \text{ ou ainda } av^2 + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = 0,$$

o que é equivalente a

$$av^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = 0.$$

Observando que a equação assumiu a forma da Equação (1.12), temos que suas soluções são:

$$v_1 = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \quad \text{e} \quad v_2 = -\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}, \quad \text{se} \quad \Delta = b^2 - 4ac \geq 0.$$

Lembrando que $u = -b/2a$ e que $x = u + v$ temos as soluções da equação (1.11):

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + v_1 \quad \text{e} \quad x_2 = -\frac{b}{2a} + v_2,$$

como já obtivemos anteriormente.

1.5 Exercícios

1. Quantos são os números inteiros de 2 algarismos que são iguais ao dobro do produto de seus algarismos?

2. Obter dois números consecutivos inteiros cuja soma seja igual a 57.

3. Qual é o número que, adicionado ao triplo do seu quadrado, vale 14?

4. O produto de um número positivo pela sua terça parte é igual a 12. Qual é esse número?

5. Determine dois números consecutivos ímpares cujo produto seja 195.

6. A diferença entre as idades de dois irmãos é 3 anos e o produto de suas idades é 270. Qual é a idade de cada um?

7. Calcule as dimensões de um retângulo de $16\,cm$ de perímetro e $15\,cm^2$ de área.

8. A diferença de um número e o seu inverso é $\frac{8}{3}$. Qual é esse número?

9. A soma de dois números é 12 e a soma de seus quadrados é 74. Determine os dois números.

10. Um pai tinha 30 anos quando seu filho nasceu. Se multiplicarmos as idades que possuem hoje, obtém-se um produto que é igual a três vezes o quadrado da idade do filho. Quais são as suas idades?

11. Os elefantes de um zoológico estão de dieta juntos. Num período de 10 dias devem comer uma quantidade de cenouras igual ao quadrado da quantidade que um coelho come em 30 dias. Em um dia os elefantes e o coelho comem juntos $1.444\,kg$ de cenoura. Quantos kg de cenoura os elefantes comem em 1 dia?

12. Sejam α_1 e α_2 as raízes do polinômio $ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Calcule as seguintes expressões, em função de a, b e c:

    (a) $\dfrac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$;

(b) $\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}$;

(c) $\sqrt[4]{\alpha_1} + \sqrt[4]{\alpha_2}$.

13. O número -3 é a raiz da equação $x^2 - 7x - 2c = 0$. Nessas condições, determine o valor do coeficiente c.

14. Encontre o polinômio $p(x) = 2x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ que satisfaz a equação $p(x) = p(1-x)$.

    Os problemas a seguir são de Olimpíadas de Matemática e de Revistas especializadas e estão propostos como desafio para os leitores:

15. (OBM) Dois meninos jogam o seguinte jogo. O primeiro escolhe dois números inteiros diferentes de zero e o segundo monta uma equação do segundo grau usando como coeficientes os dois números escolhidos pelo primeiro jogador e 1998, na ordem que quiser (ou seja, se o primeiro jogador escolhe a e b o segundo jogador pode montar a equação $1998x^2 + ax + b = 0$ ou $ax^2 + 1998x + b = 0$, etc.) O primeiro jogador é considerado vencedor se a equação tiver duas raízes racionais diferentes. Mostre que o primeiro jogador pode ganhar sempre.

16. (OBM) Mostre que a equação $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ tem infinitas soluções onde x, y, z são números inteiros.

17. (Gazeta Matemática, Romênia) Considere a equação $a^2x^2 - (b^2 - 2ac)x + c^2 = 0$, onde a, b e c são números inteiros positivos. Se $n \in \mathbb{N}$ é tal que $p(n) = 0$, mostre que n é um quadrado perfeito.

18. (Gazeta Matemática, Romênia) Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Sabendo que a equação
$$(ax-b)^2 + (bx-a)^2 = x,$$
tem uma raiz inteira, encontre os valores de suas raízes.

19. (Gazeta Matemática, Romênia) Resolva a equação:

$$\left[\frac{2x^2}{x^2+1}\right] = x.$$

Obs.: $[x]$ é o menor inteiro maior ou igual a x.

20. Demonstrar que:

    (a) $n^4 + 4$ não é primo se $n > 1$;

    (b) Generalize, mostrando que $n^4 + 4^n$ não é primo, para todo $n > 1$.

Capítulo 2

Inequações

Inequações aparecem de maneira natural em várias situações dentro do contexto matemático, assim como no próprio dia-a-dia.

Exemplo 2.1. Numa loja de esportes as bolas de tênis Welson entraram em promoção, passando a custar cada uma três reais. Pedro que é um assíduo jogador de tênis quer aproveitar ao máximo a oferta da loja, mas ele só dispõe de cem reais. Qual é a maior quantidade possível de bolas que Pedro pode comprar?

Solução. Se denotamos por x o número de bolas que Pedro compra, então devemos achar o maior valor possível de x tal que

$$3x \leq 100. \tag{2.1}$$

Notemos que o problema se reduz a encontrar o maior múltiplo positivo de 3 que seja menor ou igual a 100. Listemos agora múltiplos positivos de 3 menores ou iguais a 100, isto é,

$$3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18,\ 21,\ 24,\ 27,\ 30,\ 33,\ 36,\ 39,\ 42,\ 45,\ 48,\\ 51,\ 54,\ 57,\ 60,\ 63,\ 66,\ 69,\ 72,\ 75,\ 78,\ 81,\ 84,\ 87,\ 90,\ 93,\\ 96,\ \boxed{99}\ ,\ 102,\ 105,\ \dots$$

Claramente, $99 = 3 \cdot 33$ é o maior múltiplo de 3 menor ou igual a 100, pois $3 \cdot 34 = 102 > 100$ e Pedro não teria orçamento para efetuar a compra. Logo, a solução é $x = 33$, ou seja, Pedro poderá comprar 33 bolas. $\square$

Observemos que no exemplo anterior o que temos feito é achar o maior valor inteiro de x tal que $3x - 100 < 0$. Isto é um caso particular de resolução de uma inequação, chamada inequação do primeiro grau.

2.1 Inequação do Primeiro Grau

Uma *inequação do primeiro grau* é uma relação de uma das formas abaixo

$$\begin{cases} ax + b < 0, & ax + b > 0, \\ ax + b \leq 0, & ax + b \geq 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

O *conjunto solução* de uma inequação do primeiro grau é o conjunto $\mathcal{S}$ de números reais que satisfazem uma das desigualdades em (2.2). Para achar tal conjunto será de vital importância tomar em conta as seguintes propriedades das desigualdades entre dois números

- **Invariância do sinal por adição de números reais:** Sejam a e b números reais tais que $a \leq b$, então $a + c \leq b + c$ para qualquer número real c. O mesmo vale com as desigualdades do tipo: $<$, $\geq$ ou $>$.

- **Invariância do sinal por multiplicação de números reais positivos:** Sejam a e b números reais tais que $a \leq b$, então $ac \leq bc$ para qualquer número real positivo c. Resultados análogos valem para as desigualdades do tipo: $<$, $\geq$ ou $>$.

- **Mudança do sinal por multiplicação de números reais negativos:** Sejam a e b números reais tais que $a \leq b$, então

$ac \geq bc$ para qualquer número real negativo c. Resultados análogos valem para as desigualdades do tipo: $<$, $\geq$ ou $>$.

Vejamos como solucionar as inequações estritas

$$ax + b < 0 \quad \text{e} \quad ax + b > 0.$$

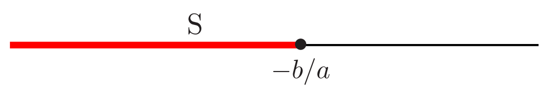
Para isto, dividimos a análise em dois casos.

- Caso 1: $a > 0$

  Inequação $\boldsymbol{ax + b < 0}$: neste caso, dividindo por a obtemos que $x + b/a < 0$ e somando $-b/a$, em ambos membros desta última inequação, temos que $x < -b/a$. Portanto,

  $$\mathrm{S} = \{x \in \mathbb{R};\ x < -b/a\},$$

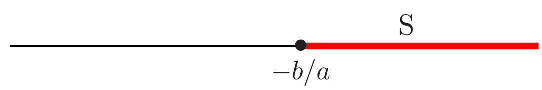
  o qual representamos no seguinte desenho:



  Inequação $\boldsymbol{ax + b > 0}$: procedendo do mesmo modo que o caso anterior, obtemos que o conjunto solução vem dado por

  $$\mathrm{S} = \{x \in \mathbb{R};\ x > -b/a\},$$

  representado no desenho abaixo:

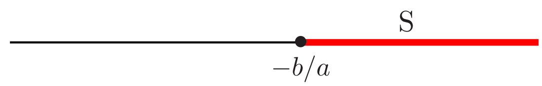


- Caso 2: $a < 0$

  Inequação $\boldsymbol{ax + b < 0}$: neste caso, quando dividimos por a o sinal da inequação se inverte, obtendo assim que $x + b/a > 0$, logo temos que $x > -b/a$ e, conseqüentemente,

  $$\mathrm{S} = \{x \in \mathbb{R};\ x > -b/a\},$$

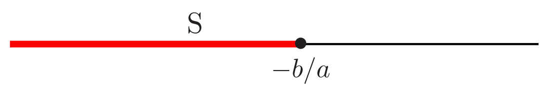
  cuja representação na reta é a seguinte:



Inequação $\boldsymbol{ax+b>0}$: similarmente, o conjunto solução vem dado por

$$\mathrm{S} = \{x \in \mathbb{R};\ x < -b/a\},$$

cuja representação é a seguinte:



Observação 2.2. Notemos que se queremos resolver as inequações $ax+b \leq 0$ e $ax+b \geq 0$, então o conjunto solução S em cada um dos casos acima continua o mesmo acrescentado apenas do ponto $x = -b/a$.

