Agradecemos à UFRPE pelo apoio dado às atividades da OBMEP.

APRESENTAÇÃO

"O homem nasceu para aprender,
aprender tanto quanto a vida lhe permita"
João Guimarães Rosa

Em 2005, foi realizada no Brasil a primeira Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Dentre os mais de 14 milhões de estudantes que se submeteram às provas da Olimpíada, foram selecionados, em todo o país, cerca de mil estudantes (dos quais 35 em Pernambuco). A eles foi oferecido um curso, com o intuito de estimular o interesse pelo estudo da Matemática. Este curso foi concebido e supervisionado pela OBMEP e pelo IMPA e ministrado por professores recrutados nas universidades públicas.

Todo o material apresentado neste estágio foi elaborado no IMPA e constou de 7 apostilas cujo conteúdo, inicialmente acessível a estudantes do 1º e 2º graus, foi desenvolvido em profundidade.

No entanto, dada a excelência destes alunos, tornou-se necessário complementar as apostilas com mais exemplos e exercícios, alguns deles mais desafiadores, outros visando à fixação do material apresentado. Então, a equipe de professores aqui de Pernambuco reuniu estas listas de problemas de matemática, utilizando como fonte de referência material proveniente de olimpíadas anteriores, nacionais e estrangeiras, e muitos outros livros; estas fontes são citadas no final do texto.

O objetivo de apresentar agora esta coletânea é o de tornar esses exercícios disponíveis também para os alunos da OBMEP-2006. As resoluções não são apresentadas para não inibir possíveis abordagens diferentes. No entanto, as respostas são fornecidas para que o aluno possa verificar seu acerto.

Possíveis falhas com certeza existem; agradecemos que estes erros sejam comunicados.

Boa diversão

SUMÁRIO

ETAPAS PARA A RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA

TENTE RESOVER SOZINHO CADA UM DOS PROBLEMAS PROPOSTOS.

SIGA AS INSTRUÇÕES DADAS, A SEGUIR:

1. Leia o problema com atenção, concentre-se nele e, muita calma;
2. *Escreva com clareza os dados do problema e identifique o que se pede;*
3. Lembre-se de outro problema similar ao que você tenta resolver no momento e lembre-se dos conceitos matemáticos que poderão, ou não, estar envolvidos neste problema;
4. *Tente elaborar e resolver um problema mais simples e da mesma natureza;*
5. Procure criar relações entre os dados do problema e encontrar a solução que se quer atingir, com os modelos matemáticos necessários à obtenção da resolução;
6. *É possível verificar o problema?*
7. Não despreze os “insights” que, por acaso, venham a surgir. Confira-os;
8. *Mantenha a concentração e tenha absoluta certeza de que vai encontrar a solução correta.*

1. EXERCÍCIOS SOBRE DIVISIBILIDADE E NÚMEROS INTEIROS (PARTE 1)

> ***"Não filosofamos para saber o que seja virtude, mas para nos tornarmos pessoas virtuosas."***
> ***Aristóteles***

1. Se o dígito 1 é colocado após um número de dois dígitos cujo algarismo das dezenas é d e cujo algarismo das unidades é u, qual o valor do novo número?

2. Qual o maior inteiro que divide $n^3 - n$, para todo n?

3. Um número de seis algarismos é formado pela repetição de um número de três algarismos, ou seja, 256256, 678678, ... , etc. Por qual número é divisível os números da forma mencionada?

4. Qual o número que quando dividido por 10 dá resto 9, quando dividido por 9 dá resto 8, quando dividido por 8 dá resto 7, etc., até que, quando dividido por 2 dá resto 1?

5. Coloque em cada quadradinho, no desenho a seguir, os algarismos 1, 2, 3, 4 ou 5, de forma que cada um deles apareça pelo menos uma vez e que o número formado seja o maior possível e múltiplo de 9. Quantas vezes apareceu o algarismo mais repetido, no número que você construiu?

6. Nosso sistema de numeração é de base 10. Se a base fosse mudada para 4, nós contaríamos: 1, 2, 3, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 23, 30, ... Qual seria o vigésimo número?

7. Se n é um inteiro qualquer, $n^2 (n^2 - 1)$ é sempre divisível por qual número?

8. A base do sistema decimal é 10 e isto significa que, por exemplo, $123 = 1\times 10^2 + 2\times 10^1 + 3x10^0$ Em um sistema binário a base é 2 e os cinco primeiros inteiros positivos são 1, 10, 11, 100, 101. Sabendo que o número 10011 está escrito no sistema binário, como passá-lo para o sistema decimal?

9. Usando-se três pesos distintos de 1 kg, 3 kg e 9 kg, quantos objetos de pesos distintos podem ser pesados, com os pesos dados colocados em qualquer dos pratos da balança?

10. Sejam m e n dois números ímpares quaisquer com n menor que m. Qual o maior inteiro que divide todos os números possíveis da forma $m^2 - n^2$?

11. Mostre que se n é ímpar, então $n^2 - 1$ é divisível por 8.

12. Quantos quadrados perfeitos existem entre 40 000 e 640 000 que são múltiplos simultaneamente de 3, 4 e 5?

13. Qual dos números, a seguir, tem o maior número de divisores?

a) $104 = 2^3 \times 13$ b) $105 = 3 \times 5 \times 7$ c) $108 = 2^2 \times 3^3$
d) $120 = 2^3 \times 3 \times 5$ e) $124 = 2^2 \times 31$.

14. Hoje é Sábado. Que dia da semana será daqui a 99 dias?

15. O número 1234**a**6 é divisível por 7. Quanto vale o algarismo **a**?

16. Passarinhos brincam em volta de uma velha árvore. Se dois passarinhos pousam em cada galho, um passarinho fica voando. Se todos os passarinhos pousam, com três em um mesmo galho, um galho fica vazio. Quantos são os passarinhos?

17. Um menino joga três dados e soma os números que aparecem nas faces voltadas para cima. Qual o número dos diferentes resultados dessa adição?

18. Renata digitou um número em sua calculadora, multiplicou-o por 3, somou 12, dividiu o resultado por 7 e obteve o número 15. Qual foi o número digitado?

19. Numa competição de ciclismo, Carlinhos dá uma volta completa na pista em 30 segundos, enquanto que Paulinho leva 32 segundos para completar uma volta. Quando Carlinhos completar a volta número 80, qual o número da volta que Paulinho estará completando?

20. Quantos números de três algarismos existem cuja soma dos algarismos é 25?

21. João é mais velho que Pedro, que é mais novo que Carlos; Antônio é mais velho do que Carlos, que é mais novo do que João. Antônio não é mais novo do que João e todos os quatro meninos têm idades diferentes. Qual o mais jovem deles?

22. Escreva um número em cada espaço da tabela a seguir, de modo que a soma de três números quaisquer vizinhos e consecutivos seja 12. Qual número deve estar escrito no último retângulo à direita?

3								5	

23. O alfabeto usado no planeta X tem somente duas letras: **X** e **x**. O sobrenome (nome de família) de cada um de seus habitantes é uma seqüência formada por 4 letras. Por exemplo, xXxx é um possível sobrenome utilizado nesse planeta. Qual o maior número de sobrenomes diferentes que podem ser dados no planeta X?

24. Qual a diferença entre a soma de todos os números ímpares de dois algarismos e a soma de todos os números pares de dois algarismos?

25. Pedro e Maria formam um estranho casal. Pedro mente às quartas, quintas e sextas-feiras, dizendo a verdade no resto da semana. Maria mente aos domingos, segundas e terças-feiras, dizendo a verdade no resto da semana. Certo dia ambos dizem: “Amanhã é dia de mentir”. Qual o dia em que foi feita essa afirmação?

26. Um pai tem 33 anos e seu filho, 7 anos. Depois de quantos anos a idade do pai será o triplo da idade do filho?

RESPOSTAS:

1. 100d + 10u + 1
2. 6
3. 1001
4. 2519
5. 5 vezes
6. 110
7. 12
8. 19
9. 13
10. 4
11. -
12. 20
13. 120
14. Domingo
15. 6
16. 9
17. 16
18. 31
19. 75 voltas
20. 6
21. Pedro
22. 3
23. 16
24. 45
25. terça-feira
26. 6

2. EXERCÍCIOS SOBRE DIVISIBILIDADE E NÚMEROS INTEIROS (PARTE 2)

> ***"A mente que se abre a uma nova idéia jamais volta ao seu tamanho original."***
>
> **Albert Einstein**

1. Em um tanque há 4000 bolinhas de pingue-pongue. Um menino começou a retirar as bolinhas, uma por uma, com velocidade constante, quando eram 10. Após 6 horas, havia no tanque 3520 bolinhas. Se o menino continuasse no mesmo ritmo, quando o tanque ficaria com 2000 bolinhas?

2. Um time de futebol ganhou 8 jogos mais do que perdeu e empatou 3 jogos menos do que ganhou, em 31 partidas. Quantas partidas o time venceu?

3. Quantos números de três algarismos ímpares distintos são divisíveis por 3?

4. Dos números a seguir, qual é o único que pode ser escrito como produto de quatro naturais consecutivos?

a) 712 b) 548 c) 1026 d) 1456 e) 1680

5. Num relógio digital, as horas são exibidas por meio de quatro algarismos. Por exemplo, ao mostrar 00:00 sabemos que é meia-noite e ao mostrar 23:59 sabemos que falta um minuto para meia-noite. Quantas vezes por dia os quatro algarismos mostrados são todos pares?

