Geometria
Congruência e Semelhança

Samuel Jurkiewicz

Sumário

Convenções e fatos básicos

0.1 Convenções

Ao longo desta apostila usaremos algumas convenções.

- Ângulos podem ser simbolizados por letras maíusculas, designando o seu centro: A, B.
- Em caso de necessidade podem ser também simbolizados pela seqüencia de pontos que o caracterizam, com um acento circunflexo abrangente: $\widehat{ABC}$.
- Segmentos serão simbolizados pelas letras designando seus pontos extremos com um traço em cima: $\overline{AB}$.
- Retas serão simbolizadas por letras designando pontos a ela pertencentes com uma dupla seta em cima: $\overleftrightarrow{AB}$.
- Semi-retas serão simbolizadas por letras designando o ponto extremo e outro ponto a ela pertencentes com uma seta em cima, indo do primeiro para o segundo: $\overrightarrow{AB}$.
- Triângulos serão simbolizados por $\triangle ABC$.

Veremos adiante que é importante que não façamos confusão entre os ângulos e suas medidas; ou entre os segmentos e suas medidas.

- A **medida** do ângulo A ou $\widehat{ABC}$ será indicada por $\angle A$ ou $\angle\widehat{ABC}$.
- A **medida** do segmento $\overline{AB}$ será indicada por $[\overline{AB}]$.

A distância entre dois pontos é uma noção bastante intuitiva. Mas precisaremos também da distância entre umponto e uma reta.

- A **distância de um ponto** A **a uma reta** $\overleftrightarrow{XY}$ é a menor entre as distâncias entre o ponto A e um dos pontos da reta. Se A não estiver sobre a reta esseo ponto P (que é único) determina com A a reta $\overleftrightarrow{AP}$ perpendicular à reta $\overleftrightarrow{XY}$.

0.2 fatos básicos

0.2.1 Ângulos opostos pelo vértice

Duas retas r e s que se intersectam num ponto P produzem 4 ângulos. Oa ângulos não adjacentes são chamados **opostos pelo vértice**. Dois ângulos opostos pelo vértice tem a mesma medida. Na figura 0.2.1, $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$.

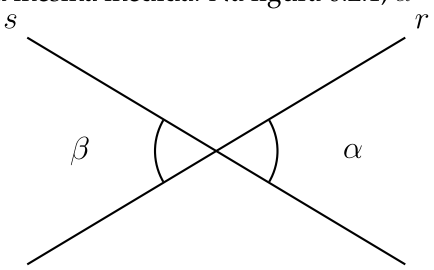


Figura 0.2.1 Ângulos opostos pelo vértice

0.2.2 Paralelas cortadas por uma reta transversal

Duas retas paralelas r e s cortadas por uma transversal t produzem ângulos de dois tipos:

- De medida igual
- Suplementares , isto é, sua soma é igual a 180^o

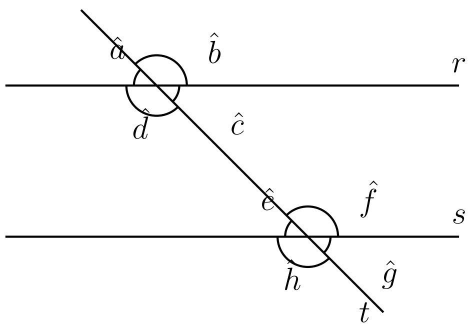


Figura 0.2.2 Paralelas cortadas por uma transversal

É comum nomear os pares de ângulos segundo sua disposição relativa (fica ao leitor determinar emm qual dos dois casos os pares se enquadram):

- Colaterais internos: $\widehat{d} + \widehat{e} = \widehat{c} + \widehat{f} = 180^o$.
- Colaterais externos: $\widehat{a} + \widehat{e} = \widehat{b} + \widehat{f} = 180^o$.
- Alternos internos: $\widehat{c} = \widehat{e}$; $\widehat{d} = \widehat{f}$.
- Alternos externos: $\widehat{a} = \widehat{g}$; $\widehat{b} = \widehat{h}$.
- Correspondentes: $\widehat{a} = \widehat{e}$; $\widehat{b} = \widehat{f}$; $\widehat{c} = \widehat{g}$; $\widehat{d} = \widehat{h}$.

Teorema: A soma dâs medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180^o.

Demonstração: (Veja figura a figura 0.2.2) Seja o triângulo $\triangle ABC$. Pelo ponto C passamos uma paralela ao lado $\overline{AB}$. Temos $\widehat{a} = \widehat{d}$ (ângulos alternos internos); $\widehat{c} = \widehat{e}$ (ângulos alternos internos). Então $\widehat{d} + \widehat{b} + \widehat{e} = \widehat{a} + \widehat{b} + \widehat{c} = 180^o$, o que completa a demonstração.

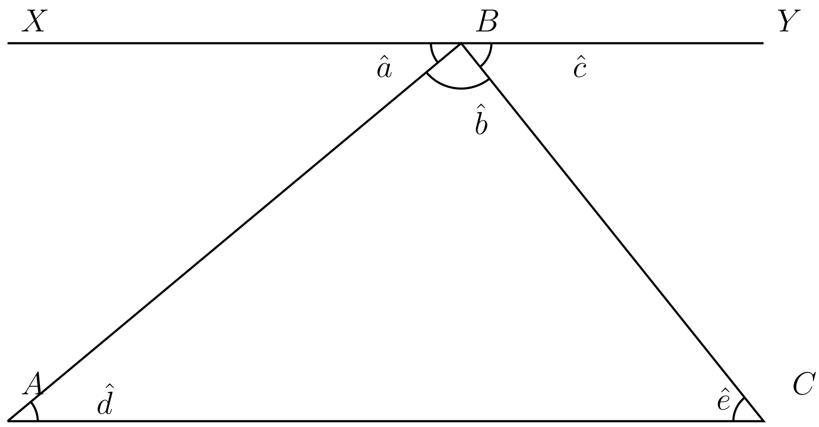


Figura: 0.2.2 A soma dos ângulos de um triângulo

0.2.3 Classificação de triângulos

Classificamos triângulos segundo a medida dos seus lados e a medida dos seus ângulos. Quanto aos lados um triângulo pode ser:

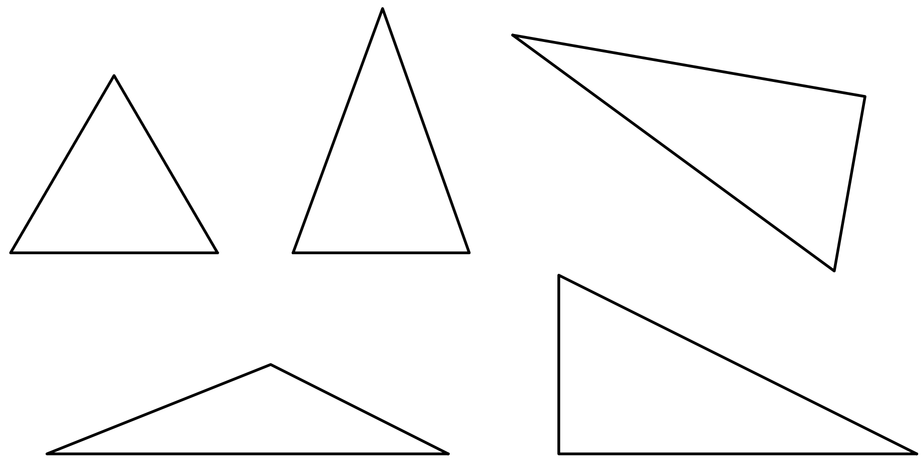
- Equilátero: Todos os lados com mesma medida;
- Isósceles: Pelo menos dois lados com mesma medida;
- Escaleno: Todos os 3 lados podem ter medidas diferentes.

Atenção! - É importante saber tirar o maior proveito dos resultados obtidos. Por exemplo, se provarmos alguma propriedade porque o triângulo tem dois lados de mesma medida, isso valerá também para o triângulo equilátero.

Quanto aos ângulos um triângulo pode ser (essa classificação utiliza o fato de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180^o):

- Acutângulo: Todos os ângulos menores que 90^o;
- Retângulo: Um ângulo igual a 90^o.
- Obtusângulo: Um ângulo maior que 90^o.

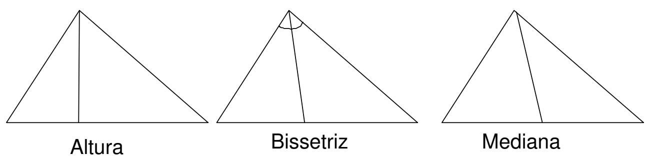
Tente classificar os triângulos abaixo quanto à medida dos ângulos e quanto à medida dos lados.



0.2.4 Linhas notáveis do triângulo

A cada vértice/ângulo de um triângulo associamos três retas especiais:

- **Altura** - O segmento de reta que passa pelo vértice e é perpendicular ao lado oposto a êle. Também usamos a palavra "altura" para designar a medida da distância do vértice ao lado oposto.
- **Bissetriz** - A reta que divide o ângulo em dois ângulos iguais.
- **Mediana** - O segmento de reta que liga o vértice ao ponto médio do lado oposto.



Capítulo 1

Congruência

1.1 igualdade e congruência

É comum dizermos que "uma coisa é igual a outra" querendo dizer que elas tem as mesmas características. Na maior parte das vezes isso não gera confusão.

Mas em Matemática a palavra "igual" tem um significado mais restrito. Quando escrevemos "$A = B$ (A é igual a B)" queremos dizer que "A é a mesma coisa que B".

Bem, isso nos traz algumas complicações. Na figura 1.1, por exemplo, vemos 2 triângulos cujos lados correspondentes têm a mesma medida. Em uma situação qualquer diríamos que eles são "iguais"; em Matemática não podemosfazer isso, pois eles não são o **mesmo** triângulo.

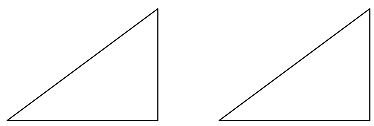


Figura 1.1: Dois triângulos congruentes

Neste caso, usamos uma palavra especial. Diremos que os triângulos são **congruentes**.

Infelizmente nossos problemas ainda não acabaram. Quando dizemos que "duas figuras são congruentes"?. Uma primeira tentativa é dizer que a figura X e a figura Y são congruentes quando podemos "deslizar" X sobre Y de modo que elas se superponham. Em Matemática esse deslizamento é feito por uma operação de "transformar X em Y por **translação**". Uma translação é feita em uma determinada direção, acompanhando uma reta, ou melhor um conjunto de retas paralelas. Veja a figura 1.1. Cada ponto do triângulo é transportado a uma mesma distância.

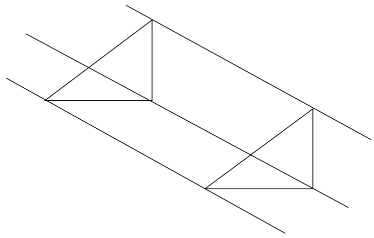


Figura: 1.1 Translação de um triângulo

A nossa idéia parece boa, mas ainda não dá conta de todas as situações. Veja a figura 1.2. Não há translação ou mesmo seqüência de translações que façam um triângulo se superpor ao outro.

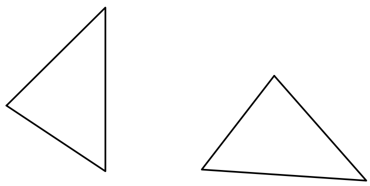


Figura 1.2: Como superpor os triângulos?

Na figura 1.3 vemos que uma rotação em volta de um determinado centro consegue fazer um triângulo se superpor ao outro. Note que as distâncias ao centro são diferentes, mas o ângulo de rotação tem a mesma medida. Essa transformação é chamada de "rotação" e depende da determinação de um centro e de um ângulo.