Vejamos agora um exemplo simples.

Exemplo 2.3. Para resolver a inequação $8x - 4 \geq 0$, primeiramente dividimos por 8 a inequação (prevalecendo o sinal da desigualdade) e imediatamente adicionamos $1/2$ em ambos os membros da mesma, para obter $x - 4/8 + 1/2 \geq 1/2$, ou seja,

$$\mathrm{S} = \{x \in \mathbb{R};\ x \geq 1/2\}.$$

A seguir damos alguns exemplos que podem ser resolvidos usando inequações lineares.

Exemplo 2.4. Sem fazer os cálculos, diga qual dos números $a = 3456784 \cdot 3456786 + 3456785$ e $b = 3456785^2 - 3456788$ é maior?

Solução. Se chamamos de x ao número 3456784 temos que $a = x\cdot(x+2)+(x+1)$ e $b = (x+1)^2-(x+4)$. Logo, $a = x^2+3x+1$ e $b = x^2+x-3$. Se supomos que $a \leq b$, então

$$x^2+3x+1 \leq x^2+x-3,$$

e somando $-x^2 - x + 3$ a ambos os membros desta desigualdade obtemos

$$2x + 4 \leq 0.$$

A solução desta inequação do primeiro grau é o conjunto dos $x \in \mathbb{R}$ tais que $x \leq -2$, mas isto é falso, desde que $x = 3456784$. Logo, nossa suposição inicial de a ser menor ou igual a b é falsa, sendo então $a > b$. $\square$

O próximo exemplo já foi tratado no capítulo 1 (ver Exemplo 1.8), porém apresentamos a seguir uma solução diferente usando inequações do primeiro grau.

Exemplo 2.5. Um quadrado mágico 3×3 é um quadrado de lado 3 dividido em 9 quadradinhos de lado 1 de forma tal que os números de 1 até 9 são colocados um-a-um em cada quadradinho com a propriedade de que a soma dos elementos de qualquer linha, coluna ou diagonal é sempre a mesma. Provar que no quadradinho do centro de tal quadrado mágico deverá aparecer, obrigatoriamente, o número 5.

Solução. Primeiramente observamos que a soma $1+2+3+\cdots+9 = 45$, logo como há três linhas e em cada uma destas figuram números diferentes temos que a soma dos elementos de cada linha é 15. Logo, a soma dos elementos de cada coluna ou diagonal também é 15.

Chamemos de x o número que aparece no centro do quadrado mágico, como mostra o desenho abaixo.

	x	

Agora fazemos as seguintes observações:

- O número x não pode ser 9, pois nesse caso em alguma linha, coluna ou diagonal que contém o quadrado central aparecerá o número 8, que somado com 9 dá $17 > 15$ e isto não pode acontecer.

- O número x não pode ser 1, pois nesse caso formaria uma linha, coluna ou diagonal com o número 2 e um outro número que chamamos de y, então $1 + 2 + y = 15 \Leftrightarrow y = 12$, o qual é impossível.

Feitas as observações anteriores, temos então que o número x forma uma linha, coluna ou diagonal com o número 9 e algum outro número que chamamos de z, logo

$$z = 15 - (x + 9) \geq 1 \Leftrightarrow 6 - x \geq 1,$$

de onde segue que $x \leq 5$.

Por outro lado, o número x aparece numa linha, coluna ou diagonal com o número 1 e algum outro número que chamamos de s, logo $s = 15 - (x+1) = 14 - x \leq 9$, de onde temos que $x \geq 5$. Finalmente, como $5 \leq x \leq 5$ segue-se que $x = 5$. □

Exemplo 2.6. Num triângulo com lados de comprimento a, b e c traçamos perpendiculares desde um ponto arbitrário P, sobre o lado de comprimento c, até cada um dos lados restantes (ver a Figura 2.1). Se estas perpendiculares medem x e y e $a > b$, então

(a) Qual a posição onde deve ser colocado P de maneira que $\ell = x + y$ seja mínimo?

(b) Qual a posição onde deve ser colocado P de maneira que $\ell = x + y$ seja máximo?

Solução. Denotemos por S a área do triângulo e notemos que dividindo este em dois triângulos menores: um com base a e altura x e outro com base b e altura y, temos que

$$\frac{ax}{2} + \frac{by}{2} = S,$$

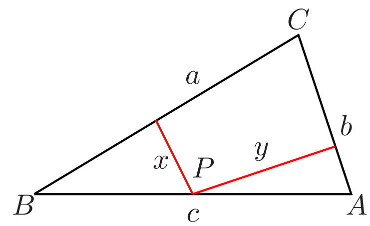


Figura 2.1:

de onde se segue que

$$\begin{aligned} ax &= 2S - by \\ x &= \frac{2S - by}{a}. \end{aligned}$$

Somando y em ambos os lados da última igualdade, obtemos

$$\begin{aligned} x + y &= \frac{2S - by}{a} + y \\ &= \frac{2S - by + ay}{a} \\ &= \frac{2S}{a} + \frac{a - b}{a} y, \end{aligned}$$

logo $\ell = \alpha + \beta y$, onde $\alpha = \frac{2S}{a}$ e $\beta = \frac{a-b}{a}$. Agora notemos que $0 \leq y \leq h_b$, onde h_b denota a altura relativa ao lado de comprimento b no triângulo dado. Como β é positivo, por ser $a > b$, temos então que $0 \leq \beta y \leq \beta h_b$ e, portanto, $\alpha \leq \alpha + \beta y \leq \alpha + \beta h_b$, de onde

$$0 \leq \ell \leq \alpha + \beta h_b.$$

Resumindo, o valor mínimo de ℓ é atingido quando $y = 0$, portanto P deve ser colocado no vértice A, e o valor máximo é obtido quando $y = h_b$, portanto P deve ser colocado no vértice B. $\square$

2.2 Inequação do Segundo Grau

Agora passamos a discutir a solução das inequações de segundo grau, que possuem um maior grau de dificuldade. Será de vital importância o uso das propriedades do trinômio quadrático ax^2+bx+c, estudadas no capítulo anterior .

Uma *inequação do segundo grau* é uma relação de uma das formas abaixo

$$\begin{cases} ax^2+bx+c<0, & ax^2+bx+c>0, \\ ax^2+bx+c\leq 0, & ax^2+bx+c\geq 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Por simplicidade, chamaremos o número a de *coeficiente líder* do trinômio quadrático ax^2+bx+c.

Por exemplo, para resolver a inequação $x^2-3x+2>0$ fatoramos o trinômio usando que as raízes da equação $x^2-3x+2=0$ são 1 e 2, isto é,

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2).$$

O trinômio toma valores positivos quando o produto $(x-1)(x-2)$ for positivo, ou seja, quando os fatores $(x-1)$ e $(x-2)$ tenham o mesmo sinal:

- Ambos positivos:

  $$x-1>0 \Leftrightarrow x>1$$

  e

  $$x-2>0 \Leftrightarrow x>2,$$

  logo $x>2$.

- Ambos negativos:

  $$x-1<0 \Leftrightarrow x<1$$

  e

  $$x-2<0 \Leftrightarrow x<2,$$

  logo $x<1$.

Portanto, $x^2 - 3x + 2 > 0$ se, e somente se, $x < 1$ ou $x > 2$.

A seguir explicamos como podemos resolver a inequação do segundo grau de forma geral.

Suponhamos primeiramente que queremos resolver a inequação

$$ax^2 + bx + c > 0. \tag{2.4}$$

Notemos que valem as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - a\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}\,, \end{aligned} \tag{2.5}$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$. Considerando esta igualdade, dividimos em vários casos:

Caso 1: $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. Nesta situação procedemos tomando em conta o sinal de a.

- ($\boldsymbol{a > 0}$). Usando (2.5) notamos que basta resolver a inequação

  $$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} > 0.$$

  Como $a > 0$, multiplicando por $1/a$ em ambos os membros da desigualdade anterior o sinal desta não muda, obtendo-se então

  $$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0.$$

  Agora usamos que $\Delta > 0$ para obtermos que

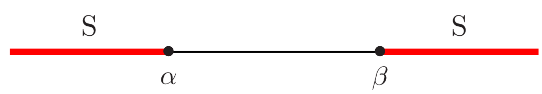
$$
\begin{aligned}
\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2} &= \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 \\
&= \left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\
&= \left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\
&= (x-\alpha)(x-\beta)>0,
\end{aligned}
$$

onde $\alpha=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $\beta=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ são as raízes de $ax^2+bx+c=0$. Agora notamos que $(x-\alpha)(x-\beta)>0$ se os fatores $(x-\alpha)$ e $(x-\beta)$ são ambos positivos ou ambos negativos. No primeiro caso (ambos positivos) temos que $x>\alpha$ e $x>\beta$, mas como $\alpha<\beta$, então $x>\beta$. No segundo caso (ambos negativos), temos que $x<\alpha$ e $x<\beta$, logo $x<\alpha$, novamente por ser $\alpha<\beta$.