6. Sara foi escrevendo nas casas de um tabuleiro 95 por 95 os múltiplos positivos de 4, em ordem crescente, conforme a figura ao lado.
O número que Sara escreveu onde se encontra a letra **U** é:

4	8	12	16	20	...	376	380
760	756	752	748	744	...	388	384
764	→	→	→	→	...	→	→
←	←	←	←	←	...	←	←
...							
							U

a) 35192 b) 35196 c) 36100 d) 36104 e) 36108

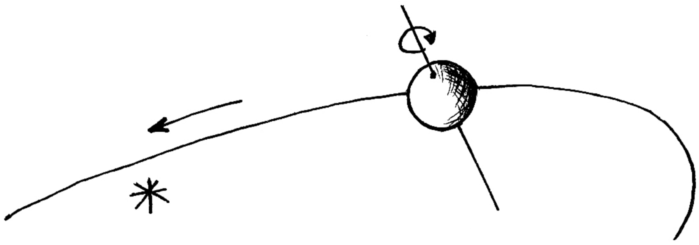
7. Um certo número inteiro positivo, quando dividido por 15 dá resto 7. Qual é a soma dos restos das divisões desse número por 3 e por 5?

8. No fim de 1994, Neto tinha a metade da idade de sua avó. A soma dos anos de nascimento dos dois é 3844. Quantos anos Neto completa em 2006?

9. As permutações da palavra Brasil foram listadas por ordem alfabética, como se fossem palavras de seis letras em um dicionário. A 361ª palavra nessa lista é:

a) BRISAL b) SIRBAL c) RASBIL d) SABRIL e) LABIRS

10. No planeta POT o número de horas por dia é igual ao número de dias por semana, que é igual ao número de semanas por mês, que é igual ao número de meses por ano. Sabendo que em POT há 4096 horas por ano, quantas semanas há num mês?



11. Se um número de dois dígitos é 5 vezes a soma de seus dígitos, então o número formado pela troca dos dígitos é a soma dos dígitos multiplicada por:

a) 3 b) 5 c) 6 d) 4 e) 7

12. A soma de três números naturais consecutivos é igual ao produto desses três números. A soma dos quadrados desses números é:

a) 14 b) 15 c) 18 d) 24 e) 36

13. Samuel possui três irmãos a mais do que irmãs. O número de irmãos de Samila, irmã de Samuel, é igual ao dobro do número de suas irmãs. O número de filhos (homens e mulheres) que possui o pai de Samuel e Samila é:

a) 10 b) 13 c) 16 d) 17 e) 20

14. João escreveu todos os números com menos de quatro dígitos usando apenas os algarismos 1 e 2 numa folha de papel e depois somou todos eles. O valor obtido foi:

a) 2314 b) 3000 c) 1401 d) 2316 e) 1716

15. Um número com dois dígitos distintos e não nulos é chamado de BONITO se o dígito das dezenas é maior do que o dígito das unidades. A quantidade de números BONITOS é:

a) 72 b) 36 c) 35 d) 64 e) 56

16. Ludmilson percebeu que para numerar as páginas de um livro, consecutivamente, a partir da página 2, foram usados 2006 algarismos. O número de páginas do livro de Ludmilson é:

a) 701 b) 702 c) 703 d) 704 e) 705

17. Quantos resultados diferentes podemos obter somando pares de números distintos do conjunto {1, 2, - - -, 2006}?

18. Qual dos valores abaixo de x é tal que $2x^2 + 2x + 19$ não é um número primo?

a) 50 b) 37 c) 9 d) 5 e) 1

19. Considere os 2161 produtos 0×2160, 1×2159, 2×2158 , - - - , 2160×0. Quantos deles são múltiplos de 2160?

a) 2 b) 3 c) 12 d) 13 e) 2161

20. Num grupo de moças e rapazes, 15 moças vão embora. Ficam então 2 rapazes para cada moça. Depois, 45 rapazes vão embora. Restam então 5 moças para cada rapaz. Qual o número de moças do grupo inicial?

21. Considere três números inteiros positivos consecutivos de três algarismos tais que o menor é múltiplo de 7, o seguinte é múltiplo de 9 e o maior é múltiplo de 11. Escreva todas as seqüências de números que satisfazem essas propriedades.

22. Numa festa um grupo de moças e rapazes dançam do seguinte modo: um rapaz dança com 5 moças, um segundo rapaz dança com 6 moças, e assim por diante; o último rapaz dança com todas as moças. Se R representa o número de rapazes e se M representa o número de moças, então:

a) R = M b) M = 5 R c) R = M – 5 d) R = M – 4

e) É impossível determinar a relação entre R e M sem conhecer o número total de moças e rapazes na festa.

23. Um fazendeiro divide seu rebanho de vacas entre seus quatro filhos de modo que um filho recebe metade do rebanho, um segundo filho recebe um quarto, um terceiro filho recebe um quinto do rebanho, e o último filho ganha sete vacas. Quantas vacas o fazendeiro tinha?

24. Na equação $(x - m)^2 - (x - n)^2 = (m - n)^2$ m é um número positivo fixo, e n é número negativo fixo. Os valores de x que satisfazem a equação são:

a) $x \geq 0$ b) $x \leq n$ c) $x = 0$ d) todos os reais

e) nenhuma das respostas

25. Quantos dígitos são necessários para escrever todos os números naturais de 1 a 100.000.000?

26. Quando $x^{18} + 1$ é dividido por $x - 1$, o resto é:

a) 1 b) -1 c) 0 d) 2 e) nenhuma das respostas

27. Um total de 28 apertos de mão foram dados após uma festa. Supondo que cada participante foi igualmente polido em relação a todos os outros, qual o número de pessoas presentes na festa?

28. Qual é o maior? 2^{27} , 3^{18} ou 5^{12} ?

29. A soma de certo número de inteiros positivos consecutivos é 1000. Encontre estes inteiros.

30. O inteiro A consiste de 666 três, e o inteiro B de 666 seis. Quais os dígitos que aparecem no produto A.B ?

31. Quantos zeros existem no final de 100**!** ?

32. Quais inteiros têm a seguinte propriedade? "Se o dígito final é deletado, o inteiro é divisível pelo novo número."

33. Prove o seguinte:

a) $3^{3n} - 2^{6n}$ é divisível por 35, qualquer que seja o número inteiro positivo *n.*

b) $n^5 - 5n^3 + 4n$ é divisível por 120, para qualquer inteiro n.

34. Prove que $n^2 + 3n + 5$ nunca é divisível por 121, quando n é um inteiro positivo.

35. Um número inteiro positivo K tem a propriedade seguinte: quando K divide um número N, K divide também qualquer número obtido de N permutando seus dígitos. Encontre todos os K possíveis.

36. Prove que o produto de n inteiros positivos consecutivos é divisível por n**!**

37. Se todos os coeficientes da equação $Ax^2 + Bx + C = 0$ são inteiros impares, então as raízes da equação não podem ser racionais. Prove esta afirmação.

38. Prove que se um dos números $2^n - 1$ e $2^n + 1$ é primo (sendo n maior que 2), então o outro número não é primo.

RESPOSTAS:

1. 11 horas
2. 14
3. 24
4. 1680
5. 105
6. 36100
7. 3
8. 60
9. LABIRS
10. 8
11. 6
12. 14
13. 16
14. 1401
15. 36
16. 705
17. 4009
18. 37
19. 13
20. 40
21. 350, 351, 352
22. d
23. 140
24. e
25. 788.888.898
26. d
27. 8
28. 3^{18}
29. 202 + 201 + 200 + 199 + 198 = 1000
30. 22 ... 2177... 78; 665 dígitos 2 e 665 dígitos 7
31. 24
32. 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 12, 24, 36, 48, 13, 26, 39, 14, 28, 15, 16, 17, 18, 19
35. 1, 3 e 9

3. EXERCÍCIOS SOBRE DIVISIBILIDADE E NÚMEROS INTEIROS (PARTE 3)

"As opiniões científicas se caracterizam pelo fato de existirem razões para as crermos verdadeiras, ao passo que as não-científicas são opiniões sustentadas por outras razões que não a sua provável verdade."

Bertrand Russel

1. A diferença entre os quadrados de dois números inteiros positivos consecutivos é sempre:

a) um número primo;
b) um múltiplo de 3;
c) igual à soma desses números;
d) um número par;
e) um quadrado perfeito.

2. O produto de um milhão de números naturais, não necessariamente distintos, é igual a um milhão. Qual é o maior valor possível para a soma desses números?

3. Escrevendo todos os números inteiros de 100 a 999, quantas vezes escrevemos o algarismo 5?

4. Dois irmãos, Pedro e João, decidiram brincar de pega-pega. Como Pedro é mais velho, enquanto João dá 6 passos, Pedro dá apenas 5. No entanto, 2 passos de Pedro equivalem à distância que João percorre com 3 passos. Para começar a brincadeira, João dá 60 passos antes de Pedro começar a persegui-lo. Depois de quantos passos Pedro alcança João?