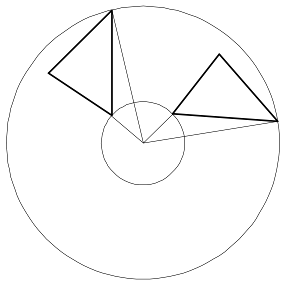


Figura 1.3: Rotação de um triângulo

Um fato importante é que as rotações podem ser usadas para produzir translações. A figura 1.4 mostra uma rotação de X sobre T e uma outra rotação de T sobre Y, produzindo uma translação dX sobre Y.

Exercício: Como posso determinar os centros de rotação que produzem uma determinada translação? Verifique que há uma infinidade de soluções.

Até agora observamos que podemos precisar de translações e/ou rotações para sobrepor figuras congruentes. Na verdade só precisamos das rotações, uma vez que elas podem produzir translações. Será que isso basta?

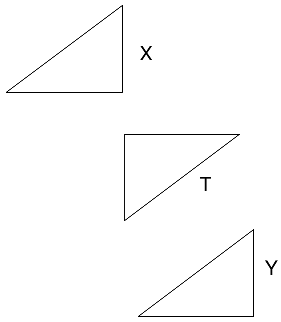


Figura 1.4: Duas rotações produzem uma translaçao

Na verdade ainda há um último obstáculo a ser transposto: veja a figura 1.5. Elas não podem ser supepostas por translação nem por rotação.

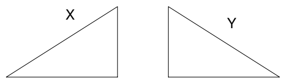


Figura 1.5: Duas figuras que não podemser superpostas por translação ou rotação

Aqui vamos fazer uma pequena digressão: se estas figuras fossem peças finas de madeira poderíamos pegar uma delas e virar. Isso só foi possível porque as figuras estão no plano (duas dimensões) e nós vivemos no espaço (três dimensões). Mas então usamos um "truque"!

Vamos explicar melhor; nossas mãos esquerda e direita são (mais ou menos) congruentes. Mas não conseguimos sobrepô-las por meio de translação ou rotação (pare e pense!) E não podemos "virar" uma das mãos usando a ... 4^a dimensão. Felizmente podemos fazer estas transformações sem sair do plano (ou da 3^a dimensão, no caso das mãos).

O que faremos é usar um "espelhamento" que atende pelo nome de **simetria em relação a uma reta** ou **simetria axial**. É como se colocássemos uma reta/espelho entre as duas figuras de modo que cada ponto de uma figura está colocado à mesma distância do ponto a ser sobreposto só que do outro lado da reta. Veja a figura 1.6.

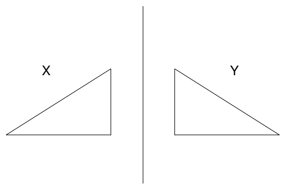


Figura 1.6: Simetria axial

Observemos agora que a simetria axial é uma transformação muito poderosa. Ela pode produzir qualquer rotação. Veja o exemplo na 1.7

Exercício: Como posso determinar as retas (eixos de simetria) que produzem uma determinada rotação? Verifique que há uma infinidade de

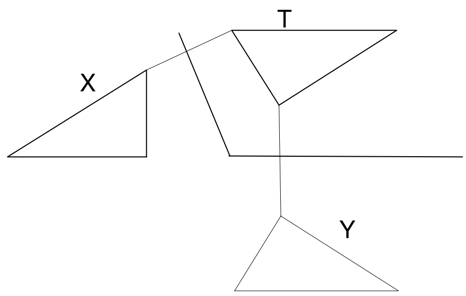


Figura 1.7: Duas simetrias axiais formam uma rotação

soluções.

Exercício: Como posso determinar as retas (eixos de simetria) que produzem uma determinada translação? Verifique que há uma infinidade de soluções.

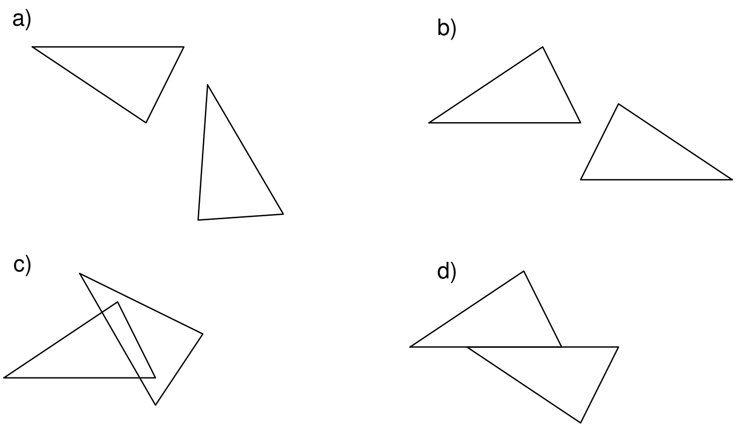
Translação, rotação, simetria axial, nossos problemas estão no fim. Melhor ainda, podemos contar apenas com as simetrias axiais, já que elas podem produzir as translações e as rotações. Finalmente podemos definir:

Definição: Duas figuras planas são congruentes qundo uma puder se sobrepor a outra por uma seqüência finita de simetrias axiais.

O símbolo que usaremos para congruência será $\cong$.

Exercício: Quantas simetrias axiais preciso usar, no máximo, para sobrepor duas figuras congruentes?

Exercício: Que transformações você usaria para sobrepor os pares de figuras?



1.2 Congruência de triângulos

1.2.1 O caso LLL

Até agora tratamos a Geometria com relativa informalidade. A congruência pode parecer simples mas demonstrar rigorosamente que dois círculos de mesmo raio são congruentes pode ser uma dor de cabeça. Optamos por começar o estudo de congruência pelos triângulos pois são as figuras geométricas mais simples, depois dos segmentos e dos ângulos.

Não é difícil aceitar que dois segmentos com a mesma medida são congruentes - afinal "poder sobrepor" dois segmentos é basicamente a definição de "ter a mesma medida". Da mesma forma dois ângulos de mesma medida serão sempre congruentes.

Um triângulo será congruente a outro se puder ser superposto a outro por translação, rotação ou simetria axial. Aceitaremos como um fato (postulado) que para isso basta que a medida dos lados e ângulos correspondentes seja igual.

Na verdade precisamos menos que isso. Quem já tentou construir triângulos com 3 varetas já percebeu que o triângulo formado é sempre congruente. Isso parece óbvio mas lembre que ao construir quadriláteros com 4 varetas o resultado pode variar, podemos fabricar figuras não congruentes (veja a figura 1.8).

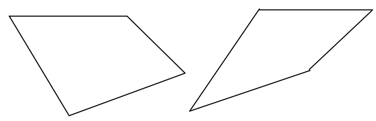


Figura 1.8: Dois quadriláteros não congruentes com lados congruentes

Então aceitaremos como fato (postulado) que:

Caso LLL: Seja dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$. Se os lados correspondentes dos triângulos forem congruentes, os triângulos são congruentes.

Embora a Geometria trate de objetos abstratos - linhas, retas, pontos - é sempre útil desenhar e fazer esquemas que nos dêem uma idéia do que estamos falando. Para isso precisaremos de:

- Régua graduada - normalmente de 30 cm, graduada em centímetros.
- Compasso - com uma ponta "seca" (uma ponta de metal) e uma ponta que desenha (grafite ou lápis).
- Lápis bem apontado.
- Borracha
- Papel

Exercício: Construa $\triangle ABC$ com lados medindo 8 cm,6 cm e 4 cm.

O procedimento está ilustrado na figura 1.9. Com a régua traçamos um segmento $[\overline{AB}] = 8$ cm e marcamos os pontos X e Y tais que $[\overline{AX}] = 6$ cm e $[\overline{BY}] = 4$ cm.

Desenhamos o círculo com centro (ponta sêca) em A e raio $[\overline{AX}]$(abertura do compasso). Não precisa traçar o círculo todo, basta um **arco**; todos os pontos deste arco estão à distância de 6 cm de A. Desenhamos o arco com centro em B e com raio $[\overline{BY}]$; todos os pontos deste arco estão a 4 cm de B. A intercessão dos dois arcos é o pont C.

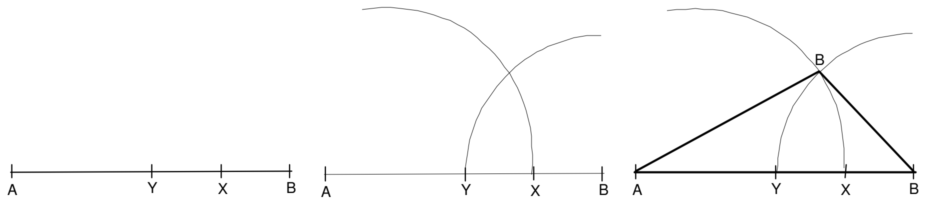


Figura 1.9: Construção LLL

Se duas pessoas construirem um triângulo com os lados com estas medidas, esses triângulos serão congruentes. Note-se que essa construção faz aparecer simultâneamente dois triângulos congruentes, que tem simetria axial (figura 1.10). O eixo de simetria é a reta $\overleftrightarrow{AB}$.

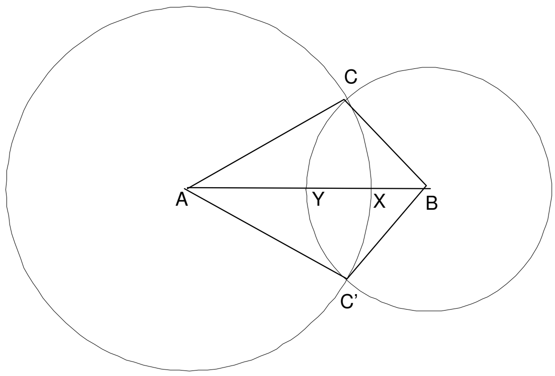


Figura 1.10: Construção de dois triângulos congruentes

1.2.2 Uma aplicação do caso LLL - Transporte de ângulos

Digamos que quero transportar o ângulo $\widehat{A}$ de modo a obter um ângulo com centro em A' e apoiado na semi-reta $\overrightarrow{AB}$ (veja figura 1.11).

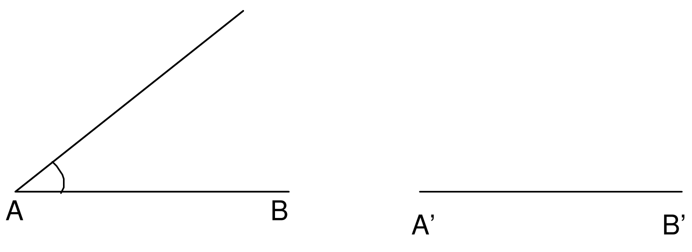


Figura 1.11: Transporte de ângulo

Basta fabricar um triângulo com as mesmas medidas de lados; a congruência dos lados garante a congruência dos triângulos que por sua vez garante a congruência dos ângulos (figura 1.12).

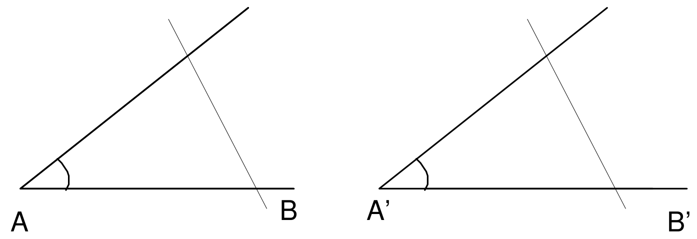


Figura 1.12: Transporte de ângulo

1.2.3 O caso LAL

Usando o caso LLL podemos provar (mas não faremos) que:

Caso LAL: Seja dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$. Se $[\overline{AB}] = [\overline{A'B'}]$, $[\overline{AC}] = [\overline{A'C'}]$ e $[\angle A] = [\angle A']$ então $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

1.2.4 Aplicação - Construção da mediatriz de um segmento

Problema: Dado um segmento $\overline{AB}$, encontrar o ponto C tal que $[\overline{AC}] = [\overline{CB}]$.Passar por este ponto uma reta perpendicular ao segmento $\overline{AB}$.