Resumindo, a solução da inequação vem dada pelo conjunto

$$
\mathrm{S}=\{x\in\mathbb{R};\ x<\alpha \ \text{ ou } \ x>\beta\},
$$

com a seguinte representação na reta:



- $(\boldsymbol{a<0})$. Esta situação é bem similar à anterior, a única diferença é que ao multiplicar por $1/a$ o sinal se inverte tendo então que resolver a inequação

$$
\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}<0,
$$

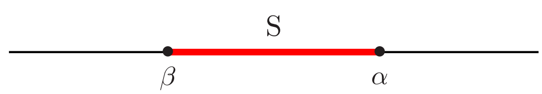
a qual é equivalente a provar (seguindo os mesmos passos do caso anterior) que

$$(x-\alpha)(x-\beta) < 0,$$

com $\alpha = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $\beta = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ raízes de $ax^2+bx+c=0$. Notemos que a desigualdade acima é válida sempre que os sinais dos fatores $(x-\alpha)$ e $(x-\beta)$ sejam diferentes. Por exemplo, se $x-\alpha > 0$ e $x-\beta < 0$ temos então que x deve satisfazer a desigualdade $\alpha < x < \beta$, mas isso é impossível considerando que neste caso $\alpha > \beta$, por ser $a < 0$. No caso restante, se $x-\alpha < 0$ e $x-\beta > 0$ temos então que $\beta < x < \alpha$, o que é possível. Portanto, o conjunto solução, neste caso, é dado por

$$\mathrm{S} = \{x \in \mathbb{R};\ \beta < x < \alpha\},$$

cuja representação na reta é:



Caso 2: $\Delta = b^2 - 4ac = 0$. Usando novamente (2.5), devemos resolver a inequação

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 > 0,$$

a qual é válida para qualquer $x \neq -\frac{b}{2a}$, se $a > 0$ e sempre falsa, se $a < 0$.

Caso 3: $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Neste caso, quando a é positivo todos os valores de x reais são solução para (2.4), pois a desigualdade

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} > 0,$$

é sempre satisfeita, dado que $-\frac{\Delta}{4a} > 0$. Por outro lado, se a é negativo não temos nenhuma solução possível para a inequação (2.4) já que

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

é sempre negativo, dado que $-\frac{\Delta}{4a} < 0$.

Observação 2.7. Para a desigualdade do tipo

$$ax^2 + bx + c < 0$$

são obtidos resultados similares, seguindo o mesmo processo descrito anteriormente. Além disto, para as inequações

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \quad \text{e} \quad ax^2 + bx + c \leq 0$$

os resultados são os mesmos, acrescentados apenas dos pontos α, β ou $-b/2a$, dependendo do caso.

Exemplo 2.8. Provar que a soma de um número positivo com seu inverso é sempre maior ou igual que 2.

Solução. Seja $x > 0$, então devemos provar que

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

Partimos da seguinte desigualdade, que sabemos vale para qualquer $x \in \mathbb{R}$:

$$(x-1)^2 \geq 0$$

logo

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Longleftrightarrow x^2 + 1 \geq 2x.$$

Se x é positivo, podemos dividir ambos os membros da última desigualdade sem alterar o sinal da mesma, ou seja,

$$x + \frac{1}{x} \geq 2,$$

conforme queríamos provar. $\square$

2.2.1 Máximos e Mínimos

O trinômio quadrático $f(x) = ax^2 + bx + c$, como já foi observado anteriormente, satisfaz a identidade

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}, \tag{2.6}$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$. O valor *mínimo* (*máximo*) do trinômio quadrático $f(x)$ é o menor (maior) valor possível que pode assumir $f(x)$ quando fazemos x percorrer o conjunto dos reais.

Da igualdade (2.6) segue-se que, quando $a > 0$ o valor mínimo do trinômio é obtido quando $x = -\frac{b}{2a}$ e este vale $f(-\frac{b}{2a}) = -\frac{\Delta}{4a}$. Similarmente, quando $a < 0$ o valor máximo do trinômio é obtido quando $x = -\frac{b}{2a}$, valendo também $f(-\frac{b}{2a}) = -\frac{\Delta}{4a}$

Exemplo 2.9. Sejam a, b reais positivos tais que $a + b = 1$. Provar que $ab \leq 1/4$.

Solução. Notemos que $ab = a(1 - a) = -a^2 + a$. Definindo $f(a) = -a^2 + a$, basta provar que $f(a) \leq 1/4$ para qualquer $0 < a < 1$. Completando o quadrado o trinômio $f(a)$, obtemos

$$f(a) = -(a^2 - a) = -(a^2 - a + 1/4 - 1/4) = -(a - 1/2)^2 + 1/4,$$

logo este assume seu valor máximo igual a $1/4$, quando $a = 1/2$.

□

Alguns problemas de máximos ou mínimos não parecem ser resolvidos achando o máximo ou mínimo de funções quadráticas mas podem ser reformulados de forma tal que isto seja possível. Vejamos um exemplo.

Exemplo 2.10. Na Figura 2.2 $ABCD$ é um retângulo inscrito dentro do círculo de raio r. Encontre as dimensões que nos dão a maior área possível do retângulo $ABCD$.

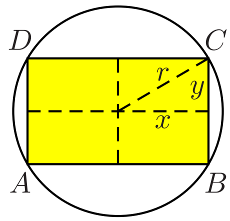


Figura 2.2:

Solução. A área do retângulo vem dada pela fórmula

$$A = 2x \cdot 2y = 4xy.$$

Usando o teorema de Pitágoras, temos que

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}, \tag{2.7}$$

logo, substituindo esta última igualdade na fórmula de área anterior, obtemos

$$A = 4x\sqrt{r^2 - x^2}.$$

Não é muito difícil de convencermos de que as dimensões, que nos dão a maior área possível para o retângulo $ABCD$, são as mesmas que nos dão o máximo para o quadrado desta área, ou seja, basta encontrar as dimensões que maximizam A^2. A vantagem que tem esta reformulação do problema é que A^2 tem uma expressão mais simples, dada por

$$A^2 = 16x^2(r^2 - x^2) = 16r^2x^2 - 16x^4.$$

Agora fazemos a mudança $z = x^2$, para obter

$$A^2 = -16z^2 + 16r^2z = -16\left(z - \tfrac{r^2}{2}\right)^2 + 4r^4,$$

de onde segue que o menor valor de A^2 é obtido quando $z = \frac{r^2}{2}$ e portanto quando $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$. Usando agora a igualdade (2.7) temos que

$$y = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

Então, o retângulo de maior área possível é o quadrado de lado $\frac{2r}{\sqrt{2}} = r\sqrt{2}$. $\square$

2.3 Exercícios

1. Para fazer 12 bolinhos, preciso exatamente de 100g de açúcar, 50g de manteiga, meio litro de leite e 400g de farinha. Qual a maior quantidade desses bolinhos que serei capaz de fazer com 500g de açúcar, 300g de manteiga, 4 litros de leite e 5 quilogramas de farinha ?

2. Dadas as frações

$$\frac{966666555557}{966666555558} \quad \text{e} \quad \frac{966666555558}{966666555559},$$

qual é maior?

3. Achar o maior valor inteiro positivo de n tal que

$$n^{200} < 5^{300}.$$

4. Achar o menor valor inteiro positivo de n tal que

$$10^{\frac{1}{11}} \cdot 10^{\frac{2}{11}} \cdot 10^{\frac{3}{11}} \cdots 10^{\frac{n}{11}} > 100000.$$

5. Nove cópias de certas notas custam menos de R\$ 10,00 e dez cópias das mesmas notas (com o mesmo preço) custam mais de R\$ 11,00. Quanto custa uma cópia das notas?

6. Se enumeram de 1 até n as páginas de um livro. Ao somar estes números, por engano um deles é somado duas vezes, obtendo-se o resultado incorreto: 1986. Qual é o número da página que foi somado duas vezes?

7. Determine os valores de a para os quais o trinômio quadrático $ax^2 - ax + 12$ é sempre positivo.

8. Ache os valores de x para os quais cada uma das seguintes expressões é positiva:

$$\text{(a) } \frac{x}{x^2+9} \qquad \text{(b) } \frac{x-3}{x+1} \qquad \text{(c) } \frac{x^2-1}{x^2-3x}$$

9. Resolver a equação:

$$[x]\{x\} + x = 2\{x\} + 10,$$

onde $[x]$ denota a parte inteira de x. Por exemplo, $[2,46] = 2$ e $[5,83] = 5$. O número $\{x\}$ é chamado parte fracionária de x e é definido por $\{x\} = x - [x]$.

10. Mostre que entre os retângulos com um mesmo perímetro, o de maior área é um quadrado.

11. Entre todos os triângulos isósceles com perímetro p fixado, ache as dimensões dos lados daquele que possui a maior área.

Capítulo 3

Desigualdades Clássicas e Aplicações

Neste capítulo dedicamos especial atenção a desigualdades extremamente importantes que são usadas muito freqüentemente no trabalho matemático, sendo estas aplicadas em contextos que variam desde o nível mais simples até o mais complexo.