5. O lava-rápido "Lave Bem" faz uma promoção:

- Lavagem simples – R$ 5,00
- Lavagem completa – R$ 7,00

No dia da promoção, o faturamento do lava-rápido foi de R$ 176,00. Nesse dia, qual o menor número possível de clientes que foram atendidos?

6. Quantos números inteiros positivos menores que 900 são múltiplos de 7 e terminam em 7?

7. Qual o resto da divisão por 9 de $\sqrt{1.111.111.111 - 22.222}$

8. N = θ5399840 é um número inteiro positivo com oito algarismos, sendo o primeiro e o último desconhecidos. Sabendo que N é um múltiplo de 198, encontre o algarismo das unidades de N/198.

9. Você possui muitos palitos com 6cm e 7 cm de comprimento. Para fazer uma fila de palitos com comprimento total de 2 metros,qual o número mínimo de palitos que você precisa utilizar?

10. Determine o maior natural n para o qual existe um inteiro m tal que 3^n divide $m^3 - 3m^2 + 22$.

11. O ano 2002 é palíndromo, ou seja, continua o mesmo se lido da direita para a esquerda.

a) Depois de 2002, quais serão os próximos quatro anos palíndromos?

b) O último ano palíndromo, 1991, era ímpar. Quando será o próximo ano palíndromo ímpar?

c) O último ano palíndromo primo aconteceu há mais de 1000 anos, em 929. Determine qual será o próximo ano palíndromo primo.

12. Dado um número, pode-se escrever o seu dobro ou suprimir o seu algarismo das unidades. Apresente uma seqüência que começa com 2002 e termina com 13, usando somente essas duas operações.

13. Nas casa de um tabuleiro 8×8 foram escritos números inteiros positivos de forma que a diferença entre números escritos em casas vizinhas (quadrados com um lado comum) é 1. sabe-se que numa das casas está escrito 17 e, em outra, está escrito 3. Desenhe um tabuleiro 8×8, preencha-o segundo essas regras e calcule a soma dos números escritos nas duas diagonais do tabuleiro.

14. O primeiro número de uma seqüência é 7. O próximo é obtido da seguinte maneira: calculamos o quadrado do número anterior $7^2 = 49$ e a seguir efetuamos a soma de seus algarismos e adicionamos 1, isto é, o segundo número é $4 + 9 + 1 = 14$. Repetimos este processo, obtendo $14^2 = 196$ e o terceiro número da seqüência é $1 + 9 + 6 + 1 = 17$ e assim sucessivamente. Qual o 2002º elemento desta seqüência?

15. Considere a seqüência oscilante:1,2,3,4,5,4,3,2,1,2,3,4,5,4,3,2,1,2,3 ...
Qual o 2003º termo desta seqüência?

16. Em um quadrado mágico, a soma dos números de cada linha, coluna ou diagonal é sempre a mesma. No quadrado mágico a seguir, qual o valor de x?

1	14	x
26		13

17. Considere um número inteiro x e faça com ele as seguintes operações sucessivas: multiplique por 2, some 1, multiplique por 3 e subtraia 5. Qual o valor de x se o resultado for 220?

18. João disse para Maria: "Se eu lhe der um quarto do que tenho, você ficará com metade do que vai me sobrar". Maria acrescentou: "E eu lhe daria 5 reais, se lhe desse a metade do que tenho". Quanto possuem os dois juntos

19. A seqüência "22" descreve a si mesma, pois ela é formada por exatamente dois 2. Analogamente, a seqüência "31 12 33 '5" descreve a si mesma, pois é formada por exatamente três 1, um 2, três 3 e um 5. Qual das seguintes seqüências não descreve a si mesma?

a) 21 32 23 16 b) 31 12 33 18 c) 31 22 33 17 19
d) 21 32 33 24 15 e) 41 32 23 24 15 16 18

20. Camila e Lara estão disputando o seguinte jogo num tabuleiro 4×4: Camila marca algumas casas do tabuleiro e informa à Lara o número de casas marcadas na vizinhança de cada casa do tabuleiro. Neste jogo, duas casas distintas são consideradas vizinhas se possuem um lado ou um canto (vértice) em comum. Lara deve descobrir quais casas foram marcadas por Camila. Após marcar algumas casas, Camila passou para Lara o seguinte tabuleiro:

Qual o número de casas marcadas?

	2	1	1
0	2	1	2
2	3	3	1
1	0	2	1

21 Seja n = 9867. Se você calculasse $n^3 - n^2$ você encontraria um número cujo algarismo das unidades é:

a) 0 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

22 Se os números a, b e c são números naturais consecutivos em ordem crescente, qual o valor de c^2 - ab?

23 Divida os números 2, 3, 5, 7, 11, 13 e 17 em dois grupos X e Y com produtos A e B, respectivamente, de modo que A – B = 1. Qual a soma dos algarismos de A?

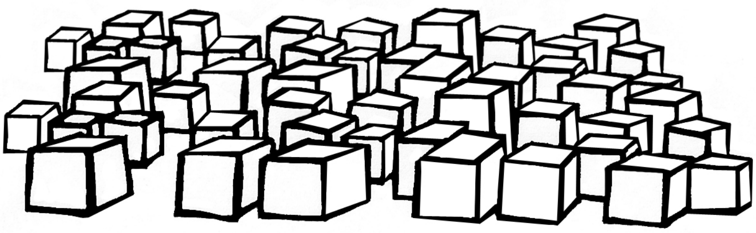
24 Carlinhos pensa num número ímpar positivo menor do que 100. Pedrinho se dispõe a descobrir que número é esse fazendo a seguinte pergunta, quantas vezes forem necessárias: "O número que você pensou é maior, menor ou igual a x?". Note que x é um número que Pedrinho escolhe. Quantas perguntas desse tipo Pedrinho poderá fazer até descobrir o número pensado por Carlinhos?

25. Seja N o menor inteiro positivo que pode ser escrito como a soma de 9, 10, e 11 inteiros positivos consecutivos. Qual a soma dos algarismos de N?

26. Os quadrados dos números naturais maiores do que 2, subtraídos de seus sucessores, formam a seqüência 5, 11, 19, ... O primeiro elemento dessa seqüência que não é um número primo é o:

a) quarto b) décimo c) sexto d) nono e) sétimo

27. Mil cubos com aresta 1 são arrumados juntos para formar um cubo de aresta 10. Este cubo então é pintado, e depois os mil cubos originais são separados novamente. Quantos cubos ficaram com um face pintada? Quantos cubos ficaram com duas faces pintadas? Com três? Quantos cubos não foram pintados?



28. Qual a soma de todos os inteiros entre 50 e 350 que terminam em 1?

29. Se $p \geq 5$ é um número primo, então 24 divide $p^2 - 1$ sem deixar resto.

a) nunca b) somente às vezes c) sempre d) só se $p = -5$
e) nada disto ocorre.

30. Qual o número de conjuntos com dois ou mais inteiros consecutivos cuja soma seja 100?

31. Qual o menor primo que divide a soma $3^{11} + 5^{13}$?

32. Na equação seguinte, cada letra representa de modo único um dígito (na base dez): **(**YE). (ME) = TTT. Qual o valor da soma E+M+T+Y?

33. Qual o número de divisores inteiros positivos distintos de 30^4 ?

34. A soma dos oitenta primeiros inteiros positivos ímpares é subtraída da soma dos oitenta primeiros inteiros positivos pares. Qual o resultado?

35. Qual é o menor inteiro positivo n tal que o produto $2^{\frac{1}{7}}.2^{\frac{3}{7}}.\ldots.2^{\frac{2n-1}{7}}$ é maior que 1000?

36. Quantos pares (m,n) de inteiros existem satisfazendo a equação m+n = m.n?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) mais de quatro

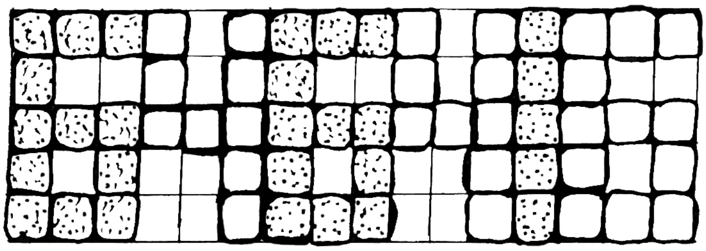
37. Um número de seis dígitos (base 10) é *quadradinho* se ele satisfaz às seguintes condições:

a) nenhum de seus dígitos é zero.

b) ele é quadrado perfeito.

c) os primeiros dois dígitos, os dois dígitos do meio e os últimos dois dígitos formam números de dois dígitos que são quadrados perfeitos.

Quantos números *quadradinhos* existem?



38. Determine o maior inteiro positivo n tal que 1005! é divisível por 10^n .

39. Existem inteiros maiores do que 1 que, quando divididos por qualquer inteiro k tal que 2≤ k ≤ 1, apresentam um resto igual a 1. Qual a diferença entre os dois menores destes inteiros?

40. Encontre a soma dos dígitos do maior número par com três dígitos que não muda quando os dígitos da unidade e da centena são trocados.