Vamos acompanhar a construção com a figura 1.13.

1. Abrir o compasso em uma abertura qualquer maior do que a metade de $[\overline{AB}]$. Traçar arcos com centro em A e B. O encontro destes arcos é o ponto D

2. Abrir o compasso em uma abertura qualquer maior do que a metade de $[\overline{AB}]$(pode ser de medida diferente do passo anterior. Traçar arcos com centro em A e B. O encontro destes arcos é o ponto D'

3. Traçar os triângulos $\triangle ACB$ e $\triangle AC'B$ (Vamos precisar deles daqui a pouco).

4. Traçar a reta $\overleftrightarrow{CC'}$. Esta linha será a mediatriz e C é o ponto procurado.

Como podemos saber que nossa construção funciona? Vamos fazer isso em forma de exercício.

1. Mostre que $\triangle ADD'$ é congruente a $\triangle BDD'$.(Sugestão: Use LLL).

2. Conclua que os ângulos $\widehat{ADD'}$ e $\widehat{BDD'}$ são congruentes. (Que caso deve ser usado?).

3. Mostre que $\triangle ADC \cong \triangle BDC$.(Note que no item anterior mostramos que $\widehat{ADC}$ e $\widehat{BDC}$ são congruentes).

4. Mostre que os ângulos $\widehat{ADC}$ e $\widehat{BDC}$ são retos. Logo a mediatriz é perpendicular ao segmento $\overline{AB}$.

5. Marque um ponto P **qualquer** sobre a reta $\overline{DD'}$, a mediatriz. Mostre que $\triangle PAX \cong \triangle PBX$ e logo $[\overline{PA}] = [\overline{PB}]$.

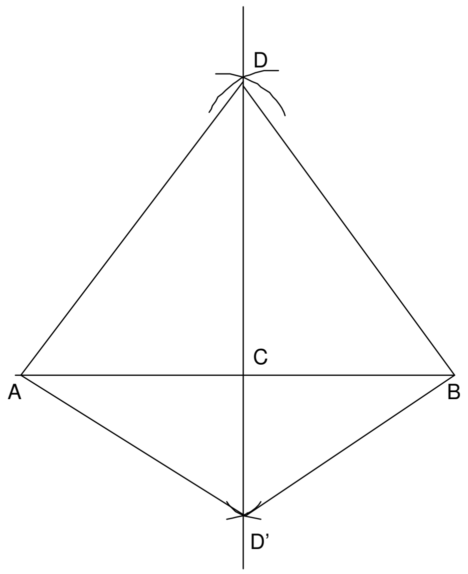


Figura 1.13: Traçado da mediatriz

6. Conclua que **todos** os pontos da mediatriz são **equidistantes** de A e de B, isto é, estão à mesma distância de A e de B. Em particular $[\overline{AC}] = [\overline{CB}]$.

7. Um ponto que não esteja sobre a reta $\overleftrightarrow{DD'}$ pode ser equidistante de A e de B?

Importante: A mediatriz do segmento $\overline{AB}$ é o **lugar geométrico** dos pontos equidistantes de A e de B. Isto quer dizer que:

- Todos os pontos de $\overleftrightarrow{DD'}$ são equidistantes de A e de B e
- Nenhum ponto fora de $\overleftrightarrow{DD'}$ é equidistantes de A e de B.

1.2.5 Exercícios

1. (figura 1.14) Numa floresta temos três postos de observação(A, B e C) para prevenir incêndios. Queremos instalar uma antena de rádio que esteja à mesma distância dos três postos.
   - Onde instalar a antena?
   - O problema terá sempre solução?
   - E se tivéssemos mais postos $(4, 5, \ldots)$?

2. (figura 1.15) Dado um triângulo $\triangle ABC$ passar uma círcunferência por A, B e C (chama-se de **circunferência circunscrita** ao triângulo - também diz-se que o triângulo está **inscrito** na circunferência). Observe os dois casos apresentados. Em que eles diferem? Haveria um 3^o caso?

3. Dado um segmento $\overline{AB}$ encontre o ponto X tal que $[\overline{AX}] = \frac{[\overline{XB}]}{4}$.

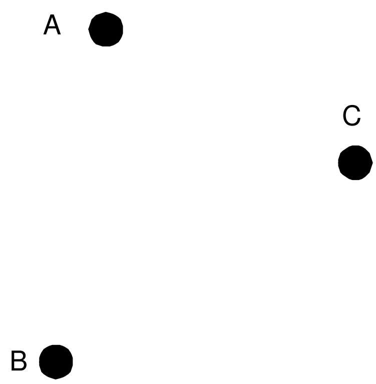


Figura 1.14: Problema dos três pontos

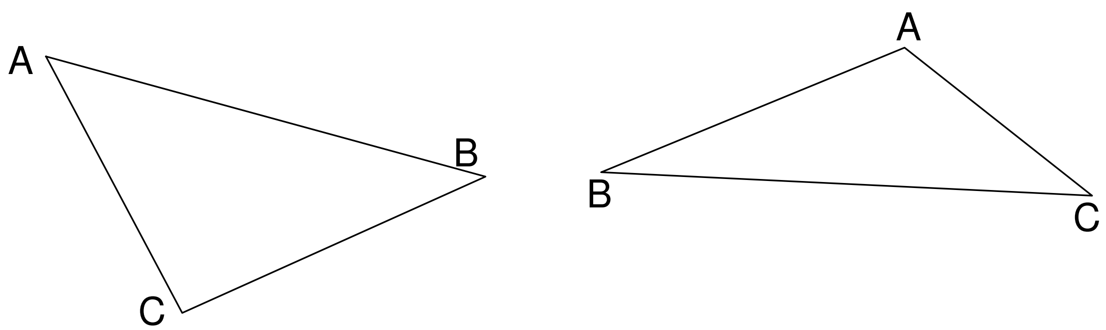


Figura 1.15: Problema da circunferência circunscrita

4. Dado um segmento $\overline{AB}$ encontre o ponto X tal que $[\overline{AX}] = \frac{3\times[\overline{XB}]}{16}$.

5. Construir uma reta perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AB}$ passando pelo ponto P, fora dela.

6. Construir uma reta perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AB}$ passando pelo ponto P pertencente a ela.

1.2.6 O caso ALA - Construção da bissetriz de um ângulo

Caso LAL: Seja dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$. Se $[\overline{AB}] = [\overline{A'B'}]$,$[\angle A] = [\angle A']$ e $[\angle B] = [\angle B']$ então $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.
A mediatriz divide um segmento ao meio. Agora gostríamos de dividir um **ângulo** ao meio. A reta que procuramos é chamada **bissetriz**.

Problema: Dado um ângulo $\widehat{AOB}$, encontrar uma reta $\overleftrightarrow{OC}$ tal que $\angle\widehat{AOC} = \angle\widehat{COB}$

Vamos acompanhar a construção com a figura 1.16.

1. Abrir o compasso em uma abertura qualquer . Traçar um arco com centro em O. Esse arco marca sobre as semi-retas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ os pontos X e Y.

2. Abrir o compasso em uma abertura qualquer (pode ser de medida diferente do passo anterior). Traçar arcos com centro em X e Y.O encontro destes arcos é o ponto C

3. Traçar a reta $\overleftrightarrow{OC}$ Esta linha será a bissetriz.

4. Traçar os triângulos $\triangle OXC$ e $\triangle OYC$ (Vamos precisar deles daqui a pouco)

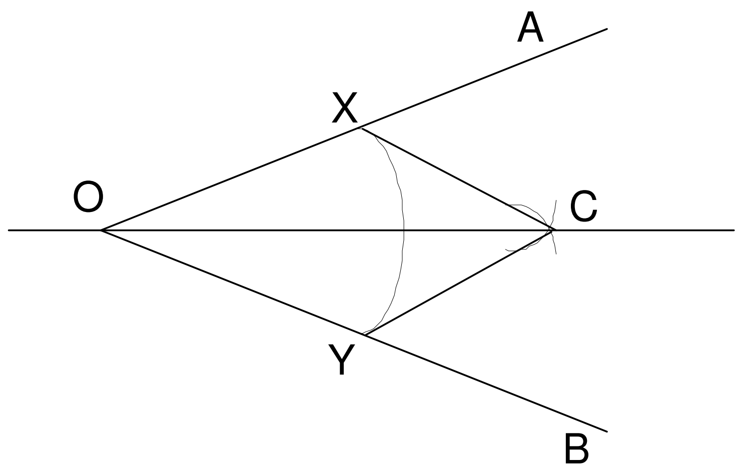


Figura 1.16: Construção da bissetriz

Como podemos saber que nossa construção funciona? Vamos fazer isso em forma de exercício.

1. Mostre que $\triangle OXC \cong \triangle OYC$ (Use o caso LLL).
2. Conclua que $\angle\widehat{XOC} \cong \angle\widehat{YOC}$. A reta $\overleftrightarrow{OC}$ divide o ângulo $\widehat{AOB}$ ao meio e é de fato a bissetriz.

   Vamos agora usar o caso ALA para deduzir uma outra propriedade das bissetrizes.
3. Escolha um ponto qualquer P da bissetriz e trace uma perpendicular até a reta $\overleftrightarrow{OA}$ determinando o ponto Q.
4. Do mesmo ponto P da bissetriz trace uma perpendicular até a reta $\overleftrightarrow{OB}$ determinando o ponto R.
5. Mostre que os triângulos $\triangle OPQ$ e $\triangle OPR$ tem os três ângulos com a mesma medida.
6. Use o caso ALA para mostrar que $\triangle OPQ \cong \triangle OPR$.
7. Conclua que qualquer ponto da bissetriz é equidistante das retas $\overleftrightarrow{OA}$ e $\overleftrightarrow{OB}$.(Note que isso vale para **toda** a bissetriz e não só para a semi-reta $\overrightarrow{OC}$).
8. Algum ponto fora da bissetriz pode ser equidistante das retas $\overleftrightarrow{OA}$ e $\overleftrightarrow{OB}$?

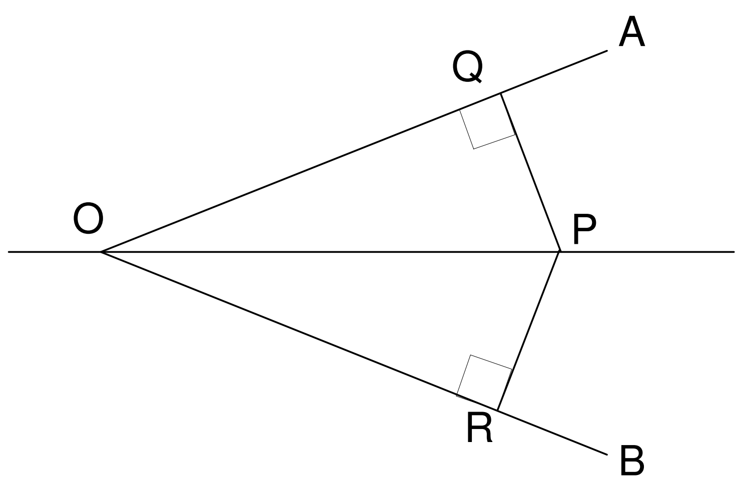


Figura 1.17: Propriedades da bissetriz

Resumindo: A bissetriz de um ângulo divide esse ângulo ao meio e é o lugar geométrico dos pontos equidistantes dos lados desse ângulo.