Uma vez que uma inequação em uma ou mais variáveis é resolvida, o resultado dá lugar a uma desigualdade que é válida para um certo conjunto das variáveis. Alguns exemplos simples de desigualdades são os seguintes:

- $|a| \geq 0$, para qualquer a real;
- $a^2 \geq 0$, para qualquer a real;
- $|a+b| \leq |a| + |b|$, para quaisquer a, b reais, conhecida como desigualdade triangular.

3.1 Desigualdades Clássicas

A primeira desigualdade importante que provaremos é a seguinte:

Teorema 3.1. *Para quaisquer x, y números reais vale*

$$xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2} \tag{3.1}$$

Além disso, a igualdade só acontece quando $x = y$.

Demonstração. A prova é simples, basta observar que

$$\frac{x^2 + y^2}{2} - xy = \frac{x^2 + y^2 - 2xy}{2} = \frac{(x - y)^2}{2} \geq 0 \tag{3.2}$$

Notemos que, se $x = y$ então vale a igualdade em (3.1) e, reciprocamente, se a igualdade em (3.1) vale, então de (3.2) temos que $\frac{(x-y)^2}{2} = 0$, de onde segue que $x = y$.

□

A desigualdade (3.1), quando x e y são números positivos, nos diz que a área formada pelo retângulo de lados x e y é menor ou igual que a metade da soma das áreas dos quadrados construídos sobre cada um dos lados.

Convidamos ao leitor a fazer o seguinte experimento geométrico: suponhamos que $x < y$, e desenhemos numa folha de papel a Figura 3.1-(a). Recortemos o desenho pelo triângulo ACF, jogando fora os triângulos que estão à esquerda da linha tracejada. Dobremos os triângulos ABD e DEF pelos lados BD e DE, respectivamente, para o interior do retângulo $BCED$, obtendo assim uma situação como a descrita na Figura 3.1-(b). Observemos que o retângulo ficou completamente coberto e ainda sobrou um pedacinho de folha de papel correspondente ao triângulo ACF.

A próxima desigualdade decorre imediatamente do Teorema 3.1 e é uma desigualdade entre duas médias: a *média geométrica* entre dois números positivos a e b, dada por $\sqrt{ab}$, e a *média aritmética* destes, dada por $(a + b)/2$.

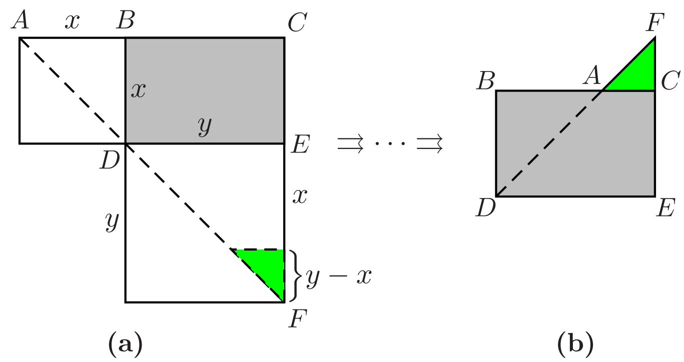


Figura 3.1:

Teorema 3.2. *Para quaisquer a, b reais positivos vale*

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \tag{3.3}$$

Além disso, a igualdade só vale se $a = b$.

Demonstração. O resultado segue diretamente da desigualdade (3.1), tomando $x = \sqrt{a}$ e $y = \sqrt{b}$. □

Exemplo 3.3. Prove que $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$ para quaisquer a, b, e c.

Solução. Da desigualdade 3.1 seguem as seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned}
\frac{a^2+b^2}{2} &\geq ab, \\
\frac{b^2+c^2}{2} &\geq bc, \\
\frac{a^2+c^2}{2} &\geq ac.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Somando membro-a-membro as desigualdades acima obtemos que

$$\frac{2a^2+2b^2+2c^2}{2} \geq ab+bc+ac,$$

ou seja,

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac,$$

como queríamos. $\square$

A desigualdade entre as médias aritmética e geométrica também vale para n números positivos, isto é:

Teorema 3.4 (Desigualdade das médias aritmética e geométrica). *Para quaisquer $a_1,\ldots,a_n$ reais positivos vale*

$$\sqrt[n]{a_1\cdots a_n} \leq \frac{a_1+\cdots+a_n}{n} \tag{3.5}$$

A prova desta versão mais geral não é tão fácil de provar e exige um pouco mais de esforço, como veremos.

Demonstração. Dividiremos a prova em duas partes:

(A) A desigualdade vale para $n=2,4,8,\ldots,2^m,\ldots$

Primeiro provamos que se a desigualdade vale para $n=k$, então também vale para $n=2k$. Com efeito,

$$\begin{aligned}\frac{a_1+\cdots+a_{2k}}{2k} &= \frac{\frac{a_1+\cdots+a_k}{k}+\frac{a_{k+1}+\cdots+a_{2k}}{k}}{2}\\ &\overset{(1)}{\geq} \frac{\sqrt[k]{a_1\cdots a_k}+\sqrt[k]{a_{k+1}\cdots a_{2k}}}{2}\\ &\overset{(2)}{\geq} \sqrt{\sqrt[k]{a_1\cdots a_k}\,\sqrt[k]{a_{k+1}\cdots a_{2k}}}\\ &= \sqrt[2k]{a_1\cdots a_{2k}},\end{aligned}$$

onde em (1) usamos a hipótese da desigualdade ser válida para $n=k$ e em (2), (3.3). Logo, como já provamos a validade para $n=2$, é claro que vale também para $n=4,8,\ldots,2^m,\ldots$, como esperávamos.

(B) Dado m inteiro positivo, então a desigualdade vale para todo $n < 2^m$. Para verificar isto, definimos o número

$$L = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n},$$

e como a desigualdade vale para $n = 2^m$, temos então que

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + \cdots + a_n + \underbrace{L + \cdots + L}_{2^m - n \text{ vezes}}}{2^m} &\geq \sqrt[2^m]{a_1 \cdots a_n \cdot L^{2^m - n}} \\ &= \sqrt[2^m]{L^n \cdot L^{2^m - n}} = L. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n + (2^m - n)L}{2^m} \geq L,$$

logo

$$a_1 + \cdots + a_n \geq 2^m L - (2^m - n)L = nL,$$

obtendo assim que

$$a_1 + \cdots + a_n \geq nL = n\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n},$$

o que nos dá a desigualdade desejada.

Finalmente, observamos que para qualquer inteiro positivo n sempre existe um inteiro positivo m tal que $n < 2^m$, logo isto finaliza a prova da desigualdade (3.5). □

Um conceito muito importante é o de *média harmônica* de n números $a_1, \ldots, a_n$, dada pelo número h que satisfaz a seguinte relação:

$$\frac{n}{h} = \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \iff h = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

Ou seja, a média harmônica é o inverso da média aritmética dos inversos dos n números dados. Como provaremos a seguir, a média harmônica é sempre menor ou igual que a média geométrica.

Teorema 3.5 (Desigualdade das médias harmônica e geométrica). *Para quaisquer $a_1, \ldots, a_n$ reais positivos vale*

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \tag{3.6}$$

Demonstração. Usando a desigualdade das médias geométrica e aritmética temos que

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdots \frac{1}{a_n}} \leq \frac{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n},$$

logo, invertendo esta desigualdade obtemos (3.6). □

Outra desigualdade muito importante é a famosa desigualdade de *Cauchy-Schwarz*, que provamos a continuação.

Teorema 3.6 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Sejam $x_1, \ldots, x_n$ e $y_1, \ldots, y_n$ números reais, então vale*

$$|x_1y_1 + \cdots + x_ny_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2} \tag{3.7}$$

Além disso, a igualdade só ocorre se existir um número real α, tal que $x_1 = \alpha y_1, \ldots, x_n = \alpha y_n$ ou $y_1 = \alpha x_1, \ldots, y_n = \alpha x_n$.

Demonstração. Para qualquer número real λ temos que

$$(x_1 - \lambda y_1)^2 + \cdots + (x_n - \lambda y_n)^2 \geq 0,$$

logo

$$x_1^2 - 2\lambda x_1y_1 + \lambda^2 y_1^2 + \cdots + x_n^2 - 2\lambda x_ny_n + \lambda^2 y_n^2 \geq 0,$$

de onde segue que

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 - 2(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n)\lambda + (y_1^2 + \cdots + y_n^2)\lambda^2 \geq 0.$$

Definindo,

$$\begin{aligned} a &= y_1^2 + \cdots + y_n^2, \\ b &= -2(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n), \\ c &= x_1^2 + \cdots + x_n^2, \end{aligned}$$

temos que $a\lambda^2 + b\lambda + c \geq 0$, para todo λ real. Como já sabemos, se a desigualdade quadrática anterior vale para qualquer λ real, então

$$\Delta = b^2 - 4ac \leq 0,$$

ou seja,

$$4\left(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n\right)^2 - 4\left(y_1^2 + \cdots + y_n^2\right)\left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right) \leq 0,$$

assim obtemos que,

$$\left(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n\right)^2 \leq \left(y_1^2 + \cdots + y_n^2\right)\left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right).$$

Tomando raiz quadrada em ambos os membros desta última desigualdade, obtemos a desigualdade desejada. □

3.2 Aplicações

Apresentamos nesta seção uma série de problemas onde as desigualdades estudadas na seção anterior são aplicadas com sucesso para a resolução dos mesmos.