41. O quadrado de um inteiro é chamado um quadrado perfeito. Se x é um quadrado perfeito, o próximo quadrado perfeito é:

a) $x+1$ b) $x^2 + 1$ c) $x^2 + 2x + 1$ d) $x^2 + x$ e) $x + 2\sqrt{x} + 1$

RESPOSTAS:

1. igual à soma desses números
2. 1.999.999
3. 280 vezes
4. 200 passos
5. 26
6. 13
7. 6
8. 7
9. 29
10. 2
11. a) 2112, 2222, 2332, 2442
b) 3003 c) 10301
12. uma possível solução: 2002, 200, 20, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 51, 102, 204, 408, 816, 1632, 163, 326, 652, 1304, 130, 13
13. $8 \times 10 + (3 + 5 + . . . + 17) = 160$
14. 11
15. 3
16. 27
17. 37
18. 90 reais
19. D
20. 4
21. 4
22. 2b + c
23. 13
24. máximo de 5 perguntas
25. 18
26. sexto
27. 384 / 96 / 8 / 512
28. 5880
29. –
30. 2
31. 2
32. 21
33. 125
34. 80
35. 13
36. 2
37. 2
38. 3
39. 2
40. 25
41. e

4. EXERCÍCIOS SOBRE CONTAGEM E PROBABILIDADE (PARTE 1)

"Para alcançar a verdade é preciso, uma vez na vida, desfazermo-nos de todas as opiniões que recebemos e reconstruir de novo e desde os fundamentos, todos os sistemas dos nossos conhecimentos."

René Descartes

1. Duas pessoas vão disputar uma partida de par ou ímpar. Elas não gostam do zero e, assim, cada uma coloca 1, 2, 3, 4 ou 5 dedos com igual probabilidade. Qual a probabilidade de que a pessoa que escolheu par ganhe?

2. No triminó marciano, as peças têm 3 números cada (diferente do dominó da terra, onde cada peça tem apenas 2 números). Os números no triminó marciano também variam de 0 a 6, e para cada escolha de 3 números (não necessariamente distintos) existe uma e somente uma peça que contém esses 3 números. Qual é a soma dos números de todas as peças do triminó marciano?

3. No jogo pega-varetas, as varetas verdes valem 5 pontos cada uma, as azuis valem 10 pontos, as amarelas valem 15, as vermelhas, 20 e a preta, 50. Existem 5 varetas verdes, 5 azuis, 10 amarelas, 10 vermelhas e 1 preta. Carlinhos conseguiu fazer 40 pontos numa jogada. Levando em conta apenas a quantidade de varetas e suas cores, de quantas maneiras diferentes ele poderia ter conseguido essa pontuação, supondo que em cada caso fosse possível pegar as varetas necessárias?

4. Três amigas foram para uma festa com vestidos azul, preto e branco, respectivamente. Seus pares de sapato apresentavam essas mesmas três cores, mas somente Ana usava vestido e sapatos de mesma cor. Nem o vestido nem os sapatos de Júlia eram brancos. Marisa usava sapatos azuis. Descreva a cor do vestido de cada uma das moças.

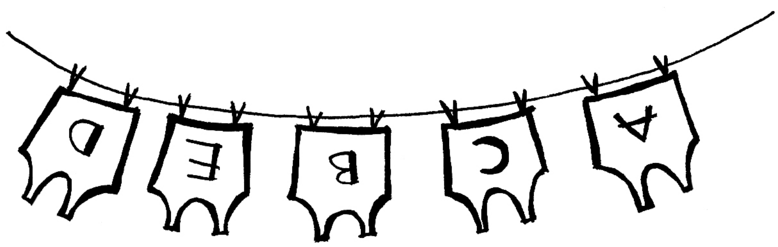
5. Quantos dados devem ser lançados ao mesmo tempo para maximizar a probabilidade de se obter exatamente um 2?

6. Numa festa típica, cada prato de arroz foi servido para duas pessoas, cada prato de maionese para três pessoas, cada prato de carne servia quatro pessoas e cada prato de doces dava exatamente para cinco pessoas. Foram utilizados 77 pratos e todas as pessoas se serviram de todos os pratos oferecidos. Quantas pessoas havia na festa?

7. Uma escola precisa comprar mesas e cadeiras novas para seu refeitório, cada mesa com 4 cadeiras, que serão distribuídas nos 3 setores do refeitório. Em cada setor do refeitório cabem 8 fileiras de mesas e, em cada fileira, cabem 14 mesas. Quantas mesas e cadeiras devem ser compradas?

8. Beatriz, Isabele e Nicole estão disputando um jogo fazendo lançamentos sucessivos com uma moeda. Beatriz ganha se, em dois lançamentos consecutivos, o primeiro resultar cara e o segundo coroa. Isabele ganha se forem obtidas duas coroas em dois lançamentos consecutivos. Elas fazem os lançamentos até que uma das jogadoras seja vencedora. Qual(is) jogadora(as) possui(em) menos chances de ganhar o jogo?

9. Cinco amigos, Arnaldo, Bernaldo, Cernaldo, Dernaldo e Ernaldo, devem formar uma fila com outras 30 pessoas. De quantas maneiras podemos formar esta fila de modo que Arnaldo fique na frente de seus 4 amigos?
(Obs: os amigos não precisam ficar em posições consecutivas)



10. Um clube de tênis tem n jogadores canhotos e 2n jogadores destros e, ao todo, há menos do que 20 jogadores. No último campeonato interno, no qual cada jogador enfrentou cada um dos outros jogadores do clube exatamente uma vez, a razão entre o número de jogos vencidos por jogadores canhotos e o número de jogos vencidos por jogadores destros foi 3 : 4. Qual é o valor de n?

11. (UFPE – 1991) Qual o número de placas de carros que poderiam ser registradas (cada uma contendo apenas três letras) fazendo uso das letras A, B, C, D?

12. (UFPE – 1995) Uma prova de matemática é constituída de 16 questões do tipo múltipla escolha, tendo cada questão 5 alternativas distintas. Se todas as 16 questões forem respondidas ao acaso, qual o número de maneiras distintas de se preencher o cartão de respostas?

13. (UFPE – 1998) Um vestibulando arrumou numa prateleira, de forma aleatória, seus 5 livros de Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Trigonometria e Combinatória). Qual a probabilidade dos livros de Aritmética e Combinatória não estarem juntos?

14. (UFPE – 1999) Pretende-se formar uma comissão de dois estudantes e um professor. Os estudantes serão escolhidos entre Ricardo, Daniel, Samuel e Roberto, e o professor, entre Antônio, Manoel e Paulo. Qual a probabilidade de estarem na comissão Daniel e Antônio?

15. (UFPE – 2000) Um casal planeja ter 4 filhos. Supondo igual a chance de um filho nascer do sexo masculino ou do sexo feminino, qual a probabilidade de o casal vir a ter, no mínimo, dois filhos do sexo masculino?

16. (UFPE – 2002) Em um grupo de quatro deputados do PP1 e quatro do PP2, é conhecido que cada um dos deputados do PP1 possui um único inimigo político dentre os deputados do PP2. Se escolhermos neste grupo, aleatoriamente, um deputado do PP1 e outro do PP2 para compor uma comissão, qual a probabilidade de não obtermos inimigos políticos?

17. (UFPE – 2002) Um saco contém 12 bolas verdes e 8 bolas amarelas. Quantas bolas azuis devem ser colocadas no saco, de modo que a probabilidade de retirarmos do mesmo, aleatoriamente, uma bola azul, seja 2/3?

18. (UFPE – 2003) Formando três pares, aleatoriamente, com Joaquim, Pedro, Carlos, Maria, Joana e Beatriz, qual a probabilidade de Joaquim e Carlos formarem um par?

19. (UFPE – 2005) O vírus X aparece nas variantes Y e Z. Se um indivíduo tem esse vírus, a probabilidade de ser a variante Y é de 3/5. Se o indivíduo tem o vírus Y, a probabilidade de esse indivíduo sobreviver é de 2/3; mas, se o indivíduo tem o vírus Z, a probabilidade de ele sobreviver é de 5/6. Nessas condições, qual a probabilidade de o indivíduo portador do vírus X sobreviver?

20. (UFPE – 2002) Três dados perfeitos A, B e C têm duas faces numeradas da seguinte forma:

Dado A: Duas faces numeradas com 1 e quatro com 5;
Dado B: Seis faces numeradas com 4;
Dado C: Quatro faces numeradas com 2 e duas com 6.

Lançando-se dois destes dados, diremos que é ganhador aquele que apresenta o maior número na face voltada para cima. De posse destas informações, analise as alternativas abaixo:

1) O dado A ganha do dado B com probabilidade 2/3.
2) O dado B ganha do dado C com probabilidade 2/3.
3) O dado C ganha do dado A com probabilidade 5/9.

Está(ão) correta(s):

a) 1 e 2 apenas b) 1 apenas c) 1, 2 e 3 d) 1 e 3 apenas
e) 2 e 3 apenas

21. (UFPE – 2001) Os times A, B e C participam de um torneio. Suponha que as probabilidades de A ganhar e perder de B são respectivamente 0,6 e 0,2, e as probabilidades de A ganhar e perder de C são respectivamente 0,1 e 0,6. Jogando com B e em seguida com C, qual a probabilidade de A empatar os dois jogos?