1.2.7 O caso ALA_o

Esse caso já foi sugerido na subssessão anterior. Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180^o, podemos reescrever o caso ALA como:

Caso LAL: Seja dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$. Se $[\overline{AB}] = [\overline{A'B'}]$,$[\angle A] = [\angle A']$ e $[\angle C] = [\angle C']$ então $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

1.3 Aplicações - Propriedades dos quadriláteros

Importante: Trataremos apenas de quadriláteros cujos lados não se cruzam e convexos (nenhum ângulo interno maior do que 180^o).

1. Mostre que num quadrilátero convexo a soma das medidas dos ângulos internos é 360^o. Isso é verdade para quadriláteros não convexos?

1.3.1 Paralelogramos

Definição: Um paralelogramo é um quadrilátero simples que tem os lados opostos paralelos dois a dois.

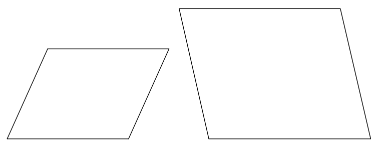


Figura 1.18: Dois parlelogramos

2. Mostre que a diagonal divide um paralelogramo em dois triângulos congruentes.
3. Conclua que os lados paralelos de um paralelogramo sãocongruentes.
4. Mostre que dois ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes.
5. Mostre que dois ângulos sucessivos de um paralelogramo são suplementares.
6. Mostre que as diagonais de um paralelogramo se cortam ao meio.
7. Verdadeiro ou Falso? (Prove ou dê um contra-exemplo) Um quadrilátero em que as diagonais se cortam ao meio é um paralelogramo.
8. Verdadeiro ou Falso? (Prove ou dê um contra-exemplo) Um paralelogramo tem diagonais de 3 cm e 5 cm. Um outro paralelogramo tem diagonais com as mesmas medidas. Eles são congruentes?
9. Verdadeiro ou Falso? (Prove ou dê um contra-exemplo) Um paralelogramo tem lados de 3 cm e 5 cm. Um outro paralelogramo tem lados com as mesmas medidas. Eles são congruentes?

   Nestes dois últimos itens você pode pensar em como seria construir um paralelogramo usando varetas. Será que só as diagonais asseguram rigidez? e os lados?

10. Como construir um paralelogramo sabendo que um dos lados mede 10 cm, utro mede 7 cm e uma das diagonais mede 8 cm?

11. Num paralelogramo as diagonais se cruzam em ângulo reto. Mostre que, nesse caso os lados do paralelogramo são iguais. As diagonais são iguais?

1.3.2 Losangos

Definição: Um quadrilátero que tem os quatro lados congruentes é um **losango**.

12. Mostre que todo losango tem os lados paralelos dois a dois, isto é todo losango é um paralelogramo.

13. Mostre que num losango as diagonais se cortam em ângulo reto.

14. Mostre que num losango as diagonais são bissetrizes dos ângulos internos.

15. Mostre que num triângulo isósceles a altura, a mediana e a bissetriz (correspondentes ao vértice da intercessão dos dois lados congruentes) são a mesma reta.(Sugestão: "cole" dois exemplares do triângulo para formar um losango).

16. É possível construir um losango com 5 cm de lado e uma diagonal de 10 cm?

1.3.3 Retângulos

17. Mostre que umparalelogramo que tem 2 diagonais congruentes tem os quatro ângulos internos congruentes e medindo 90^o.

    Definição: Um quadrilátero que tem os quatro ângulos congruentes é um **retângulo**.

18. Mostre que num retângulo as diagonais são congruentes e se cortam ao meio.

19. Verdadeiro ou Falso? (Prove ou dê um contra-exemplo) Um quadrilátero em que as diagonais são congruentes é um paralelogramo?

20. Nm quadrilátero as diagonais se cortam ao meio , em ângulo reto e são congruentes. Que quadrilátero é esse?

1.3.4 variedades

21. Construa quadriláteros com as características abaixo, ou diga se é impossível construí-los, justificando. Se for possível construir mais do que um quadrilátero (não congruente) com as especificações dadas, explique porque. Os lados serão sempre $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$. As diagonais serão $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.

(a) $[\overline{AB}] = 7$ cm; $[\overline{BC}] = 3$ cm; $[\overline{AC}] = 5$ cm; $ABCD$ é um paralelogramo.

(b) $[\overline{AC}] = 8$ cm; $[\overline{BD}] = 6$ cm; $[\overline{AB}] = 6$ cm; $ABCD$ é um losango.

(c) $[\overline{AC}] = 8$ cm; $[\overline{BD}] = 8$ cm; $\angle\widehat{BAD} = 90^o$; $ABCD$ qualquer.

(d) $[\overline{AC}] = 8$ cm; $[\overline{BD}] = 8$ cm; $\angle\widehat{A} = \angle\widehat{B} = \angle\widehat{C} = \angle\widehat{D} = 90^o$; $ABCD$ qualquer.

(e) $[\overline{AB}] = 8$ cm; $[\overline{AC}] = 6$ cm; $ABCD$ é um losango.

22. Mostre que, dado um retângulo $ABCD$ é possível sempre passar uma circunferência passando por A, B, C e D. Onde fica o centro do círculo?

23. Mostre que se um losango não for um quadrado então é impossível passar uma circunferência pelos seus vértices.

24. (a) Seja um pentágono regular (5 ângulos congruentes e 5 lados congruentes). Mostre que podemos passar uma circunferência pos todos os seus vérices.

    (b) Mostre que os triângulos formados pelo centro da circunferência circunscrita (também chamado centro do pentágono) e pelos lados são todos congruentes e isósceles.

    (c) Calcule a medida dos ângulos desses triangulos.

    (d) Calcule a medida do ângulo interno do pentágono.

    (e) Calcule a medida do ângulo interno do decágono (10 lados).

    (f) Calcule a medida do ângulo interno do eneágono (9 lados).

    (g) Deduza uma fórmula para o ângulo interno de um polígono regular de n lados.

25. Mostre que se um quadrilátero está inscrito num círculo, seus ângulos opostos somam 180^o. ((Sugestão: Trace os raios do círculo que ligam o centro aos vértices do quadrilátero. Que tipo de triângulos são formados?)

Capítulo 2

Semelhança

2.1 Semelhança, projeção e proporção

Vimos que a congruência (no plano) pode ser interpretada como a superposição de figuras, o que pode ser feito através de transformações como: translação (deslizamento segundo uma direção), rotação (em torno de um ponto e segundo um ângulo) e simetria axial (reflexão em relação a uma reta).

Nenhuma dessas transformções altera as medidas, elas apenas transferem as distâncias. Outras transformações são, entretanto, tão corriqueiras quanto estas, mas quase não nos damos conta. Pense, por exemplo, em um pequeno retrato, desses que encontramos na cateira de identidade. Ele tem poucos centímetros mas nossa primeira impressão é que ele é "igual" à pessoa. Bem, igual é que ele não é. E nem mesmo congruente, pois as medidas não foram preservadas. É uma imagem menor, que guarda as **proporções** da pessoa.

A mesma coisa acontece com uma imagem de televisão. O galã (ou a mocinha) aparece com 10 cm de altura quando na verdade tem quase 2 m. E no entanto não temos a menor dificuldade em reconhecê-lo. Se cruzarmos com ele na rua saberemos que é ele (ou ela) sem nunca nos termos encontrado antes.

Pode acontecer de termos uma imagem muito maior. O mesmo ator pode aparecer num anúncio, num enorme cartaz de rua (outdoor). Nesse caso o rosto do galão aparece com 4 m e convenhamos que ninguém tem um rosto desse tamanho...Mas mesmo assim conseguimos reconhecê-lo.

Se formos pensar em Geometria e Desenho Geométrico, de que transformação estamos falando? Na figura 2.1 vemos que a figura A foi **projetada** sobre a figura B a partir de um ponto P. Mas que transformação é essa?

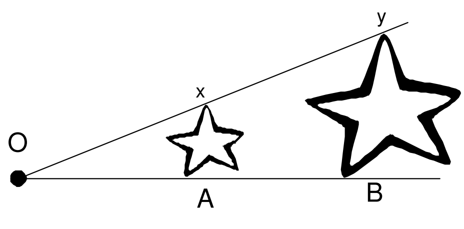


Figura 2.1: Duas figuras semelhantes

A operação que fizemos foi a seguinte:

1. Escolhemos um ponto qualquer X na figura A.
2. Medimos a distância $[OX]$
3. Marcamos um ponto Y que esteja sobre a reta $\overleftrightarrow{PX}$ tal que a distância $[OY]$ seja o dobro de $[OX]$, isto é $[OY] = 2.[OX]$
4. Repetimos esse processo com todos os pontos da figura A.

Observe que:

- A qualquer segmento da figura A corresponde um segmento da figura B com o dobro da medida do segmento original.
- Os segmentos correspondentes nas figuras A e B são paralelos.

As figuras não são iguais e nem mesmo congruentes. Diremos que são figuras **semelhantes**.

Escolhemos um **centro de projeção** (no caso o ponto O, mas poderíamos escolher um outro ponto qualquer) e um valor de proporção (no nosso caso 2). Este valor de proporção é chamado de **razão de proporção** ou **razão de semelhança**. A escolha da figura original, do centro de projeção e da razão de proporção determinam completamente a figura que é obtida. Podemos reunir essas observações numa definição.

Definição : Dada uma figura A, se utilisamos o procedimento descrito acima, dizemos que **a figura B foi obtida por projeção da figura A a partir do centro de projeção O segundo a razão de proporção** $[OY]/[OX]$.

Observação: Figuras obtidas por projeção são também chamadas de homotéticas. Esse termo é encontrado na maioria dos livros escolares.

Podemos usar outro número como razão de proporção? A resposta é sim. Por exemplo se usássemos o valor $\frac{5}{2}$ nossa proporção ficaria como na figura 2.2

Observação: Poderíamos usar qualquer número real, com excessão do 0: $\sqrt{2}$, π, $\sqrt[3]{7} + \sqrt[5]{2}$. Entretanto, trabalhar com números irracionais gera dificuldades quando vamos desenhar. Neste texto usaremos razões de semelhança racionais a não ser em alguns exemplos em que a construção não seja excessivamente complexa. Preferimos enfim nos concentrar nas idéias básicas: semelhança, proporção, projeção e homotetia.

Porque a razão de semelhança não pode ser 0 ? Note que a projeção que vimos na figura 2.1 foi da figura A sobre a figura B com razão de semelhança 2 mas bem poderia ser da figura b sobre a figura A com razão $\frac{1}{2}$. Se usássemos a razão 0, não poderíamos inverter a operação (0 não tem inverso para a multiplicação). Isso seria inconveniente e na verdade uma projeção de razão 0 transformaria toda a figura original num único ponto (o centro de projeção).

Podemos escolher um número negativo como razão ? Até agora tratamos a distância sem nos preocupar com o sentido. Estamos tratando $[AB]$ como se fosse igual a $[BA]$. No caso da projeção teremos que fazer a distinção entre

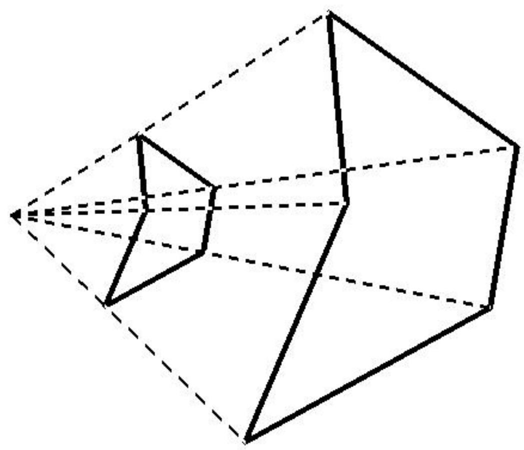


Figura 2.2: Duas figuras homotéticas com razão 2,5

o ponto de partida (o centro de projeção) e o ponto de chegada. Se escolhermos, por exemplo a razão -2, para cada ponto X da figura original medimos a distância $[PX]$, marcamos um ponto Y que esteja na mesma reta $\overleftrightarrow{PX}$ tal que a distância $[PY]$ seja o dobro de $[PX]$, isto é $[PY] = 2.[PX]$. Desta vez, entretanto, maracaremos o ponto Y do outro lado de P (ou mais tecnicamente, de modo que P fique entre X e Y. Veja a figura 2.3

O que aconteceu ? Na figura 2.3 a figura B é proporcional à figura A mas está de cabeça para baixo, ou melhor, a figura A sofreu uma projeção seguida de uma rotação de 180^o.