Começamos com uma belíssima aplicação da desigualdade triangular.

Problema 3.7. *Duas torres de alturas h_1 e h_2, respectivamente, são amarradas por uma corda APB que vai do topo A da primeira torre para um ponto P no chão, entre as torres, e então até o topo B da segunda torre, como na Figura 3.2. Qual a posição do ponto P que nos dá o comprimento mínimo da corda a ser utilizada?*

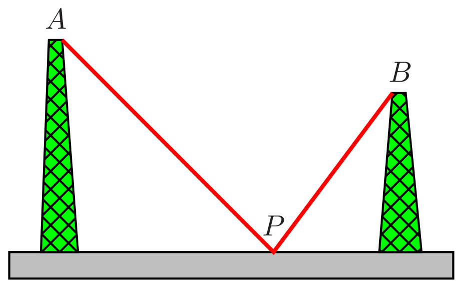


Figura 3.2:

Solução. Imaginemos que a superfície do chão é um espelho e que refletimos o ponto através deste, obtendo assim o ponto B' como mostra a Figura 3.3.

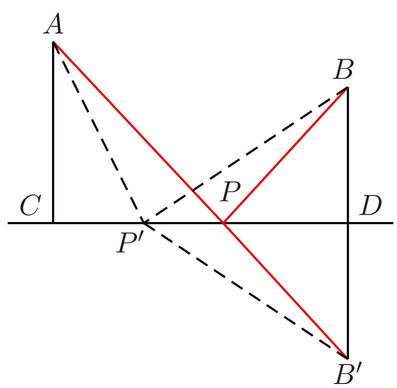


Figura 3.3:

Consideremos o segmento AB' que intersecta o chão no ponto P e, para nossa surpresa, verificaremos que este é o ponto que nos dá o comprimento mínimo da corda. Com efeito, suponhamos que existe outro ponto P' situado entre as torres que nos dá um comprimento menor para a corda. Então, da Figura 3.3, é fácil ver que os triângulos BPD e $B'PD$ são congruentes, assim como, os triângulos $BP'D$ e $B'P'D$ também são congruentes. Logo, as seguintes igualdades seguem diretamente das congruências:

$$BP = B'P \quad \text{e} \quad BP' = B'P'.$$

Agora, usando a desigualdade triangular no triângulo $AB'P'$ e as igualdades acima temos que

$$AP' + P'B = AP' + P'B' \geq AB' = AP + PB' = AP + PB,$$

chegando assim à conclusão de que $AP + PB$ nos dá o comprimento mínimo desejado. $\square$

Problema 3.8. *Prove que num triângulo retângulo a altura relativa à hipotenusa é sempre menor ou igual que a metade da hipotenusa. Prove ainda, que a igualdade só ocorre quando o triângulo retângulo é isósceles.*

Solução. Auxiliando-nos da Figura 3.4, temos que a hipotenusa c é dada por $c = x + y$ e usando o teorema das alturas para um triângulo retângulo temos que $h^2 = xy$, logo $h = \sqrt{xy}$. A desigualdade entre as médias geométrica e aritmética nos dá que

$$h = \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} = \frac{c}{2},$$

como queríamos. Além disso, como a igualdade entre as médias só

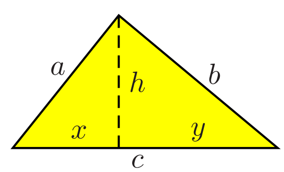


Figura 3.4:

ocorre quando $x = y$, então os catetos a e b do triângulo são iguais, sendo este isósceles. $\square$

Problema 3.9. *Prove que, entre todos os triângulos retângulos de catetos a e b e hipotenusa c fixada, o que tem maior soma dos catetos $s = a + b$ é o triângulo isósceles.*

Solução. Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz temos que

$$a + b = a \cdot 1 + b \cdot 1 \leq \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{1^2 + 1^2} = c\sqrt{2}$$

e este máximo é atingido quando $a = \lambda \cdot 1$ e $b = \lambda \cdot 1$ ou $1 = \lambda \cdot a$ e $1 = \lambda \cdot b$. Em qualquer caso devemos ter $a = b$.

□

3.3 Exercícios

1. Prove que $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$.

2. Prove que se $a \geq 0, b \geq 0$ e $c \geq 0$, então

$$(a + b)(a + c)(b + c) \geq 8abc.$$

3. Prove a desigualdade de Bernoulli: $(1 + x)^n > 1 + nx$, para qualquer x positivo e n inteiro positivo.

4. Prove que se a, b, c e d são inteiros positivos, então:

$$(a + b + c + d)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) \geq 16.$$

5. Prove que se $a \geq 0, b \geq 0$ e $c \geq 0$, então

$$(ab + bc + ca) \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}.$$

6. Prove que se $x \geq 0$, então $3x^3 - 6x^2 + 4 \geq 0$.

   Dica: use a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica.

7. Prove que se $x \geq 0$, então $2x + 3/8 \geq 4\sqrt{x}$.

8. A soma de três números positivos é 6. Prove que a soma de seus quadrados não é menor que 12.

9. Os centros de três círculos que não se intersectam estão sobre uma reta. Prove que se um quarto círculo toca de forma tangente os três círculos, então o raio deste é maior que pelo menos um dos raios dos três círculos dados.

10. Provar que em todo triângulo a soma dos comprimentos das medianas é menor que o perímetro do triângulo e maior que o semiperímetro deste.

Capítulo 4

Polinômios

4.1 Operações com Polinômios

Uma das grandes vantagens dos polinômios sobre outros objetos matemáticos é que podemos definir as operações de soma de polinômios e multiplicação de polinômios. Com estas operações, o conjunto dos polinômios possui muitas propriedades similares as dos números inteiros, tornando prático o seu uso.

Vamos definir agora o que siginifica a *soma* de dois polinômios. Para isso, vamos começar somando dois monômios e depois estender nossa definição para polinômios em geral.

Para somar dois monômios de mesmo grau $p(x) = a_k x^k$ e $q(x) = b_k x^k$ somamos seus coeficientes, obtendo o polinômio $t(x) = p(x) + q(x) = (a_k + b_k)x^k$. Em geral, para somar o polinômio $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ com o polinômio $q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$, onde $n \leq m$ devemos somar todos os monômios de mesmo grau, obtendo o polinômio:

$$t(x) = p(x) + q(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_m x^m$$

onde, $c_i = a_i + b_i$ para $0 \leq i \leq n$ e $c_i = b_i$ para $i > n$.

Por exemplo, se

$$\begin{aligned} p(x) &= 3x - 1 \\ q(x) &= 4x^3 + 7x + 1 \\ t(x) &= \tfrac{\pi}{2}x^4 \\ v(x) &= \tfrac{-\pi}{2}x^4 + 5x^2 + 1 \end{aligned}$$

são os polinômios definidos acima, então:

- $p(x) + q(x) = 4x^3 + (3 + 7)x - 1 + 1 = 4x^3 + 10x$
- $v(x) + t(x) = (\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2})x^4 + 5x^2 + 1 = 5x^2 + 1$

A seguir, enumeramos algumas propriedades simples da soma de polinômios que decorrem da definição dada e das propriedades similares válidas para os números reais:

1. *Associatividade*: Dados polinômios $p(x), q(x)$ e $t(x)$, vale
$$(p(x) + q(x)) + t(x) = p(x) + (q(x) + t(x))$$

2. *Elemento Neutro*: Se 0 denota o polinômio nulo e $p(x)$ é um polinômio qualquer:
$$0 + p(x) = p(x).$$

3. *Elemento Simétrico*: Se $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ é um polinômio, então o polinômio $q(x) = -a_0 - a_1x - \cdots - a_nx^n$ satisfaz:
$$p(x) + q(x) = 0.$$

4. *Comutatividade*: Se $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios, então:
$$p(x) + q(x) = q(x) + p(x).$$

Note que os números inteiros possuem propriedades similares para a operação de soma de números inteiros. Vamos agora definir o *produto* de dois polinômios. Para isso, vamos primeiramente definir o produto de dois monômios, como já fizemos no caso de soma de polinômios. Se n, m são números naturais, definimos o produto dos monômios $p(x) = a_n x^n$ e $q(x) = b_m x^m$ como:

$$p(x)q(x) = a_n b_m x^{n+m}.$$

Tendo isto em mente, para efetuarmos o produto do polinômio de grau n, $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ pelo polinômio $q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$ de grau m, com $n \leq m$, devemos:

- Completamos a escrita de $p(x)$ e de $q(x)$ até o termo $n + m$ colocando $a_k = 0$ para $k > n$ e $b_k = 0$ para $k > m$;

- Definimos

  $$t(x) = p(x)q(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n+m} x^{n+m}$$

  onde, $c_i = a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \cdots + a_{i-1} b_1 + a_i b_0$ para $0 \leq i \leq n + m$
  .

Apesar de parecer complicada, a definição não é tão difícil de ser aplicada. Para tentar visualizar o processo de multiplicação de dois polinômios vamos pensar que os monômios são seres alienígenas vindos do distante planeta de Algebrum e possuam mãos. Quando dois monômios se encontram, invariavelmente eles apertam as mãos e desse aperto aparece o produto desses monômios.