22. (MACK – SP) Uma classe tem 10 alunos e 5 alunas. Formam-se comissões de 4 alunos e 2 alunas. Determine o número de comissões em que participa o aluno X e não participa a aluna Y.

23. (FCMSC – SP) Em um hospital há três vagas para trabalhar no berçário, 5 no banco de sangue e 2 na radioterapia. Se 6 funcionários se candidatam para o berçário, 8 para o banco de sangue e 5 para a radioterapia, de quantas formas distintas essas vagas podem ser preenchidas?

24. (FUVEST - SP) Considere todas as trinta e duas seqüências, com cinco elementos cada uma, que podem ser formadas com os algarismos 0 e 1. Quantas dessas seqüências possuem pelo menos três zeros em posições consecutivas?

25. (MACK – SP) Ache o número de triângulos determinados por 7 pontos distintos, 4 sobre uma reta e 3 sobre uma reta paralela à primeira.

26. (PUC - SP) O novo sistema de placas de veículos utiliza um grupo de 3 letras (dentre 26 letras) e um grupo de 4 algarismos (por exemplo: ABC – 1023). Uma placa dessas será "palíndroma" se os dois grupos que a constituem forem "palíndromos". O grupo ABA é "palíndromo" pois as leituras da esquerda para a direita e da direita para a esquerda são iguais; da mesma forma, o grupo 1331 é "palíndromo". Quantas placas "palíndromas" distintas poderão ser construídas?

27. (UNICAMP –SP) De quantas maneiras podem ser escolhidos 3 números naturais distintos de 1 a 30 de modo que sua soma seja par?

28. (UFOP –MG) Para compor a tripulação de um avião, dispomos de 20 pilotos, 4 co-pilotos, 3 comissárias e 5 comissários de bordo. Sabendo que em cada vôo vão 2 comissárias, 2 comissários, 1 piloto e 2 co-pilotos, de quantos modos pode ser escolhida a tripulação?

29. (PUC –SP) Um professor propôs para uma de suas turmas uma prova com 7 questões, das quais cada aluno deveria escolher exatamente 5 questões para responder. Sabe-se que não houve duas escolhas das mesmas 5 questões entre todos os alunos da turma. Qual o número máximo de alunos que essa turma poderia possuir?

30. (FGV - SP) Uma empresa tem 3 diretores e 5 gerentes. Quantas comissões de 5 pessoas podem ser formadas contendo no mínimo 1 diretor?

31. (FGV – SP) Numa sala de reunião há 10 cadeiras e 8 participantes. De quantas maneiras distintas podem sentar os participantes?

32. (UFU – MG) Qual o número de anagramas da palavra ERNESTO que começam e terminam por consoante?

33. (MACK – SP) Os números dos telefones de uma cidade são constituídos de 6 dígitos. Sabendo que o primeiro dígito nunca pode ser zero, se os números dos telefones passarem a ser de 7 dígitos, qual o aumento possível na quantidade de telefones?

34. (FUVEST – SP) Quantos são os números inteiros positivos de cinco algarismos que não têm algarismos adjacentes iguais?

35. (VUNESP – SP) Determine quantos são os números de três algarismos múltiplos de 5, cujos algarismos das centenas pertencem ao conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ e os demais algarismos ao conjunto $\{0, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

36. (UFOP-MG) Sejam dadas 10 caixas, numeradas de 1 a 10, e 10 bolas, sendo 3 verdes, 4 vermelhas e 3 azuis. Colocando uma bola em cada caixa, de quantas maneiras é possível guardar as bolas nas caixas?

37. (UFSC) Sobre uma reta são marcados 7 pontos, e sobre uma outra reta, paralela à primeira, 3 pontos. Qual é o número de triângulos com vértices em três desses pontos?

38. (PUC – MG) Qual o número de maneiras pelas quais 6 pessoas podem ser distribuídas em 3 grupos, cada um formado por 2 pessoas?

39. (FCMSC – SP) Existem 4 estradas de rodagem e 3 estradas de ferro entre as cidades A e B. Quantos são os diferentes percursos para fazer a viagem de ida e volta entre A e B, utilizando rodovia e trem, obrigatoriamente, em qualquer ordem?

40. (FGV – SP) Em uma sala existem seis casais; entre essas 12 pessoas, duas são selecionadas ao acaso.

i. Qual a probabilidade de selecionarmos um homem e sua esposa?
ii. Qual a probabilidade de selecionarmos dois homens?

41. (VUNESP – SP) Num grupo de 100 pessoas da zona rural, 25 estão afetadas por uma parasitose intestinal A e 11 por uma parasitose intestinal B, não se verificando nenhum caso de incidência conjunta de A e B. Duas pessoas desse grupo são escolhidas, aleatoriamente, uma após a outra. Determine a probabilidade de que, dessa dupla, a primeira pessoa esteja afetada por A e a segunda por B.

42. (UNICAMP – SP) Um dado é jogado três vezes, uma após a outra. Pergunta-se:

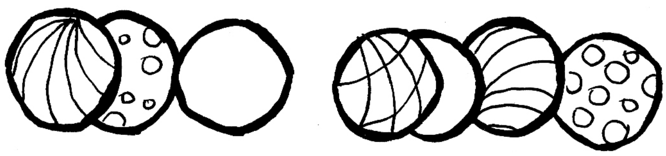
i. Quantos são os resultados possíveis em que os três números obtidos são diferentes?

ii. Qual a probabilidade de a soma dos resultados ser maior ou igual a 16?

43. (FUVEST – SP)

a) Uma urna contém três bolas pretas e cinco bolas brancas. Quantas bolas azuis devem ser colocadas nessa urna de modo que, retirando-se uma bola ao acaso, a probabilidade de ela ser azul seja igual a 2/3?

b) Considere agora uma outra urna que contém uma bola preta, quatro bolas brancas e x bolas azuis. Uma bola é retirada ao acaso dessa urna, a sua cor é observada e a bola é devolvida à urna. Em seguida, retira-se novamente ao acaso uma bola dessa urna. Para que valores de x a probabilidade de que as duas bolas sejam da mesma cor vale ½?



44. (PUC – SP) Um jogo de crianças consiste em lançar uma caixa de fósforos sobre uma mesa. Ganha quem conseguir fazer com que a caixa fique apoiada sobre sua menor face. Suponha que a probabilidade de uma face ficar apoiada sobre a mesa é proporcional à sua área e que a constante de proporcionalidade é a mesma para cada face. Se as dimensões da caixa são 2cm, 4cm, e 8 cm, qual é a probabilidade de a caixa ficar apoiada sobre sua face menor?

45. (FUVEST – SP) Numa urna há:

- Uma bola numerada com o número 1;
- Duas bolas numeradas com o número 2; três bolas com o número 3, e assim por diante, até n bolas com o número n.

Uma bola é retirada ao acaso dessa urna. Admitindo-se que todas as bolas têm a mesma probabilidade de serem escolhidas, qual é, em função de n, a probabilidade de que o número da bola retirada seja par?

46. (FUVEST – SP) Uma urna contém 20 bolas numeradas de 1 a 20. Seja o experimento: retirada de uma bola. Considere os eventos:
A = { a bola retirada possui um múltiplo de 2};
B = {a bola retirada possui um múltiplo de 5}
Qual é a probabilidade do evento $A \cup B$?

RESPOSTAS:

1. 13/25
2. 756
3. não dá pois há apenas 5 varetas verdes
4. sapatos de Marisa azuis, de Júlia pretos e de Ana brancos – vestidos de Ana branco, de Júlia azul e de Marisa preto
5. n = 5 ou n = 6
6. 60
7. 336 mesas e 1344 cadeiras
8. Isabele
9. 35!/5
10. 5
11. 64
12. 5^{16}
13. 3/5
14. 1/6
15. 0,6875
16. 3/4
17. 40
18. 0,2
19. 11/15
20. 1, 2 e 3
21. 0,06
22. 504
23. 11200
24. 8
25. 30
26. 67600
27. 2030
28. 3600
29. 21
30. 55
31. 1.814.400
32. 720
33. 8.100.000
34. 9
35. 48
36. 4200
37. 84
38. 90
39. 24
40. a) 1/11 b) 5/22
41. 2,8%
42. a) 120 b) 4,6%
43. a) 16 b) 1 ou 9
44. 14,3%
45. para n par, p = (n + 2) / 2(n + 1)
46. 3/5

5. EXERCÍCIOS SOBRE CONTAGEM E PROBABILIDADE (PARTE 2)

"Tudo é símbolo, e sábio é quem lê em tudo. "
Plotino

1. Existem 10 cadeiras numeradas de 1 a 10. De quantas formas duas pessoas podem se sentar, devendo haver ao menos uma cadeira entre elas.

2. De quantas maneiras três casais podem ocupar 6 cadeiras, dispostas em fila, de tal forma que as duas das extremidades sejam ocupadas por homens?

3. De quantas formas 12 crianças podem formar uma roda?

4. Quantos colares podemos formar usando quatro contas, todas diferentes?

5. Temos m meninos e m meninas. De quantas formas eles podem formar uma roda, de modo que os meninos e as meninas se alternem? (Sugestão: suponha $m = 3$ e forme a 1ª roda só com meninos, depois resolva para m qualquer)

6. Um lote contém 50 peças boas e 10 defeituosas. Extraindo-se 8 peças (sem reposição), não levando em conta a ordem das mesmas, de quantas formas podemos obter 4 peças boas e 4 defeituosas?