Observe, outra vez, que:

- A qualquer segmento da figura A corresponde um segmento da figura B com o dobro da medida do segmento original.

- Os segmentos correspondentes nas figuras A e B são paralelos.

Poderíamos obter o mesmo efeito fazendo, sucessivamente, uma projeção de razão 2 e uma rotação de 180^o. Isto é, uma projeção usando a razão -1 corresponde a uma rotação de 180^o.

Estamos prontos para definir semlhança.

Definição (semelhança): A e B são ditas **semelhantes** se podemos obter de A uma figura congruente a B por projeção. A razão de proporção usada na projeção será chamada **razão de semelhança**.

O centro de projeção pode estar no interior da figura, como mostra a figura 2.4.

A seguir várias situações de figuras semelhantes.

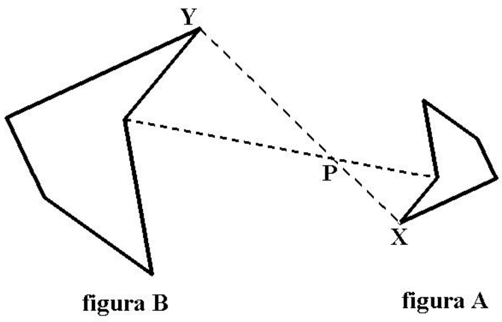


Figura 2.3: Projeção com razão negativa

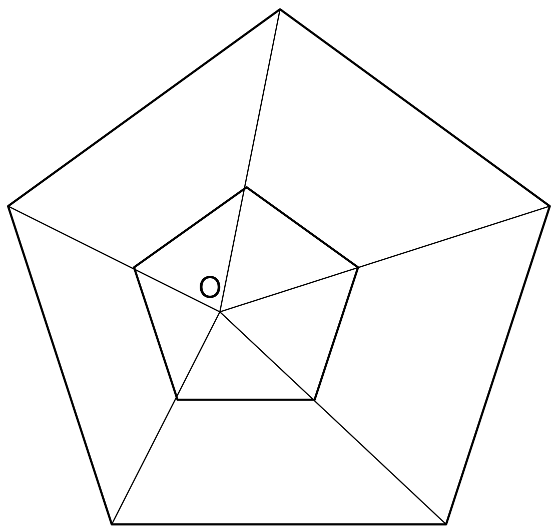


Figura 2.4: Uma projeção com centro no interior da figura

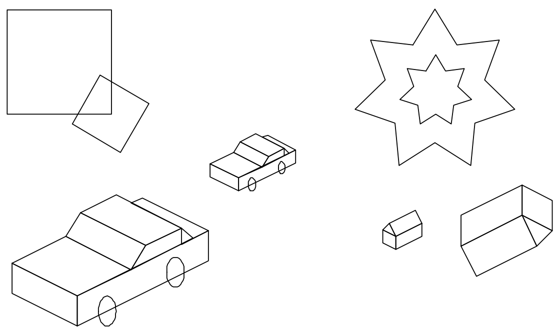


Figura 2.5: Pares de figuras semelhantes

Exercícios:

1. Qual a razão de semelhança (aproximadamente) entre um retrato 3×4 (retrto de carteira de identidade) e o rosto de uma pessoa?

2. Pegue um mapa (ou a planta de uma casa) qualquer. Existe uma escala que nos dá uma razão de semelhança entre as distâncias no mapa e a distância verdadeira. Se cada centímetro no mapa corresponde a 3 quilômetros no mapa, qual a escala (razão de semelhança)?

3. Encontre um carrinho de brinquedo. Qual a razão de semelhança (pode ser aproximada) entre o carrinho e um carro de verdade?

2.2 Razão de semelhança, números racionais e irracionais

A razão de semelhança, como vimos, é a proporção entre as distâncias correspondentes em uma figura e em outra. Quando falamos de proporção e razão, pensamos logo nas **frações**. De fato, a própria palavra **racional** vem de **razão**; os números racionais são aqueles que podem ser expressos como uma razão entre números inteiros: $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{212}{312}$. Mas sabemos também que existem números irracionais - não podem ser escritos nesta forma: $\sqrt{2}$, π, $\sqrt[3]{7} + \sqrt[5]{2}$. Embora não sejam racionais nada impede que sejam usados como razão de semelhança. Por exemplo na figura 2.6 os quadrados tem uma razão de semelhança igual a $\sqrt{2}$. De fato, sabemos que a diagonal de um quadrado de lado x mede $\sqrt{2}x$.

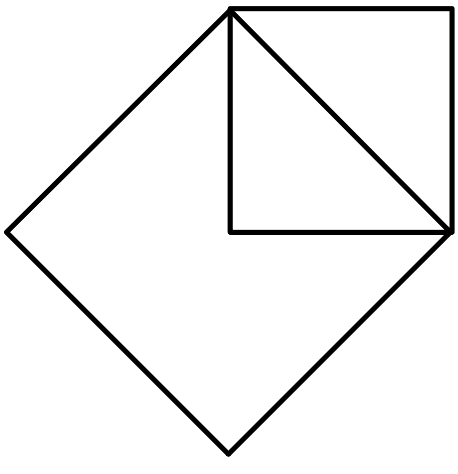


Figura 2.6: Dois quadrados com razão de semelhança $\sqrt{2}$

A maneira habitual para expressar igualdade entre proporções é a igualdade de frações:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

que quer dizer "a proporção entre 2 e 3 é a mesma que entre 4 e 6". É comum dizermos "2 está para 3 como 4 está para 6". A ferramenta mais usada para "conferir" as proporções é a **multiplicação cruzada**.

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} \Leftrightarrow 2 \times 6 = 3 \times 4$$

$$\frac{15}{9} = \frac{25}{15} \Leftrightarrow 15 \times 15 = 9 \times 25$$

Exercícios de recordação:

1. Calcule o valor de x:

   (a)
   $$\frac{42}{35} = \frac{36}{x}$$

   (b)
   $$\frac{25}{x} = \frac{x}{9}$$

   (c)
   $$\frac{x+1}{3} = \frac{x}{4}$$

   (d)
   $$\frac{x}{3} = \frac{4.x}{12}$$

   (e)
   $$\frac{x}{3} = \frac{15.y}{5.y} //, //y \neq 0$$

2. Seja
   $$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$
   Mostre que
   $$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$
   (Sugestão: some 1 a cada lado da igualdade)

3. Seja
   $$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$$
   Mostre que
   $$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = k$$
   (Sugestão: Calcule a em função de b e k; calcule c em função de d e k)

2.3 Paralelismo e proporção

Como as proporções aparecem na Geometria? é o que vamos ver agora. Lembraremos, sem demonstração alguns fatos da Geometria.

Teorema de Tales:(figura 2.7) Se três restas paralelas r, s e t são cortadas por duas transversais m e n, determinando os pontos A, B, C, D, E e F. Então:

$$\frac{[AB]}{[BC]} = \frac{[DE]}{[EF]}$$

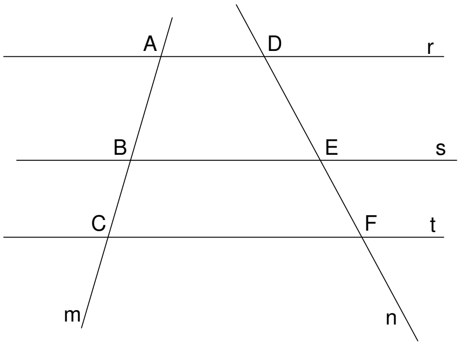


Figura 2.7: Teorema de Tales

Observação : Também são válidas as proporções:

$$\frac{[AC]}{[AB]} = \frac{[DF]}{[DE]} \quad e \quad \frac{[AB]}{[DE]} = \frac{[BC]}{[EF]}$$

A relação também é válida quando as transversais se cruzam (figura 2.8):

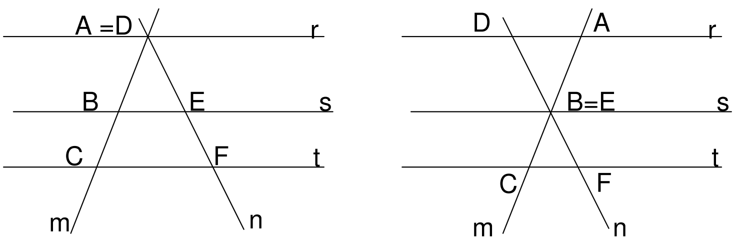


Figura 2.8: Outras formas do Teorema de Tales

Um fato menos assinalado é que a recíproca também é verdadeira: se as proporções se verificam, as retas m e n são paralelas figura 2.9). Como $10\times 12 = 8 \times 15$ podemos afirmar que r, s e t são paralelas.

Este teorema mostra um meio natural de representar geometricamente as proporções (pelo menos quando as razões forem um número racional). Para isso precisaremos saber construir retas paralelas.

Problema : Dada uma reta r construir uma reta s paralela a r passando pelo ponto P exterior a r.

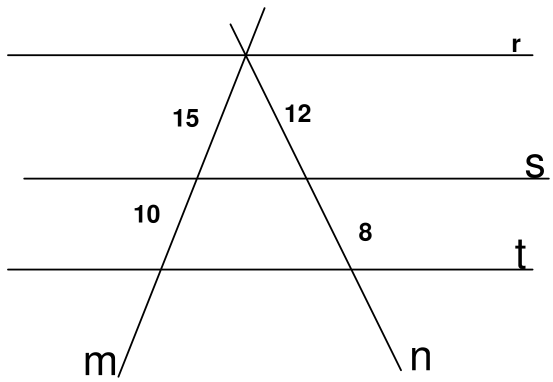


Figura 2.9: Recíproca do Teorema de Tales

Começamos traçando a reta s, perpendicular à reta r e passando pelo ponto P . Essa construção já apareceu no capítulo 1 (figura 2.10).

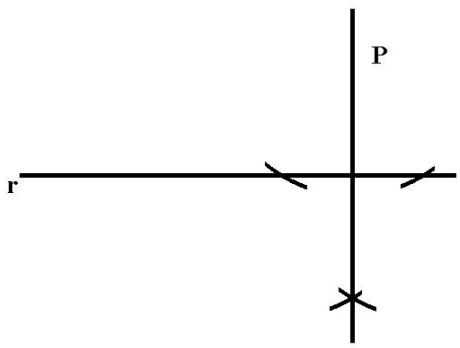


Figura 2.10: Construção da perpendicular

Depois construímos uma reta t, perpendicular à reta s e passando pelo ponto P. Essa construção também já conhecemos(figura 2.11).

Observação: Se duas retas são paralelas todos os pontos de uma das retas estão à mesma distância da outra. Isso nos permite falar de **distância entre duas retas paralelas**.

Problema : Dada uma reta r construir uma reta s paralela a r a uma distância $[AB]$ dada. Sugestão: Construa duas perpendiculares (figura 2.12).