Assim, para multiplicar os polinômios $p(x)$ e $q(x)$, que são formados por dois grupos de monômios, devemos escolher o primeiro monômio de $p(x)$ e fazê-lo apertar a mão de cada um dos monômios de $q(x)$, somando os monômios obtidos. Após isso, tomamos o segundo monômio de $p(x)$ e fazemos ele apertar a mão de cada um dos monômios de $q(x)$, somando os monômios obtidos aos monômios anteriores. Repetimos o processo até o último monômio de $p(x)$.

Deste modo, se $p(x) = x^2 + 2x - 3$ e $q(x) = -x^2 + 5x + 1$, para obter $p(x)q(x)$ fazemos:

$$\begin{aligned} p(x)q(x) &= -x^4 + 5x^3 + x^2 - 2x^3 + 10x^2 + 2x + 3x^2 - 15x - 3 \\ &= -x^4 + 3x^3 + 14x^2 - 13x - 3. \end{aligned}$$

Observe que com a definição de multiplicação de polinômios dada acima, o coeficiente c_0 é igual a a_0b_0. Do mesmo modo, o coeficiente do termo x^{n+m} é $c_{n+m} = a_nb_m$. Como $p(x)$ tem grau n (isto é, $a_n \neq 0$) e $q(x)$ tem grau m ($b_m \neq 0$), o coeficiente $c_{n+m} = a_nb_m \neq 0$. Logo, o polinômio $p(x)q(x)$ tem grau $n+m$. Com isso, demonstramos o seguinte fato:

Proposição 4.1. *Se o polinômio $p(x)$ tem grau n e o polinômio $q(x)$ tem grau m, então o polinômio $p(x)q(x)$ tem grau $n+m$.*

Um caso particular interessante é quando multiplicamos um número c, que podemos considerar como sendo um polinômio de grau zero $q(x) = c$, por um polinômio $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$. Neste caso, nós obtemos o polinômio:

$$cp(x) = ca_0 + ca_1x + \cdots + ca_nx^n.$$

Do mesmo modo em que podemos verificar as propriedades da soma de polinômios a partir das propriedades similares dos números reais, podemos também verificar as propriedades abaixo sobre a multiplicação de polinômios. Deixamos essa verificação como exercício:

1. *Associatividade*: Dados polinômios $p(x), q(x)$ e $t(x)$, vale

$$(p(x)q(x))t(x) = p(x)(q(x)t(x))$$

2. *Elemento Neutro*: Se 1 denota o polinômio constante e $p(x)$ é um polinômio qualquer:

$$1p(x) = p(x).$$

3. *Comutatividade*: Se $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios, então:

$$p(x)q(x) = q(x)p(x).$$

4. *Distributividade*: Se $p(x)$, $q(x)$ e $t(x)$ são polinômios, então:

$$(p(x) + q(x))t(x) = q(x)t(x) + p(x)t(x).$$

Note que, assim como nos inteiros, a propriedade de existência de elementos inversos para a multiplicação de polinômios não vale. De fato, podemos verificar que se $p(x)$ é um polinômio de grau n maior ou igual a um, então *não* existe um polinômio $q(x)$ tal que $p(x)q(x) = 1$. De fato, suponha por absurdo, que exista $q(x)$ um polinômio com grau $m \geq 0$ tal que

$$p(x)q(x) = 1.$$

Então, utilizando a Proposição 4.1 temos que o grau de $p(x)q(x)$ é $n + m$ que é maior ou igual que um. Como o grau do polinômio constante 1 é zero, temos que a igualdade acima não pode valer, onde chegamos a um absurdo.

Em resumo, os únicos polinômios que podem ter inversos com respeito à operação de multiplicação são os polinômios constantes não-nulos. Esta é mais uma das semelhanças entre os inteiros e os polinômios.

4.1.1 Algoritmo de Euclides

Diremos que um polinômio $a(x)$ divide o polinômio $b(x)$ se existir $q(x)$ tal que $b(x) = q(x)a(x)$.

Por exemplo, o polinômio $a(x) = x^2 + x + 1$ divide o polinômio $x^3 - 1$ pois

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = x^3 - 1.$$

Devido à Proposição 4.1, se o polinômio $a(x)$ divide o polinômio não-nulo $b(x)$, então o grau de $a(x)$ é menor ou igual ao grau de $b(x)$.

Agora, vamos enunciar um fato que vale para os inteiros e que vale também para os polinômios e que será de grande utilidade. Pedimos que o leitor releia o *Algoritmo de Euclides*, estudado no fascículo de Divisibilidade. No conjunto dos polinômios, ainda vale:

Teorema 4.2 (Algoritmo de Euclides). *Sejam $a(x)$ e $b(x)$ dois polinômios com coeficientes reais, $b(x) \neq 0$. Então, existem polinômios com coeficientes reais $q(x)$ e $r(x)$, com $r(x) = 0$ ou grau de $r(x)$ menor que o grau de $b(x)$ tais que:*

$$a(x) = b(x)q(x) + r(x).$$

Além disso, $q(x)$ e $r(x)$ estão determinados de modo único.

Observação 4.3. O Algoritmo de Euclides também é conhecido como *Algoritmo da Divisão*. Não iremos nos deter na prova do algoritmo da divisão, mas recomendamos a leitura do livro *Intodução à Álgebra*, citado no capítulo *Para saber mais*, para quem estiver curioso a respeito.

Por exemplo, se $a(x) = 10x^3 - 3x + 2$ e $b(x) = x^2 + 1$, tomando $q(x) = 10x$ e $r(x) = -13x + 2$ temos que

$$10x^3 - 3x + 2 = (x^2 + 1)10x + (-13x + 2).$$

Note que o grau de $r(x) = -13x + 2$ é menor que o grau de $b(x) = x^2 + 1$.

Se na expressão do polinômio $p(x)$ decidimos substituir a variável x por um número real s, estaremos *avaliando* o polinômio $p(x)$ em s e denotamos este número por $p(s)$.

Por exemplo, se $p(x) = x^2 + 3x + 1$, então substituindo x por 2, temos que

$$p(2) = 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 = 11$$

e fazendo $x = -3$

$$p(-3) = (-3)^2 + 3 \cdot (-3) + 1 = 1.$$

Quando $p(s) = 0$ dizemos que s anula o polinômio não-nulo $p(x)$, ou ainda, que s é uma raiz do polinômio $p(x)$.

Por exemplo, para $p(x) = x^3 - 8$, temos que 2 é uma raiz de $p(x)$ já que $p(2) = 2^3 - 8 = 0$.

Um fato muito importante que é conseqüência do algoritmo da divisão é o seguinte Teorema:

Teorema 4.4. *Se s é uma raiz do polinômio $p(x)$, então o polinômio $x - s$ divide $p(x)$. Reciprocamente, se $x - s$ divide $p(x)$, então s é raiz de $p(x)$.*

Demonstração. Primeiramente, assuma que $x - s$ divida $p(x)$. Neste caso, existe um polinômio $q(x)$ tal que $p(x) = q(x)(x - s)$. Avaliando o polinômio $p(x)$ em s, temos que:

$$p(s) = q(s)(s - s) = q(s) \cdot 0 = 0.$$

Logo s é uma raiz de $p(x)$.

Para provar que se s é uma raiz de $p(x)$ então $x - s$ divide $p(x)$, vamos utilizar o algoritmo da divisão, com $a(x) = p(x)$ e $b(x) = x - s$. Neste caso, temos que existem $q(x)$ e $r(x)$ de modo que $r(x) = 0$ ou o grau de $r(x)$ é menor que o grau de $x - s$ e além disso vale:

$$p(x) = q(x)(x - s) + r(x).$$

Observe que, com as condições do resto $r(x)$, podemos escrever que $r(x) = c \in \mathbb{R}$. Então, $p(x) = q(x)(x - s) + c$ e $0 = p(s) = q(s) \cdot 0 + c = c$. Portanto, $r(x) = 0$ e $p(x) = q(x)(x - s)$, isto é, $x - s$ divide $p(x)$. □

A proposição anterior nos permite determinar o número máximo de raízes reais de um polinômio não-nulo. De fato, vamos mostrar:

Proposição 4.5. *O número máximo de raízes do polinômio não-nulo $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ é n.*

Demonstração. Digamos que $s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ sejam raízes distintas do polinômio $p(x)$. Observe que podemos utilizar a proposição 4.4 para garantir que existe um polinômio não-nulo $q_1(x)$ tal que

$$p(x) = q_1(x)(x - s_0).$$

Assim, pela Proposição 4.1, o grau de $q_1(x)$ deve ser igual a $n - 1$. Note que $p(s_i) = q_1(s_i)(s_i - s_0)$. Como para todo $i = 1, 2, \ldots, k$ temos que $s_i > s_0$ com $p(s_i) = 0$, temos que, necessariamente, $q_1(s_i) = 0$. Assim, em particular, temos que $q_1(s_1) = 0$. Logo, podemos aplicar a proposição novamente para obter que existe um polinômio não-nulo $q_2(x)$ tal que

$$q_1(x) = q_2(x)(x - s_1).$$

Assim, como o grau de $q_1(x)$ é $n - 1$, pela Proposição 4.1, o grau de $q_2(x)$ deve ser igual a $n - 2$.