7. Em uma urna existem 12 bolas, das quais 7 são pretas e 5 brancas. De quantos modos podemos tirar 6 bolas da urna, das quais duas são brancas?

8. Quantos subconjuntos de 5 cartas contendo exatamente 3 ases podem ser formados de um baralho de 52 cartas?

9. Um urna contém 3 bolas vermelhas e 5 brancas. De quantas formas podemos extrair 2 bolas, sem reposição e sem levar em conta a ordem na extração, de modo que:

a) as duas sejam vermelhas?
b) as duas sejam brancas?
c) uma seja vermelha e outra branca?

10. Uma urna contém 10 bolas brancas e 6 pretas. De quantos modos é possível tirar 7 bolas, das quais pelo menos 4 sejam pretas?

11. Quantos planos são determinados por quatro pontos distintos e não coplanares?

12. Numa circunferência são tomados 8 pontos distintos.

a) ligando-se 2 desses pontos, quantas cordas podem ser traçadas?
b) Ligando-se 3 desses pontos, quantos triângulos podem ser formados?
c) Ligando-se 6 desses pontos, quantos hexágonos podem ser formados?

13. No espaço existem 7 pontos, entre os quais não existem 4 pontos coplanares. Quantos planos eles determinam?

14. Uma urna contém 3 bolas vermelhas e 2 amarelas. Elas são extraídas uma a uma sem reposição. Quantas seqüências de cores podem observar?

15. Com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, de quantas formas podemos permutá-los de modo que os números ímpares fiquem sempre em ordem crescente?

16. Um grupo de 10 viajantes pára para dormir num hotel. Só havia 2 quartos com 5 lugares cada um. De quantas formas eles puderam se distribuir para dormir naquela noite?

17. De quantos modos 8 pessoas podem ocupar duas salas distintas, devendo cada sala conter pelo menos 3 pessoas?

18. Dez alunos devem ser distribuídos em 2 classes, de 7 e 3 lugares respectivamente. De quantas maneiras distintas pode ser feita essa distribuição?

19. Separam-se os números inteiros de 1 a 10 em dois conjuntos de 5 elementos, de modo que 1 e 8 não estejam no mesmo conjunto. Isso pode ser feito de n modos distintos. Qual é o valor de n?

20. Dentre 6 números positivos e 6 números negativos, de quantos modos podemos escolher quatro números cujo produto seja positivo?

21. De quantas formas 12 estudantes podem ser divididos e colocados em 3 salas, sendo 4 na primeira, 5 na segunda e 3 na terceira?

22. De quantas maneiras podemos atribuir os nomes de Paulo, Antônio e José a 11 meninos, com a condição de que três deles se chamem Paulo, dois se chamem Antônio e seis se chamem José?

23. Um baralho tem 52 cartas. De quantos modos podemos distribuí-las entre 4 jogadores, de modo que cada um receba 13 cartas?

24. De quantas formas podemos distribuir 10 bolinhas, numeradas de 1 a 10, em 2 urnas, A e B (podendo eventualmente uma ficar vazia)?

25. De quantas formas podemos repartir 9 pessoas em 3 grupos, ficando 3 pessoas em cada grupo?

26. Quantas soluções inteiras não negativas têm as equações:
a) $x + y + z = 6$
b) $x + y + z + t = 10$
c) $x + y + z + t + w = 10$

27. Uma pastelaria vende pastéis de carne, queijo e palmito. De quantas formas uma pessoa pode comer 5 pastéis?

RESPOSTAS:

1. 72
2. 144
3. 11!
4. 3
5. (m – 1)! m!
6. 48.363.000
7. 350
8. 4512
9. a) 3 b) 10 c) 15
10. 2080
11. 4
12. a) 28 b) 56 c) 28
13. 35
14. 10
15. 210
16. 252
17. 182
18. 120
19. 70
20. 255
21. 27.720
22. 4620
23. $52! / (13!)^4$
24. 1024
25. 280
26. a) 28 b) 286 c) 1001
27. 21

UM POUCO DE HISTÓRIA
CONTAGEM E PROBABILIDADE

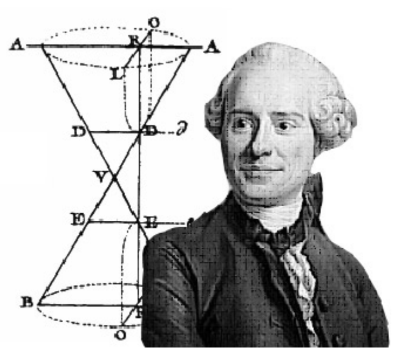
"Ótimo é aquele que de si mesmo conhece todas as coisas;
Bom, o que escuta os conselhos dos homens judiciosos.
Mas o que por si não pensa, nem acolhe a sabedoria alheia,
Esse é, em verdade, um homem inteiramente inútil."

Hesíodo

Texto de Jeanine Japiassu

Girolamo Cardamo (1501/1576), jogador compulsivo, escreve um dos primeiros tratados sobre a teoria das probabilidades, publicando "Ludo Aleae" (Sobre o Jogo dos Dados) onde apresenta, dentre outras coisas, conselhos sobre como trapacear no jogo.

O nobre francês Antoine Gambaud, conhecido por Chevalier de Méré, exímio jogador, em 1654, propõe a Blaise Pascal (1623/1662) o seguinte problema: "Dois jogadores de mesma habilidade resolvem interromper um jogo antes do término, conhecidos os números de pontos de cada um, em que proporção devem ser divididas as apostas?".



Chevalier de Méré

Pascal abre uma discussão com Pierre de Fermat (1601/ 1665) sobre esse problema e considera-se a correspondência entre eles, como o marco inicial das discussões sobre a teoria das probabilidades, área da matemática aplicada que cria, elabora e pesquisa modelos para o estudo dos fenômenos aleatórios. São fenômenos não-determinísticos, ou seja, ao não se ter conhecimento exato do resultado de um experimento aleatório buscam-se os resultados prováveis ou mesmo as chances de um determinado evento ocorrer.

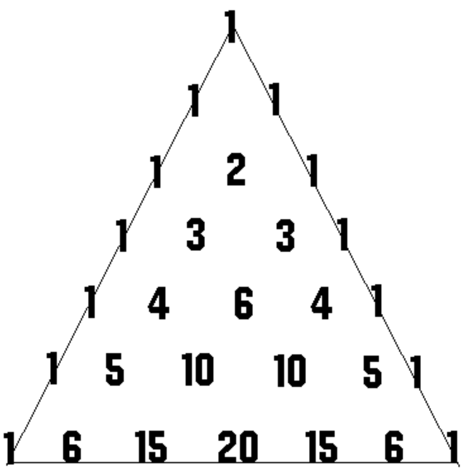
Blaise Pascal

Em 1654, Pascal termina o seu ***"Tratado do Triângulo Aritmético"*** que é um estudo sobre as propriedades dos coeficientes binomiais e relações entre eles, onde aplica princípios da teoria das probabilidades. Exemplificando: a soma dos termos da terceira diagonal representa o número de possibilidades no lançamento de três moedas não-viciadas, enquanto que os termos, em si, representam as ocorrências possíveis: uma possibilidade de três caras, três possibilidades de duas caras e uma coroa e assim por diante.

O triângulo de Pascal, const recido em escritos matemáticos chi fato de Pascal o haver ligado ao est se chamar - ***triângulo de Pascal.***

Estimulado por essas (1629/1695) publica em 1657***, "De*** Raciocínio em Jogos de Dados).

No entanto**,** considera-se *o* **mais an babilidades o *"Ars Conjectandi" Jacques Bernoulli (1654/1705),*** pul dido em quatro partes: na primeira tado de Huygens, junto com um con contém **uma teoria geral das pern** parte **expõe 24 problemas sobre j** senta o famoso **"teorema de Bern dos grandes números".**



Durante o período moderno da história da matemática, Leonhard Euler (1707/1783) e Jean Le Rond d'Alembert (1717/1783) continuam suas pesquisas sobre os problemas de contagem e probabilidade, escrevendo sobre problemas de expectativa de vida, o valor de uma anuidade, loterias e outros problemas mais vinculados às questões do cotidiano das pessoas e de cunho mais sociais. Em 1751, Euler publica num periódico chamado Memórias da Academia de Berlim, o seguinte problema: um pagamento de 350 coroas deveria comprar para um recém-nascido uma anuidade de 100 coroas a partir dos dos vinte anos e continuando pelo resto da vida.


Leonhard Euler

Em 1765, na mesma revista, ele publica vários problemas sobre loteria e, dentre eles, o que vamos enunciar, a seguir.