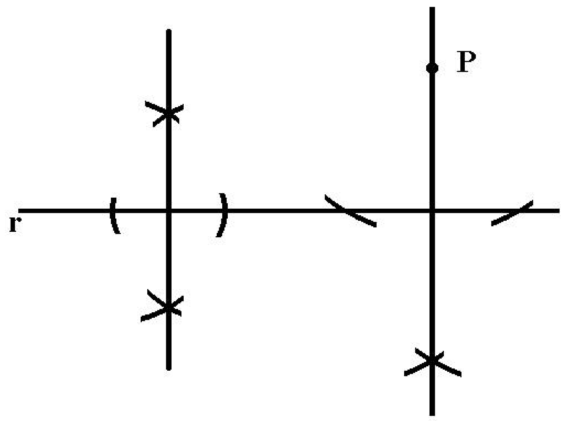


Figura 2.11: Construção da segunda perpendicular

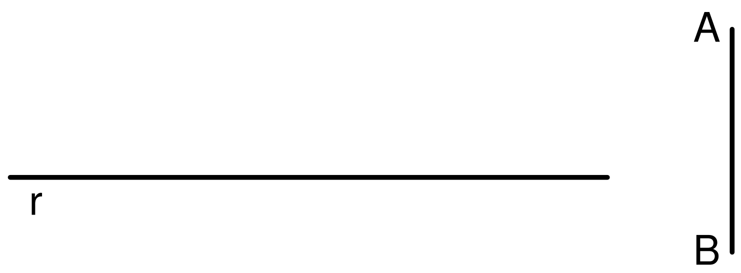


Figura 2.12:

Os esquadros $30^o - 60^o - 90^o$ e $45^o - 45^o - 90^o$

Além da régua e compasso, usaremos dois instrumentos importantes: os esquadros. Eles são triângulos com ângulos de $30^o - 60^o - 90^o$ e $45^o - 45^o - 90^o$ respectivamente (figura 2.13).

Uma primeira observação é o fato de que encontramos esquadros de vários tamanhos, mas os ângulos garantem que são sempre semelhantes. É porque a finalidade principale dos esquadros não é medir (embora alguns venham com graduação) mas transferir retas paralelas e produzir os principais ângulos, $30^o - 45^o - 60^o$ e 90^o.

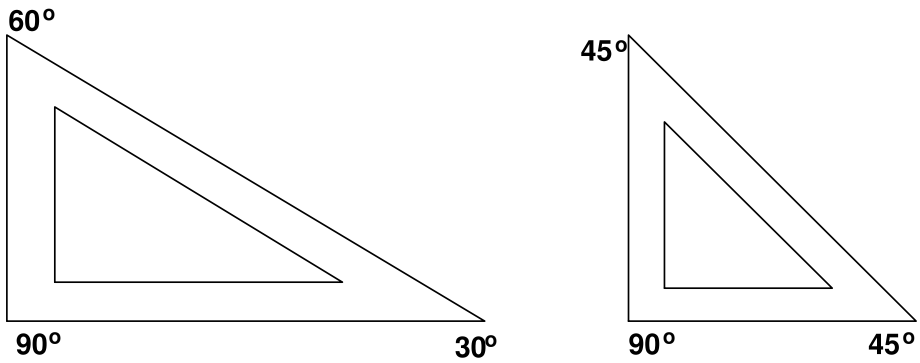


Figura 2.13: $30^o - 60^o - 90^o$ e $45^o - 45^o - 90^o$

.

Mas porque esses ângulos são especiais ? Primeiramente porque são fáceis de construir e de encontrar (figura 2.14) :

- $90^o \rightarrow$ ângulo formado por duas retas perpendiculares.
- $45^o \rightarrow$ metade do ângulo reto (usamos a bissetriz de 90^o) e é o ângulo da diagonal do quadrado com seu lado.
- $60^o \rightarrow$ ângulo do triângulo equilátero.
- $30^o \rightarrow$ metade do ângulo de 60^o e ângulo formado pela altura mediana e bissetriz do triângulo equilátero.

Como são usados os esquadros ? Os ângulos retos nos ajudam a transportar paralelas. Exemplo: Traçar a reta s paralela à reta r passando pelo ponto P.

A figura 2.15 mostra a disposição dos esquadros que permite transferir a direção e traçar a paralela com facilidade.

Atenção : Nada substitui a prática! Experimente usar os esquadros. Você verá que é simples e útil.

Aplicação : Dividir o segmento $\overline{AB}$ em 5 segmentos congruentes.

Solução: Traçamos um segmento auxiliar $\overline{AP}$ e marcamos com o compasso 5 segmentos congruentes (figura 2.16).Os pontos recebem o nome de M_1, M_2, M_3, M_4 e M_5.

Ligamos $M5$ ao ponto B. Usamos o deslizamento de esquadros para traçar paralelas à reta $\overleftrightarrow{M_5A}$, passando pelos pontos M_4, M_3, M_2 e M_1. Assim determinamos os pontos T_1, T_2, T_3, T_4 e T_5 (figura 2.17).

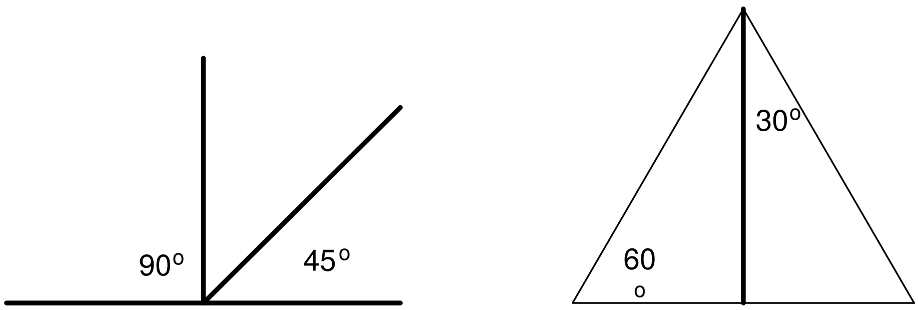


Figura 2.14: Os ângulos mais frequentes

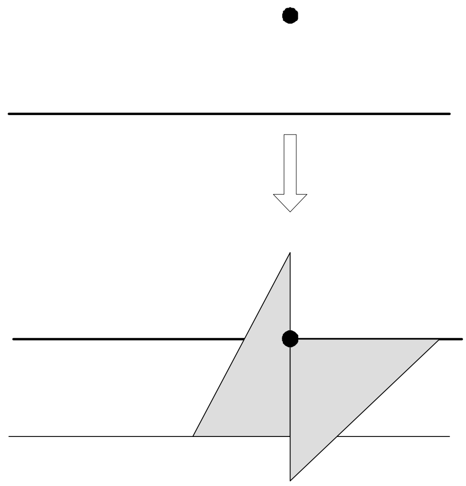


Figura 2.15: Transferindo paralelas com esquadros

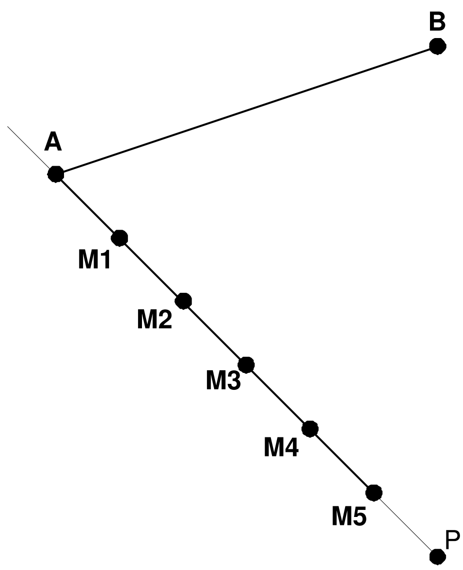


Figura 2.16: Construção de reta auxiliar

Pelo teorema de Tales estes pontos dividem o segmento $\overline{AB}$ em 5 segmentos congruentes.

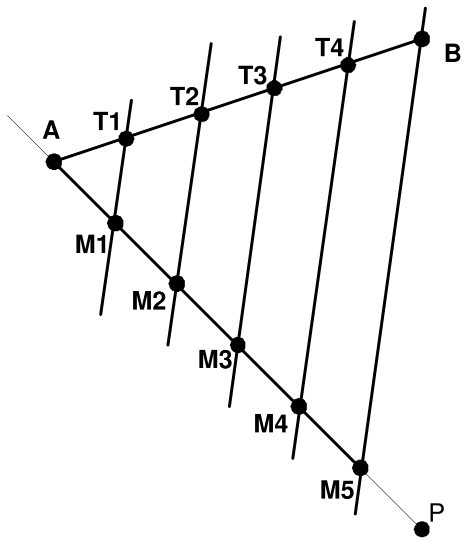


Figura 2.17: Divisão em 5 segmentos congruentes

Exercício: Dado um segmento $\overline{AB}$ encontrar o ponto C tal que $\frac{[AC]}{[CB]} = \frac{3}{4}$. (Sugestão: adapte a solução do exemplo anterior).

Aplicação : Mostrar que as medianas de um triângulo qualquer se cortam em um ponto que dista $\frac{2}{3}$ da distância do vértice ao ponto médio do lado oposto.

Demonstração: Sejam o triângulo e as medianas $\overline{AM}$ e $\overline{BN}$ (figura 2.18).

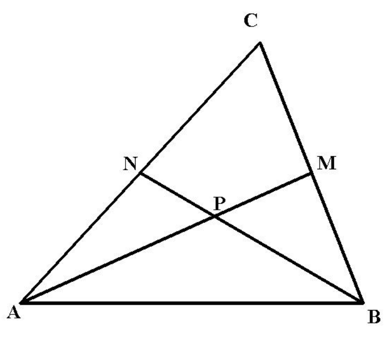


Figura 2.18: Duas medianas do $\triangle ABC$

Marcamos os pontos médios de $\overline{BM}$ e de $\overline{MC}$, $M1$ e $M2$. Traçamos paralelas a $\overline{AM}$ passando por B, $M1$, M, $M2$ e C (figura 2.19).

Considere o triângulo $\triangle AMC$; a reta $\overleftrightarrow{AM_1}$, paralela a $\overline{AM}$ passando por $M1$

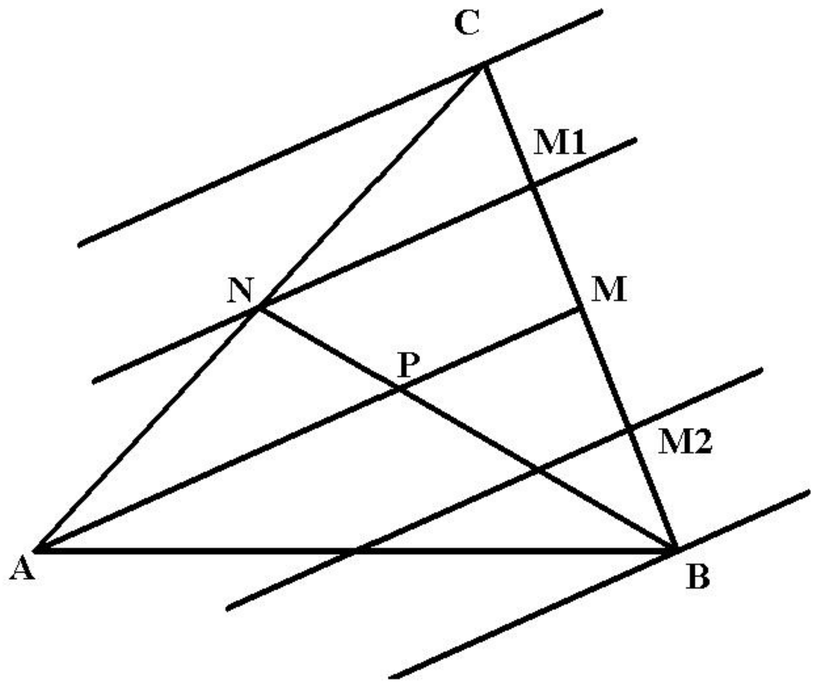


Figura 2.19: Construção das paralelas

divide o lado $\overline{AC}$ em dois segmentos congruentes; isso quer dizer que a reta a reta $\overleftrightarrow{AM_1}$ passa pelo ponto médio de $\overline{AC}$, isto é, pelo ponto N. Olhando agora para o triângulo $\triangle NBM_1$ constatamos que $\frac{PN}{BP} = \frac{MC}{BM} = \frac{1}{3}$. Isso é exatamente o queríamos mostrar(podemos fazer o mesmo procedimento em relação a todos os tres lados).