Novamente, temos que $q_1(s_i) = q_2(s_i)(s_i - s_1)$, $s_i > s_1$ e $p(s_i) = 0$ para todo $i = 2, \ldots, k$. Disto segue que, necessariamente, $q_2(s_i) = 0$, se $i = 2, 3, \ldots, k$. Assim, temos que $q_2(s_2) = 0$.

Logo, podemos repetir esse argumento para obter um polinômio $q_3(x)$ de grau $n - 3$, de modo que $s_3, s_4, \ldots, s_k$ são raízes de $q_3(x)$. Repetindo o argumento, encontramos uma seqüência $q_1(x)$, $q_2(x)$, $q_3(x), \ldots$ com graus $n-1, n-2, n-3, \ldots$ o que nos leva a concluir que não podemos repetir esse argumento mais que n vezes, já que os graus dos polinômios $q_1(x), q_2(x), q_3(x), \ldots$ estão diminuindo, começam em $n - 1$ e grau ≥ 0. Ou seja, não podemos ter mais que n raízes para o polinômio $p(x)$, o que conclui a prova.

$\square$

Alertamos que, apesar da proposição nos garantir que existem no *máximo* n raízes reais de um polinômio de grau n não-nulo, existem polinômios que *não* possuem raízes reais. Por exemplo, $p(x) = x^2 + 1$ não possui nenhuma raiz real, já que $x^2 \geq 0$ para todo número real x. Isso será discutido com um pouco mais de detalhe no apêndice deste livro.

Uma conseqüência da Proposição 4.5 é a seguinte:

Proposição 4.6. *Se dois polinômios $p(x)$ e $q(x)$ de grau n avaliados em $n+1$ números $r_1, r_2, \ldots, r_{n+1}$ coincidem, isto é, $p(r_i) = q(r_i)$ para $i = 1, 2, 3, \ldots, n+1$, então $p(x)$ e $q(x)$ são iguais.*

Demonstração. Considere o polinômio $t(x) = p(x) - q(x)$. Observe que se $t(x)$ é não-nulo, o grau de $t(x)$ é no máximo n, já que $p(x)$ e $q(x)$ têm graus iguais a n. Observe ainda que $t(r_i) = 0$, já que $p(r_i) = q(r_i)$ e

$$t(r_i) = p(r_i) - q(r_i) = 0.$$

Logo, $t(x)$ tem grau no máximo n e mais de n raízes, contradizendo a Proposição 4.5. $\square$

No Exercício 23 faremos uma aplicação interessante dessa proposição, propondo que você prove que dados números reais a_1, a_2, $\ldots$, a_{n+1} e $r_1, r_2, \ldots, r_{n+1}$, então existe um único polinômio de grau n tal que $p(r_i) = a_i$.

4.2 Exercícios

1. Calcule o quociente e o resto da divisão de $p(x)$ por $q(x)$ para os polinômios $p(x)$ e $q(x)$ dados:

   (a) $p(x) = 3x^3 - 2x + 1$ e $q(x) = -7x - 1$;

   (b) $p(x) = x^5 - 1$ e $q(x) = x - 1$;

   (c) $p(x) = 3x^5 - 2x^3 + 1$ e $q(x) = x^2 + x + 1$

2. Encontre os valores de A e B de forma que

$$\frac{x+1}{x^2 - x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}.$$

3. Se os polinômios $x^2 - x + 4$ e $(x-a)^2 + (x+b)$ são iguais, encontre $a + b$.

4. Quais os valores de a e b que tornam iguais os polinômios $P_1(x) = x^2 - x - 6$ e $P_2(x) = (x + a)^2 - b$?

5. A divisão de $P(x)$ por $x^4 + 1$ tem quociente $x + 2$ e resto 1. Encontre o polinômio $P(x)$.

6. Qual o resto da divisão do polinômio x^{100} por $x + 1$?

7. Determine o resto da divisão do polinômio $p(x)$ pelo polinômio $g(x) = x$, onde $p(x) = (x - 1)(x - 2) \dots (x - n) + b$.

8. Mostre que $x^n - 1$ é divisível por $x - 1$ para todo $n \geq 1$.

9. Faça os seguintes itens:

   (a) Encontre o quociente da divisão de $x^{n+1} - 1$ por $x - 1$;

   (b) Utilize a divisão anterior para calcular a soma $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$ dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de razão x.

10. Determine o valor de a para que o polinômio $P(x)$ seja divisível por $x - a$, onde $P(x) = x^3 + (1 - a)x^2 + (1 + a)x - 1$.

11. Mostre que o polinômio $P(x) = x^{100} - 2x^{50} + 1$ é divisível por $x^2 - 1$.

12. Mostre que o resto $r(x)$ da divisão do polinômio $p(x)$ por $x - s$ é $r(x) = p(s)$.

    Dado o polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ definimos a *derivada* de $p(x)$ como sendo o polinômio:

    $$p'(x) = na_n x^{n-1} + (n - 1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2 x + a_1.$$

    Por exemplo, a derivada do polinômio x^5 é o polinômio $5x^4$ e a derivada do polinômio $x^3 + 5x^2 + 2x - 1$ é o polinômio $3x^2 + 10x + 2$.

13. Sabendo disso, calcule:

    (a) A derivada dos polinômios:

    i. $x+1$
    ii. x^4+3
    iii. $1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n$

    (b) Sabendo que $p(0)=1$, calcule também o polinômio $p(x)$ cuja derivada é:

    i. x^4.
    ii. $-x^2+1$.
    iii. x^3+2x^2+3.

    (c) Prove que se $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios, então

    i. $(p+q)'(x)=p'(x)+q'(x)$
    ii. $(pq)'(x)=p'(x)q(x)+p(x)q'(x)$
    Dica: faça primeiro para monômios.

Definimos uma *raiz múltipla* de um polinômio $p(x)$ como sendo uma raiz a tal que $(x-a)^2$ divide $p(x)$. Caso a seja uma raiz que não é raiz múltipla, dizemos que ela é *raiz simples*.

14. Mostre que a é raiz múltipla de um polinômio $p(x)$ se, e somente se, a é raiz de $p(x)$ e de $p'(x)$.

    Dica: use o exercício anterior.

15. Para quais valores de $n\in\mathbb{N}$ tem-se que

    (a) $1+x^2+x^4+\ldots+x^{2n-2}$ é divisível por $1+x+\ldots+x^{n-1}$?
    (b) $1+x^3+x^6+\ldots+x^{3n-3}$ é divisível por $1+x+\ldots+x^{n-1}$?
    (c) Generalize.

16. (a) Resolva a equação $20x^3-30x^2+12x-1=0$, sabendo-se que $\dfrac{1}{2}$ é uma de suas raízes.

(b) Uma raiz da equação $x^3-(2a+1)x^2+a(a+2)x-a(a+1)=0$ é $a+1$, ache as outras duas.

17. Ache os possíveis valores de $a \in \mathbb{Z}$ para que o polinômio

$$a^2x^4 + 4x^3 + 4ax + 7$$

seja divisível por $x+1$.

Um polinômio com coeficientes reais não-constante $p(x)$ é dito *irredutível* se $p(x) = a(x)b(x)$, então $a(x)$ ou $b(x)$ são polinômios constantes. Quando $p(x)$ não for irredutível, diremos simplesmente que ele é *redutível*. Os polinômios irredutíveis desempenham papel análogo no conjunto dos polinômios ao dos números primos em $\mathbb{Z}$.

18. Prove que todo polinômio de grau 1 é irredutível.

19. Prove que se $f(x)$ é um polinômio de grau ≥ 2 e possui uma raiz real, então $f(x)$ é redutível.

20. Mostre que todo polinômio $f(x)$ de grau ímpar ≥ 3 é redutível.

Um polinômio com coeficientes inteiros não-constante $p(x)$ é dito *irredutível sobre* $\mathbb{Q}$ se $p(x) = a(x)b(x)$ com $a(x)$ e $b(x)$ polinômios com coeficientes racionais, então $a(x)$ ou $b(x)$ são polinômios constantes.

Um Teorema importante que descreve uma condição para um polinômio ser irredutível sobre $\mathbb{Q}$ é:

Teorema 4.7 (Critério de Eisenstein). *Seja* $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ *um polinômio com coeficientes inteiros. Suponha que exista um primo* p *tal que:*

(a) $p \nmid a_n$;

(b) $p \mid a_0,\ p \mid a_1,\ \ldots,\ p \mid a_{n-1}$;

(c) $p^2 \nmid a_0$.

Então, $f(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$.

Para uma prova desse Teorema veja o livro *Introdução à Álgebra*, citado no capítulo *Para saber mais*. Faça os seguintes problemas:

21. Mostre que os seguintes polinômios $f(x)$ são irredutíveis sobre $\mathbb{Q}$. [Sugestão: Use o Critério de Eisenstein].

    (a) $f(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2$;
    (b) $f(x) = x^6 + 15$;
    (c) $f(x) = x^4 + 10x^3 + 20x^2 + 30x + 22$.