Suponha que n bilhetes são numerados consecutivamente de 1 a n e que três bilhetes são tirados ao acaso. Então a probabilidade que três números consecutivos sejam tirados é

$$\frac{2.3}{n(n-1)}$$

a probabilidade que dois números consecutivos sejam tirados é

$$\frac{2.3\,(n-3)}{n(n-1)}$$

e a probabilidade que não sejam tirados números consecutivos é

$$\frac{(n-3)\,(n-4)}{n(n-1)}$$

Euler introduz uma nova notação e representa a nova expressão por

$$[p/k] = \frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{1.2.\ \ldots\ .q}$$

O que é equivalente à notação atual de combinações simples, $\binom{p}{k}$

Pierre Simon de Laplace

Deve-se a Pierre Simon de Laplace (1749/1827), a maior contribuição dada à teoria das probabilidades - a partir de 1774 ele escreve vários artigos sobre o assunto e, em 1814, publica o clássico *"Théorie Analytique des Probabilités*". Laplace apresenta ainda para leitores, não matemáticos, o *"Essai Philosophique des Probabilités*" e diz que *"no fundo a teoria das probabilidades é apenas o senso comum expresso em números".*

É de Laplace também a afirmação: *"É notável como uma ciência que começou com considerações sobre jogos de azar pudesse ter se elevado ao nível dos mais importantes assuntos do conhecimento".*

Sua obra mais importante é o "Traité de Mecanique Celeste", que contém cinco volumes e foi publicado ao longo de 26 anos. A mecânica celeste contribuiu muito para o avanço dado por Laplace à teoria das probabilidades, já que lhe foi necessário fazer a pesquisa da probabilidade de erros em dados de observações experimentais.

Durante o século XX, principalmente a partir da grande contribuição dada pela teoria dos conjuntos e teoria da medida, acontece o apogeu no desenvolvimento da teoria das probabilidades. Em 1901 a teoria das probabilidades é aplicada tanto na física quanto na genética e Josiah Willard Gibbs (1839/1903) publica "Elementary Principles in Statistical Mechanics", e iniciam-se assim as grandes publicações na área da estatística. Nesse mesmo ano é fundada a "Biometrika" por Karl Pearson (1867 /1936) e Francis Galton (1822 /1911), estatístico de renome, estuda os problemas de regressão em estatística.

"Na Rússia, especialmente em 1906/1907, o estudo de cadeias ligadas de eventos foi iniciado por Andrei Andreyevitch Markov (1856 /1922), discípulo de Tchebycheff (1821/1894) e co-editor das "OEUVRES" (2 volumes, 1899 /1904) de seu mestre. Na teoria cinética dos gases em muitos fenômenos biológicos e sociais a probabilidade de um evento depende muitas vezes de resultados precedentes, e especialmente desde os meados do século XX, as cadeias de Markov de probabilidades interligadas têm sido amplamente estudadas." (Carl B. Boyer).

Em 1909, Émile Borel (1871/1956) publica “Éléments de la Théorie des Probabilités”.


Henri Lebesgue

“Ainda na Rússia, Andrei Nicolaevich Kolinogoroff faz importantes progressos em processos de Markov, e satisfaz em parte o sexto projeto de Hilbert, que pedia fundamentos axiomáticos para as probabilidades através do uso da Teoria da Medida de Henri Lebesgue (1875 /1941). A análise clássica se ocupa de funções contínuas, ao passo que os problemas de probabilidades, geralmente nessa época, envolvem casos discretos. A Teoria da Medida e as extensões do conceito de integração eram sutilmente adequadas para promover uma associação mais íntima da análise com a probabilidade, especialmente depois da metade do século XX, quando Laurent Schwartz (1915/2002), da Universidade de Paris generaliza o conceito de diferenciação através da teoria das distribuições. (1950/1951).” (Carl B. Boyer).


Émile Borel

Resta citar alguns matemáticos que também tiveram grande importância no desenvolvimento da teoria das probabilidades como: Jules Henri Poincaré (1854/1912), Félix Édouard Justin Émile Borel (1871/1956) e o húngaro-americano John Von Neumann (1903/1957).

É de Poincaré à célebre frase***: “A ciência, em outros termos, é um sistema de relações. Ora, como acabamos de dizer, é apenas nas relações que a objetividade deve ser buscada; seria inútil procurá-la nos seres considerados como isolados uns dos outros.”***

Deve-se à Borel a introdução de um novo conceito de medida na teoria dos conjuntos (1894), de grande importância no campo das probabilidades. Em 1909, publica o “Éléments de la théorie des probabilités” e foi o responsável por uma formulação moderna na teoria dos jogos e na forma do teorema minimax. Usando a noção de estratégias mistas (1927), conseguiu resolver jogos com duas pessoas que tivessem até cinco opções de estratégias a sua escolha.

Uma solução geral, entretanto, só viria a ser alcançada pelo matemático húngaro John Von Neumann (1903-1957), consolidando as bases de uma moderna Teoria dos Jogos (1928), em que o conceito de utilidade é fundamental. Entre 1930 e 1940 trabalhou na teoria dos jogos, tornando-se a base para uma futura ciência exata da economia. Em 1952, constrói o primeiro computador.

Até a metade do século passado apareceram diversas aplicações da teoria das probabilidades tais como: os estudos demográficos, os cálculos atuariais, a criação das loterias e o estudo dos jogos de azar, não esquecendo às aplicações na Física, Estatística, Engenharia, Economia, etc. Considere algumas dessas aplicações, nas áreas a seguir: na Física temos a teoria dos erros experimentais, probabilidade na física estatística, na física quântica; na Estatística, o delineamento dos experimentos científicos, a inferência estatística e a correlação entre variáveis e por fim, na Engenharia temos o controle de qualidade industrial, a teoria das Filas, a teoria da Informação e a teoria dos Riscos.

6. EXERCÍCIOS SOBRE PROPORCIONALIDADE E PORCENTAGEM

"A imaginação é muito mais importante que o conhecimento"

Albert Einstein

1. Uma firma de engenharia asfaltou uma estrada de 36 km em 14 dias. Quantos dias seriam necessários para a mesma firma asfaltar uma estrada de 54 km?

2. Suponhamos que eu aplique 6.000 reais na caderneta de poupança e, no mesmo dia meu amigo Márcio aplique 9.000 reais. Se no fim do mês meu saldo for de 6.048 reais, qual será o saldo do Márcio?

3. Um canavial tem a forma de um quadrado com 60m de lado e um lavrador consegue ceifá-lo em 4 dias. Em quantos dias o mesmo lavrador ceifaria um canavial quadrado com 100m de lado?

4. Um pequeno edifício tem 3 andares. Os dois últimos andares têm 2 apartamentos cada um: 201 e 301 com 80 m², e 202, 302 com 100m². O primeiro andar tem só 1 apartamento, 101, com 286m². O gasto mensal com a administração do edifício é de 4.000 reais. Qual deve ser a cota de condomínio de cada um dos 5 apartamentos?

5. Trabalhando 8 horas por dia, 3 trabalhadores constroem um muro de 40m de comprimento em 12 dias. Se o número de horas de trabalho diário for reduzido para 6 e o número de trabalhadores aumentado para 5, qual o comprimento de um muro de mesma altura que eles construirão em 15 dias?

6. Se três torneiras conseguem encher um tanque em 2 horas, quanto tempo demorará para esse tanque encher quando uma das torneiras não for aberta?

7. Viajando de carro, a uma velocidade média de 60 km por hora, consigo ir da cidade A para B em 2 horas e 40 minutos. Qual deve ser a minha velocidade média para que eu percorra a mesma rota em 2 horas?

8. Com 5 teares funcionando 6 horas por dia, uma tecelagem fabrica 1800m de tecido com 1,20m de largura em 4 dias. Se um dos teares não puder funcionar e a largura do tecido for de 0,80m, em quanto tempo a tecelagem fabricará 2000m do mesmo tecido, com as máquinas funcionando 8 horas por dia?

9. Um funcionário, cujo salário mensal é de 825 reais, recebe um aumento de 2,4 por cento. Qual é seu novo salário?

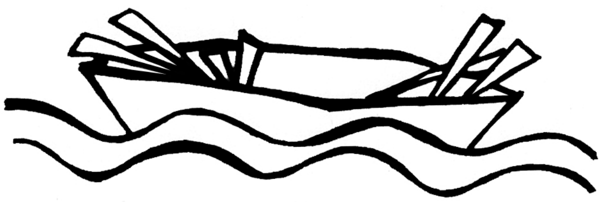
10. O litro da gasolina sofreu, a partir de hoje, um aumento de 15% e passou a custar 2,599 reais. Quanto custava ontem?

11. Numa classe de 25 alunos, 16 são homens. Qual a porcentagem de mulheres nessa classe?

12. Uma mercadoria sofreu um aumento de 25% em seu preço. Um cliente exigiu do vendedor um desconto sobre o novo preço, a fim de pagar por ela o mesmo que antes. Qual é o desconto que ele deve pedir?

13. Uma lata de leite em pó, pesando 400g, custa R$ 5,20. O mesmo leite, na embalagem de 900g, custa R$ 11,20. Qual das duas opções é a mais vantajosa?

14. Um barco com 7 pessoas, à deriva no mar, tem suprimento de água suficiente para 28 dias. Após 3 dias, o barco recolhe 2 náufragos. Se o consumo diário de água por pessoa se mantiver o mesmo, em quantos dias mais acabará a reserva.



15. Dois tanques, em forma de blocos retangulares, têm o mesmo volume. O primeiro tem 1,2m de profundidade e sua tampa mede 18 metros quadrados. O segundo tem 2 metros de profundidade. Qual deve ser a medida da tampa para cobri-lo?