Corolário : As três medianas de um triângulo se encontram em um mesmo ponto. Este ponto é chamado **baricentro** do triângulo.

Aplicação : A bissetriz de um ângulo de um triângulo divide o lado oposto ao ângulo em segmentos proporcionais aos lados adjacentes ao ângulo.

Demonstração: (Sugestão). Na figura 2.20, queremos mostrar que:

$$\frac{x}{v} = \frac{y}{w}$$

Encontre o ponto Q que marca o encontro da paralela à reta $\overleftrightarrow{PC}$ passando por A e o prolongamento do segmento $\overline{BC}$. Examine a figura 2.21 e conclua que os ângulos marcados são todos congruentes. O resto é com voce...

2.4 Projeções proporcionais

Podemos usar as ferramentas que construimos até agora para fazer projeções de figuras formadas por segmentos de retas, por exemplo polígonos.

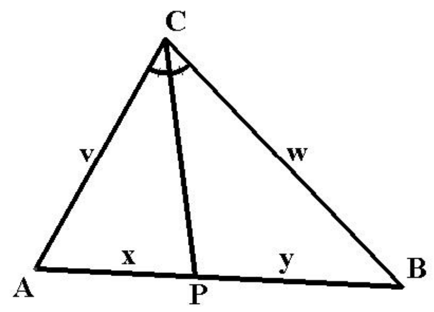


Figura 2.20: Teorema da bissetriz

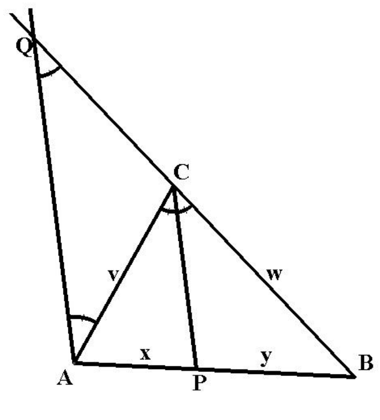


Figura 2.21: Construção para demonstração do teorema da bissetriz

Problema (ver figura 2.23): Projetar a figura F com centro O e razão de semelhança $\frac{7}{3}$.

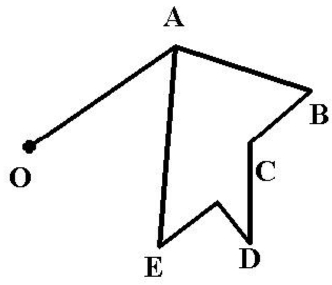


Figura 2.22: Projeção de polígono

A primeira providência será projetar o ponto A; já sabemos subdividir o segmento $\overline{OA}$ em 3 segmentos congruente. Basta prolongar esse segmento e, usando o compasso, marcar A' de modo que $\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{7}{3}$ (figura 2.23).

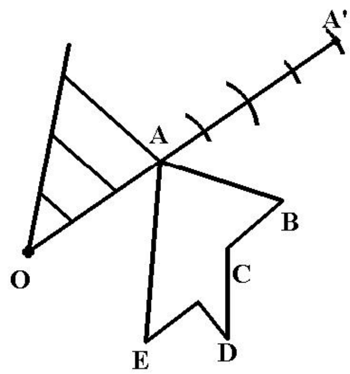


Figura 2.23: Projeção de A

Felizmente, não teremos tanto trabalho para projetar os outros pontos. Como sabemos que os segmentos são projetados paralelamente, podemos usar os esquadros para encontrar B' no encontro de $\overleftrightarrow{OB}$ e da paralela a $\overline{AB}$ que passa por A' (figura 2.24).

Continuamos até projetar todos os vértices (figura 2.24).

Exercícios:

1. Desenhe uma figura feita de segmentos e faça uma projeção com razão positiva.

2. Idem, com razão de projeção negativo.

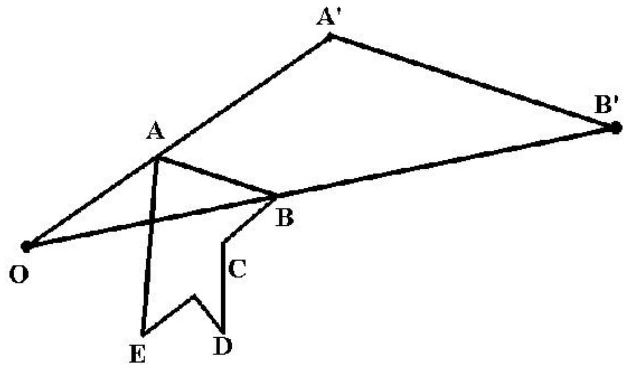


Figura 2.24: Projeção de B

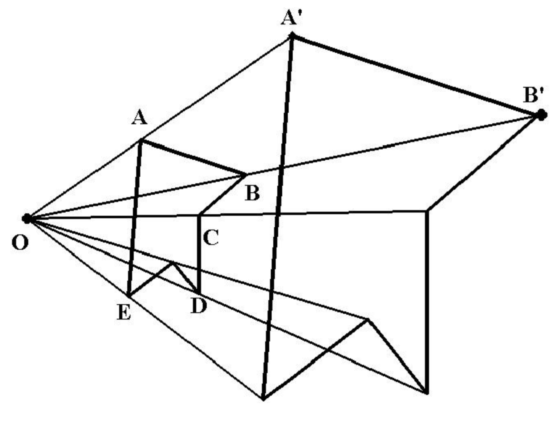


Figura 2.25: Projeção do polígono

3. Quantos pontos precisamos para projetar um círculo ? Fará diferença se o centro de projeção estiver no centro do círculo ?

2.5 Semelhança de triângulos

Produzir figuras semelhantes não é difícil, como acabamos de ver; basta fazer uma projeção qualquer. Mas como saber se duas figuras são semelhantes. Este é um problema importante, de larga aplicação. E o começo em geometria é sempre pelas figuras maos simples, os triângulos.

Segmentos são sempre semelhantes; já sabemos que a projeção de segmentos produz segmentos paralelos aos segmentos originais. Isso faz com que os ângulos de um triângulo, quando projetados, sejam sempre congruentes. A translação, a rotação e a simetria central não alteram os ângulos. Isso pode ser reunido no seguinte teorema.

Teorema: Dois triângulos são semelhantes se e só se seus ângulos são congruentes (Caso AAA).

Denotaremos dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ semelhantes por $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. Os ângulos aparecem em ordem de correspondência, isto é $\widehat{A} \cong \widehat{D}$, $\widehat{B} \cong \widehat{E}$ e $\widehat{C} \cong \widehat{F}$.

Este é um caso que não ocorria na congruência, **ângulo-ângulo-ângulo**. Melhor ainda, como os ângulos de um triângulo somam sempre 180^o basta mostrar que dois ângulos são congruentes.

Exercícios

1. Tome um triângulo $\triangle ABC$ qualquer. Trace uma paralela ao lado $\overline{AB}$ que corte os lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ nos pontos D e E. Mostre que $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ (figura 2.26).

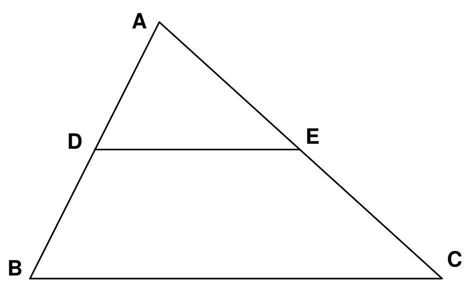


Figura 2.26: Triângulos semelhantes produzidos por uma paralela

2. Exemplo: Tome um triângulo $\triangle ABC$ com $[\hat{A}] = 90^o$. Trace um segmento perpendicular ao lado $\overline{BC}$ no onto D e que corte o lados $\overline{AC}$ no ponto E. Então $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ (figura 2.27).

Outros casos de semelhança não são tão fáceis de constatar.

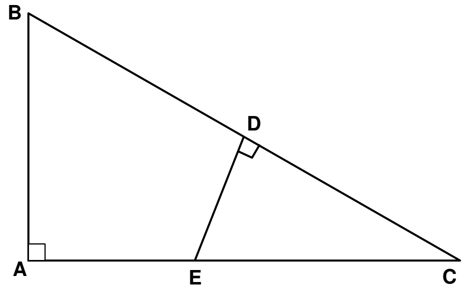


Figura 2.27:

- LAL - Quando dois triângulos tem um ângulo congruente e os lados que o formam são proporcionais os triângulos são semelhantes.
- LLL - Quando dois triângulos tem os lados proporcionais eles são semelhantes. (figura 2.28)

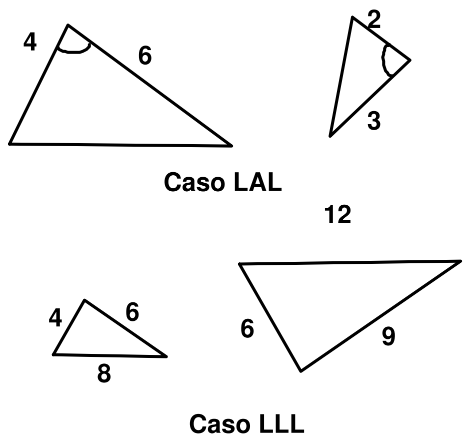


Figura 2.28: Casos LAL e LLL

Embora esses dois casos sejam imortantes a maneira mais frequente de demonstrar a semelhança de dois triângulos é mostrando a congruência dos ângulos. O motivo é que é mais fácil mostrar congruência do que proporcionalidade.

2.6 Aplicações e exercícios

1. Queremos calcular a distância até a casa de meu vizinho mas há um rio no meio(figura 2.29).Como se faz ?

   Construimos 2 triângulos traçando uma perpendicular à reta que liga nossas casas. Os triângulos são semelhantes. (porque?).

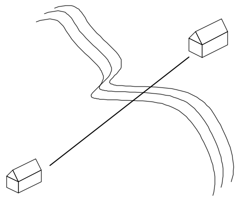


Figura 2.29:

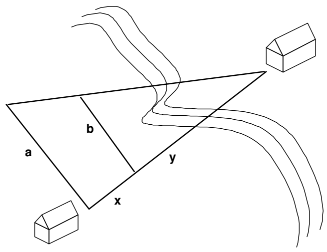


Figura 2.30:

Pela semelhança dos triângulos temos que:

$$\frac{a}{x+y} = \frac{b}{y}$$

Como a, x e b podem ser medidos (na verdade foram construidos), podemos calcular y e a distância $x + y$ (figura 2.30).

Por exemplo, se $a = 30$, $b = 18$ e $x = 16$. Basta fazer as contas e encontrar $y = 24$. A distância entre as casas é $16 + 24 = 40$ metros.

Observação: Usamos perpendicular por ser mais fácil e também porque mais tarde a semelhança será a base da trigonometria, que funciona melhor com triângulos retângulos. Mas qualquer dupla de triângulos semelhantes funcionaria igualmente.