22. Determine quais dos polinômios abaixo são irredutíveis sobre $\mathbb{Q}$. [Sugestão: Use o Critério de Eisenstein].

    (a) $x^3 - x + 1$
    (b) $x^3 + 2x + 10$
    (c) $x^4 - x + 1$

O problema a seguir trata do polinômio de interpolação de Lagrange:

23. Demonstre a proposição a seguir:

Polinômio de Interpolação de Lagrage: Sejam a_i, b_i em $\mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$, com os ${a_i}'$s dois a dois distintos e os ${b_i}'$s nem todos nulos. Considere os polinômios

$$p_i(x) = b_i \frac{(x-a_i)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_n)}{(a_i-a_1)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n)}$$

para $i = 1, 2, \dots, n$. Então, o polinômio

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x)$$

é o único polinômio de grau menor que n, tal que $p(a_i) = b_i$, para todos $i = 1, 2, \ldots, n$.

24. Determine o polinômio $p(x)$ de grau 7 tal que

$$p(1) = p(2) = \cdots = p(7) = 8 \text{ e } p(0) = 1.$$

Capítulo 5

Apêndice

Pode parecer frustrante o fato de que um polinômio com coeficientes reais pode não possuir raízes reais. Por exemplo, quando tentamos aplicar a fórmula de Bhaskara à equação $x^2 + 1 = 0$, encontramos $\Delta = -4$ e, consequentemente, se fosse possível escrever as soluções, elas se escreveriam como

$$x_1 = \frac{\sqrt{-4}}{2}$$

e

$$x_2 = -\frac{\sqrt{-4}}{2}$$

É claro que as expressões acima não têm sentido no conjunto dos números reais, pois não existe número cujo quadrado seja -4, ou seja, não é possível extrair a raiz quadrada de -4. Isso tirou o sono de várias gerações de matemáticos. Desde Herón de Alexandria há dois mil anos atrás, os matemáticos encontram expressões como a do tipo acima, envolvendo raízes de números negativos.

A primeira reação da comunidade matemática foi rejeitar esses números *complexos* e simplesmente desconsiderar raízes de números negativos. Porém, já no século XVI, Cardano se deu conta de que os números complexos surgem naturalmente quando desejamos resolver uma equação do terceiro ou quarto grau, mas relutavam quanto ao seu uso, dizendo que esses números eram "tão sutis, quanto inúteis".

No século seguinte, motivado pela sugestão de Albert Girard que uma equação de grau n possui n raízes, Reneé Descartes observou que os números reais eram insuficientes para representar todas essas raízes e utilizou o termo *imaginárias* para as raízes que não são reais.

A notação tradicional $i = \sqrt{-1}$ só veio a ser introduzida um século mais tarde, com Leonard Euler, que também é o pai do termo *número complexo*. Euler e o matemático francês Jean D'Alambert fizeram aplicações dos números complexos a problemas práticos, como projeção de mapas e hidrodinâmica. Euler e Lagrange, grandes matemáticos da história da humanidade, tentaram mostrar a afirmação de Girard, de que *uma equação de grau n possui n raízes*, mas sem sucesso. A primeira prova correta de tal teorema só apareceu no final do século XVIII com os trabalhos de Gauss.

5.1 Números complexos e raízes de polinômios

O conjunto dos números complexos, denotado pela letra $\mathbb{C}$, é o conjunto das expressões

$$\mathbb{C} = \{x + iy; x, y \in \mathbb{R}\},$$

onde i satisfaz $i^2 = -1$. Costuma-se denotar i por $\sqrt{-1}$. Destacamos que i é meramente um símbolo que nos ajudará a definir as operações de soma e de multiplicação de números complexos. Essas operações terão as mesmas propriedades que as operações de números reais, como associatividade, comutatividade, elemento neutro, etc. Por exemplo, são números complexos $2 - 3i, 3 + i$ e $-3i$.

5.1.1 Operações com números complexos

Vamos definir a soma e multiplicação de números complexos. Dados dois números complexos $a+bi$ e $c+di$ definimos a soma como:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+b)+(c+d)i$$

e definimos a multiplicação como

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i$$

Por exemplo, se tomamos os números $2-3i$ e $3+4i$ então

$$(2-3i)+(3+4i)=5+i$$

e

$$(2-3i)(3+4i)=(2\cdot 3-(-3\cdot 4))+(-3\cdot 3+2\cdot 4)i=18-i.$$

Aqui nós estamos considerando $0+3i=3i$ e $3+0\cdot i=3$. Isso nos permite *colocar* os números reais dentro do conjunto dos números complexos, considerando cada número real r como sendo um número complexo da forma $r+0\cdot i$.

Fica para o leitor a verificação de que valem as propriedades de associatividade, comutatividade, etc. O elemento neutro da soma é o elemento $0+0\cdot i$ que simplesmente denotaremos por 0. Do mesmo modo, o elemento neutro da multiplicação é $1+0\cdot i$, que será denotado por 1.

Assim, dado um número complexo z faz sentido avaliar o polinômio (de coeficientes complexos ou reais) $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ em z, obtendo o número complexo

$$p(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0.$$

Por exemplo, se $p(x)=x^2+4$, então $2i$ e $-2i$ são raízes deste polinômio, já que:

$$p(2i)=(2i)^2+4=-4+4=0.$$

e

$$p(-2i) = (-2i)^2 + 4 = 4i^2 + 4 = -4 + 4 = 0.$$

Note que $p(x)$ não possui nenhuma raiz real, mas possui duas raízes complexas. Como já mencionamos, a grande vantagem em utilizar os números complexos ao invés dos números reais é que dado um polinômio qualquer com coeficientes complexos, ele sempre tem uma raiz complexa. Isso foi o assunto da tese de doutorado do *príncipe da Matemática*, Johann Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855):

Teorema 5.1 (Teorema Fundamental da Álgebra). *Todo polinômio $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ com coeficientes complexos possui pelo menos uma raiz complexa.*

Uma demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra foge do objetivo deste texto. Podem ser dadas várias demonstrações diferentes desse teorema, utilizando diversas teorias matemáticas avançadas.

O leitor interessado em mais informações sobre os números complexos pode consultar o livro *Curso de Álgebra, Volume 1*, citado no capítulo *Para saber mais*.

Capítulo 6

Para saber mais

A seguir, damos alguns textos onde podem ser encontrados materiais auxiliares e complementares sobre equações, inequações e polinômios. Recomendamos os seguintes livros para quem quiser complementar a leitura. A maioria deles pode ser adquirida pelo site www.sbm.org.br.

Livros:

Sobre equações, polinômios ou números complexos:

- **Temas e Problemas Elementares**. Coleção Professor de Matemática, IMPA, 2005. Autores: Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto César Morgado.

- **Temas e Problemas**. Coleção Professor de Matemática, IMPA, 2001. Autores: Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto César Morgado.

- **Fundamentos de Matemática Elementar: Complexos,**

Polinômios e Equações, Volume 6. São Paulo: Editora Atual, 2006. Autores: Gelson IEZZI e S. HAZZAN.

- **Curso de Álgebra, Volume 1**. Coleção Matemática Universitária, IMPA, 1995. Autor: Abramo Hefez.
- **Introdução à Álgebra**. Projeto Euclides, IMPA, 2006.

  Autor: Adilson Gonçalves.
- **A Matemática do Ensino Médio - Volume 1**. Coleção Professor de Matemática, IMPA, 2001. Autores: Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto César Morgado.
- **A Matemática do Ensino Médio - Volume 3**. Coleção Professor de Matemática, IMPA, 2001. Autores: Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto César Morgado.

Sobre equação do terceiro grau:

- **Meu Professor de Matemática**. Coleção Professor de Matemática, IMPA, 1997. Autor: Elon Lages Lima.
- **A Matemática do Ensino Médio - Volume 3**. Coleção Professor de Matemática, IMPA, 2001. Autores: Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto César Morgado.

Artigos:

Na revista Eureka! podem ser encontrados os seguintes artigos:

- *Desigualdades Elementares.*

  Autor: Antonio Caminha Muniz Neto

- *Trigonometria e desigualdades em problemas de olimpíadas.*

  Autor: Rafael Tajra Fonteles

- *A fórmula de Cardano além das cúbicas.*

  Autor: José Cloves Saraiva

Na Revista do Professor de Matemática podem ser encontrados os seguintes artigos:

- *Uma maneira abreviada de resolver algumas inequações.*

  Autor: Raymundo Tavares, RPM 05.

- *Equações do segundo grau: completando quadrados.*

  Autor:Antonio L. P. Pastor, RPM 06.

- *Método de Viète para as equações do segundo grau.*

  Autor: João Amaral, RPM 13.

- *Raízes racionais de uma equação algébrica com coeficientes inteiros.*

  Autor: Lenimar Andrade, RPM 14.

- *A solução de Tartaglia para a equação do 3^o grau.*

  Autor: César Milies, RPM 25.

- *Uma solução das equações do 3º e 4º graus.*
  Autor: Carlos Gustavo T.A. Moreira, RPM 25.
- *A desigualdade de Cauchy-Schwarz.*
  Autor: Eduardo Wagner, RPM 27.
- *Equações e inequações com radicais.*
  Autor: Geraldo Ávila, RPM 38.

Sites:

- *Olimpíada Brasileira de Matemática*
  www.obm.org.br
- *Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas*
  www.obmep.org.br
- *Site de Problemas de Matemática - Inglaterra*
  www.kalva.daemon.co.uk
- *Olimpíada Argentina de Matemática*
  www.oma.org.ar
- *Cut the Knot - Site de temas de matemática*
  www.cut-the-knot.org
- *Tio Petros - Blog de Matemática*
  www.blogia/tiopetrus
- *Site do Grupo Teorema - Ceará*
  www.teorema.mat.br