2. Em determinado momento do dia, um edifício lança uma sombra de 15 metros. Neste mesmo momento uma vareta de 1 metro lança uma sombra de 50 centímetros. Supondo que os raios de sol são paralelos (o que é quase verdade), qual a altura do edifício? (figura 2.31)

3. Uma praça é retangular de 12 metros por 15 metros e é cruzada por dois caminhos. Um percorre uma diagonal, outro sai de um dos cantos até o ponto médio do outro lado de 15 metros. Qual a distância desse canto ao ponto de encontro dos dois caminhos? (figura 2.32)

4. Dois edifícios medindo 15 metros e 10 metros. Eles ligam um cabo do topo de cada edifício até o pé do outro. Para sustentar um cabo, deve ser colocado um poste para sustentar os cabos no ponto onde se cruzam. Que altura deve ter o poste?(figura 2.33)

   Sugestão:

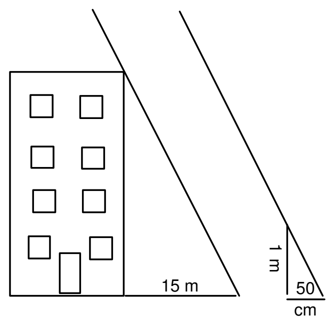


Figura 2.31:

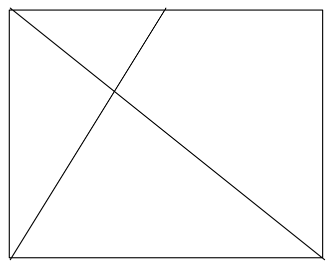


Figura 2.32: Problema da praça

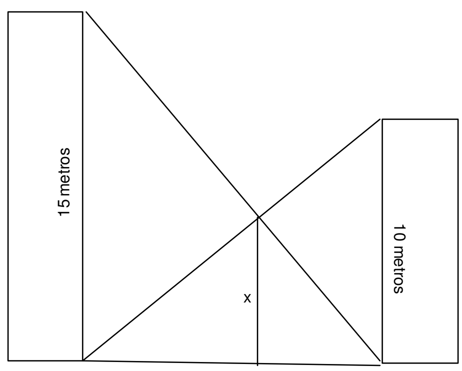


Figura 2.33:

(a) Mostre que
$$\frac{x}{15} = \frac{y}{z+y} \quad e \quad \frac{x}{10} = \frac{z}{z+y}$$

(b) Calcule:
$$\frac{x}{10} + \frac{x}{15}.$$

(c) Calcule o valor de x.

Observe que não necessitamos saber a distância entre os dois edifícios.

5. Mostre que, no exercício antrior, se as alturas dos edifícios são m e n e a altura do poste é k , vale a relação
$$\frac{1}{k} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$

6. Num quadrado ligamos os vértices aos pontos médios do lado oposto, como na figura 2.34.Qual a razão de semelhança entre o lado do quadrado original e o lado do quadrado interno formado pelas linhas? Sugestão:

(a) Mostre que $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$.

(b) Mostre que um triângulo e um trapézio podems ser combinados para formar um quadrado congruente com o quadrado interno.

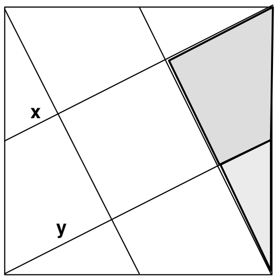


Figura 2.34: Qual a razão de semelhança?

2.7 Relações métricas no triângulo retângulo

Triângulos retângulos são sempre especiais. O ângulo reto é bastante importante, pois se apresenta com enorme frequencia em tudo que os homens fazem e também porque representa a gravidade, a maneira como os objetos são atraídos para a Terra. A Terra é redonda, certo. Mas nos limites das nossas construções, tudo acontece como se estivéssemos num plano, e construir uma parede em ângulo reto com o solo é a melhor maneira de torná-la resistente à ação da gravidade.

Bem, mas tratemos do triângulo. Trabalharemos com um triângulo retângulo $\triangle ABC$, com $\hat{A} = 90^o$. O maior lado (a hipotenusa) terá sua medida notada por a. A medida dos catetos será $[\overline{AB}] = c$ e $[\overline{AC}] = b$. Traçaremos a altura que parte do vértice A e encontra a hipotenusa no ponto D. A medida desta altura será $[\overline{AD}] = h$ e os segmentos determinados por D terão medidas $[\overline{BD}] = n$ e $[\overline{DC}] = m$. (figura 2.35)

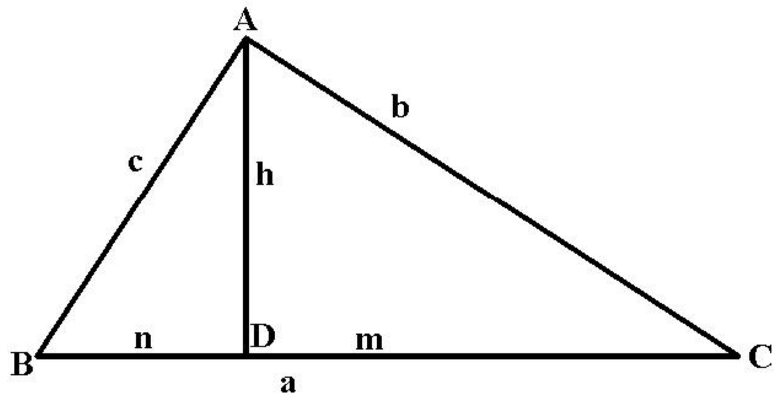


Figura 2.35: Triângulo retângulo

1. (a) Mostre que $\triangle ABC \sim \triangle DBA$.
   (b) Mostre que
   $$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} = \frac{c}{n}$$
   (c) Conclua que
   $$a.h = b.c \quad e \quad c^2 = a.n$$
2. (a) Mostre que $\triangle ABC \sim \triangle DAC$.
   (b) Mostre que
   $$\frac{a}{b} = \frac{b}{m} = \frac{c}{h}$$
   (c) Conclua que
   $$a.h = b.c \ \ (outra \ \ vez) \quad e \quad b^2 = a.m$$
3. (a) Mostre que $\triangle BDA \sim \triangle ADC$.
   (b) Mostre que
   $$\frac{b}{c} = \frac{m}{h} = \frac{h}{n}$$
   (c) Conclua que
   $$h^2 = m.n$$
4. **Teorema de Pitágoras**
   Já sabemos que:
   $$b^2 = a.m \ \ e \ \ c^2 = a.n$$
   Somando membro a membro
   $$a.m + a.n = b^2 + c^2 \Leftrightarrow a.(m+n) = b^2 + c^2 \Leftrightarrow a.a = b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$$
   Esse é o famoso teorema de Pitágoras.

O quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Alguns exemplos:

- $a = 5$, $b = 4$ e $c = 3$. Essas medidas correspondem aos lados de umtriângulo retângulo pois $5^2 = 4^2 + 3^2$ (confira).
- $a = 61$, $b = 61$ e $c = 60$. Essas medidas correspondem aos lados de umtriângulo retângulo pois $61^2 = 60^2 + 11^2$ (confira).

5. Mostre que para qualquer valor de x,

$$\frac{x^2+1}{2} \quad \frac{x^2-1}{2} \quad e \quad x$$

são os lados de um triângulo retângulo.

Se soubermos duas das medidas do triângulo retângulo, as relações métricas nos permitem calcular todas as outras. Por exemplo, se $b = 4$ cm e $c = 3$ cm, podemos calcular a, h, m e n. Vejamos:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 16 + 9 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = 5.$$

$$a.h = b.c \Rightarrow 5.h = 3 \times 4 \Rightarrow 5.h = 12 \Rightarrow h = 2,4$$

$$b^2 = a.m \Rightarrow 16 = 5.m \Rightarrow m = 3,2$$

$$a = m + n \Rightarrow 5 = 3,2 + n \Rightarrow n = 1,8$$

Exercícios (só para treinar): Dadas duas medidas de um triângulo retângulo calcule a,b, c h, m e n.(

1. $a = 15cm \quad b = 10cm$
2. $b = 15cm \quad m = 9cm$
3. $m = 27cm \quad n = 48cm$
4. $h = 15cm \quad m = 20cm$
5. Um triângulo equilátero tem lados medindo 66 cm; qual a medida da altura deste triângulo ?
6. Um retângulo tem lados medindo 7 cm e 24 cm. Qual a medida de sua diagonal?
7. Um losango tem diagonais medindo 12 cm e 16 cm. Qual a medida dos lados?
8. Um paralelepípedo retângulo tem arestas medindo 9 cm, 12 cm e 20 cm. Qual o comprimento da diagonal ligando dois vértices opostos ?
9. Embora os ângulos de um retângulo sejam todos de 90^o podem haver retângulos que não são semelhantes. Existe maneira de determinar quando dois retângulos são semelhantes sem verificar a proporcionalidade dos lados ?
10. Mesma questão para quadriláteros em geral.

2.8 Pentágonos, semelhança e razão áurea

Atenção: Para o que vem a seguir, é ncessário conhecimento da resolução da equacção de 2^o grau.

A figura 2.36 representa um pentágono regular e suas diagonais. As

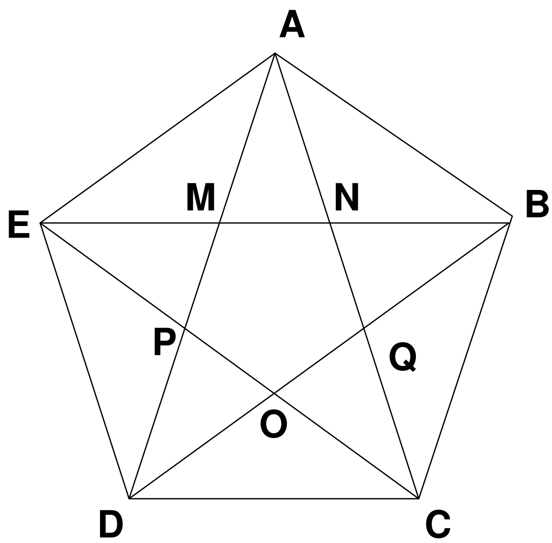


Figura 2.36: O pentágono e suas diagonais

questões abaixo se referem a esta figura.

(a) Calcule a medida de todos os ângulos da figura. Constate que todos são múltiplos de 36^o (36^o, 72^o e 108^o).

(b) Mostre que $\overline{AN} \cong \overline{EN}$.

(c) Mostre que $\overline{PQ} \cong \overline{EN}$.

(d) Mostre que $\triangle MAE \sim \triangle AEB$.

(e) Mostre que $\triangle ENC \sim \triangle EAB$.

(f) Mostre que $\triangle ANM \sim \triangle APQ \sim \triangle ADC$.

(g) Faça $x = [\overline{MN}] = [\overline{PM}]$ e $y = [\overline{PQ}] = [\overline{AM}]$.

(h) Use o item anterior e mostre que

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{x+y}$$

(i) Mostre que

$$\frac{y}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Esta é a **razão áurea** conhecida desde a antiguidade. Acredita-se que ela representa a proporção ideal de beleza. Aparece na

arquitetura grega, nas séries de Fibonacci (que já foram vistas em outras apostilas). Sua primeira definição foi através do retângulo áureo (veja figura 2.36).
Neste retângulo o lado menor tem medida y e sua proporção em relação ao lado maior, de medida $x + y$ é a mesma que o que a diferença de medidas do maior para o menor lado em relação ao lado menor. Mais simplesmente:

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{x+y}$$

que é a mesma relação encontrada no pentágono.

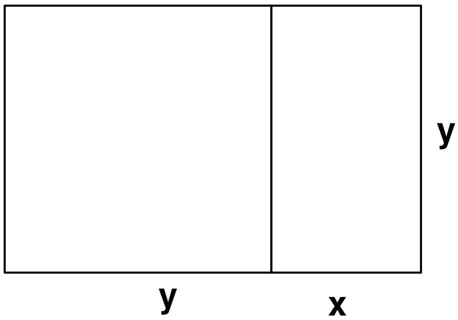


Figura 2.37: Retângulo áureo

Apêndice A

Para saber mais

Para saber mais você pode consultar os artigos da Revista do Professor de Matemática, editada pela SBM. Recomendamos também:

Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas - Rezende, E.Q.F; Queiroz, M.L.B. - Editora Unicamp 2000.

Construções Geométricas - Eduardo Wagner com colaboração de José Paulo Q. Carneiro - SBM - 2001.

Geometry - Jacobs, R.J - W.H.Freeman and Co. - New York - 1999