16. Para encher o primeiro dos tanques, no problema anterior, abriu-se uma torneira. Após 15 minutos a altura da água era de 8cm. Supondo constante a vazão da torneira, em quanto tempo o tanque estará cheio? Uma torneira com a mesma vazão sendo colocada no segundo tanque, qual seria a altura da água despejada após 15 minutos? Em quanto tempo este outro tanque estará cheio?

17. Regina, que estava acima do peso normal, fez uma dieta e perdeu 3kg em 2 meses. Continuando a mesma dieta, quantos quilos ela perderá em 3 meses? E em um ano?

18. Um objeto soltado do alto de um edifício, leva 5 segundos para atingir o solo. Quanto tempo levaria esse objeto para cair de um prédio 3 vezes mais alto?

19. Cada vez que a temperatura varia 1 grau centígrado, ela varia 1,8 graus Fahrenheit. Sabendo que 0º C = 32º F quantos graus F correspondem a 30º C?

20. Um fazendeiro, na safra passada, usou 12 camponeses para cortar sua plantação de cana de 120 hectares. Trabalhando 6 horas por dia, os trabalhadores concluíram o serviço em uma semana. Este ano, o fazendeiro plantou 180 hectares e dispõe de 14 cortadores de cana, dispostos a trabalhar 8 horas por dia, durante 5 dias. Quantos hectares de cana esses trabalhadores conseguirão cortar?

21. Se o mesmo fazendeiro do problema anterior quisesse cotar todos os seus 180 hectares de cana num só dia, com os cortadores trabalhando 5 horas por dia, quantas pessoas, aproximadamente, ele precisaria contratar?

22. Empregando 3 equipes, consegue-se construir 5km de estrada em 7 dias, trabalhando 8 horas por dia. Usando 4 equipes, durante 10 dias, mas trabalhando apenas 6 horas por dia, quantos quilômetros de estrada são construídos?

23. Divida o número 35 em partes proporcionais a 4, 10 e 14. Em seguida, divida o mesmo número em partes proporcionais a 6, 15 e 21. Por que os resultados são iguais? Explique.

24. Estimando que uma camada de tinta tem meio milímetro de espessura e sabendo que um litro dessa tinta foi suficiente para pintar (com uma só demão) a superfície de um cubo, pergunta-se quanto mede a aresta desse cubo?

25. Divida o número 25 em partes proporcionais a 2 e 3 e, em seguida, divida o mesmo número em partes inversamente proporcionais a 2 e 3. Compare os resultados. Que princípio geral pode-se inferir? O fato vale para 3 ou mais números?

26. Num salão com 100 pessoas, 99% são homens. Quantos homens devem sair para que fiquem 98% de homens?

27. Um tanque contém 800 litros de combustível, nos quais 24% são de álcool e 76% de gasolina. Quantos litros de gasolina devem ser despejados no tanque a fim de que o combustível resultante tenha apenas 20% de álcool? (Admite-se que a capacidade do tanque é de 1000 litros.)

28. A água do mar contém 2,5% do seu peso em sal. Quantos quilogramas de água do mar são necessários para obter 800 g de sal?

29. Numa liquidação, uma calça jeans sofreu um desconto de 12% e no mês seguinte, outro desconto de 15%.
a) Qual foi o desconto percentual total?
b) Teria sido melhor se o desconto de 15%viesse primeiro e o desconto de 12%depois?

30. Num mês, seu salário teve um aumento de 6% e, no mês seguinte, um aumento de 10%.

a) Qual o aumento percentual do seu salário após esses dois meses?

b) Teria sido melhor ou pior mudar a ordem (mas não os valores percentuais) dos aumentos?

31. Por um trabalho extra que fez para seu empregador, André recebeu 2.320 reais líquidos, após o desconto de 27,5% de imposto de renda. Qual foi sua remuneração (bruta) pelo trabalho?

32. No problema anterior, quanto André deveria ter cobrado por seu trabalho a fim de receber (líquidos) 3.000 reais após a dedução do imposto de renda?

33. Num salão com 100 pessoas, 99% são homens. Quantas mulheres devem entrar para que 30% dos presentes sejam homens?

34. (1990-UFPE) A distribuição das 25 cadeiras de um conselho de universidade é, num primeiro momento, feita proporcionalmente ao número de alunos de cada uma delas. Quando ocorre, nos cálculos para a distribuição, um número não inteiro, este é arredondado para menos, adotando-se, posteriormente, critérios adicionais para distribuir as vagas que sobram. Num determinado ano, havia 7.000 alunos na universidade A, 12.000 alunos na universidade B e 3.000 alunos na universidade C. Assinale a distribuição inicial de cadeiras do conselho para as universidades A, B e C, respectivamente:

a) 8, 12 e 3 b) 7, 13 e 3 c) 7, 13 e 4 d) 9, 12 e 3 e) 8, 11 e 3

35. (1990-UFPE) . No 1º turno de uma eleição, os candidatos mais votados foram A e B, que obtiveram, respectivamente, 37% e 25% do total dos votos válidos. Para o 2º turno, o número de votos válidos se mantém o mesmo e os eleitores que votaram inicialmente em A ou B mantêm suas opções. Para obter um número de votos maior do que a metade e vencer o 2º turno, B deve conquistar uma percentagem dos eleitores que, no 1º turno, votaram nos candidatos excluídos. Qual o valor aproximado dessa percentagem?

a) 69,5% b) 27,1% c) 70,8% d) 64,3% e) 68,8

36. (1991) Um produto que custava CR$ 1.500,00 sofreu um aumento de 50%. Com a queda das vendas, o comerciante passou a dar um desconto de 20% sobre o novo preço. Por quanto reais está sendo vendida a mercadoria?

a) 1.600,00 b) 1.750,00 c) 1.950,00 d) 1.800,00 e) 1.530,00

37. (1991-UFPE) Se todos os lados de um heptágono regular forem aumentados em 50%, em quanto aumenta a sua área?

38. (1992-UFPE) Num banco, 4 caixas atenderam 450 clientes durante um expediente de 6 horas. Em média, quanto tempo gastou um caixa para atender cada cliente?

39. (1992-UFPE) O valor do dólar, em reais, subiu 10% num dia e 22% no outro dia. Quanto subiu o dólar no intervalo desses dois dias?

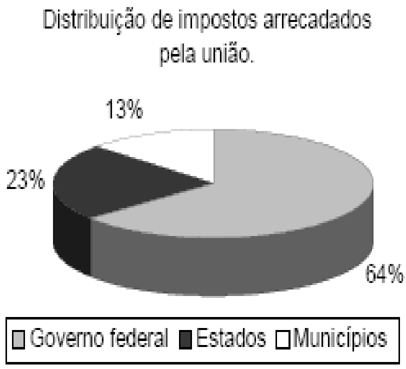
40. (1992-UFPE) Um motorista gastou Cr$ 14.000,00 para abastecer seu automóvel. Sabendo que fez uma mistura colocando 1 parte de gasolina para cada 8 partes de álcool e que o preço do álcool é 75% do preço da gasolina, quantos cruzeiros gastou com gasolina?

a) 2.000,00 b) 2.500,00 c) 2.300,00 d) 3.000,00 e) 1.800,00

41. (1992-UFPE) Um cubo tem suas arestas aumentadas em 50%. Em quanto ficará aumentado o seu volume?

42. (2004-UFPE) Em determinado Estado, 60% dos médicos atuam na capital, enquanto 60% da população do Estado reside no interior. Para se igualar o número de habitantes por médico, na capital e no interior, qual fração do número de médicos da cidade deve-se transferir para o interior? Admita que a transferência dos médicos não altere o total de habitantes da capital e do interior.

43. (2004-UFPE) O gráfico ao lado ilustra os percentuais da distribuição, entre Governo Federal, Estados e Municípios, do que é arrecadado com impostos pela união: os municípios pretendem aumentar sua participação para 20%. Se isto ocorrer, de que percentual aumentará o total arrecadado pelos municípios? (Arredonde o resultado obtido para o inteiro mais próximo.).



44. (2003-UFPE) Uma empresa de exportação de gasolina comunicou à ANP o desaparecimento de 7,2 milhões de litros de gasolina dos seus depósitos. Se um caminhão-tanque tem capacidade de $32m^3$, quantos caminhões seriam necessários para transportar a gasolina desaparecida?

45. (2003-UFPE) A Secretaria da Fazenda do Estado baixou o preço de referência do botijão de gás de R$ 24,78 para R$ 24,03. O preço de referência é utilizado para calcular o ICMS, que corresponde a uma alíquota de 12%. A Secretaria adiantou que a queda do preço provocará uma diminuição de arrecadação anual de R$ 1,2 milhão. Qual o valor aproximado do número de botijões comercializados anualmente no Estado?

46. (2002) Uma loja oferece a seguinte promoção: “Pague x reais e leve mercadorias no valor de $(x + x/3)$ reais”. Qual o desconto sobre o valor da mercadoria que se leva?

47. (2001-UFPE) O custo da cesta básica aumentou 1,03% em determinada semana. O aumento foi atribuído exclusivamente à variação do preço dos alimentos que subiram 1,41%. Qual o percentual de participação dos alimentos no cálculo da cesta básica?

48. (2001-UFPE) Uma obra será executada por 13 operários (de mesma capacidade de trabalho) trabalhando durante 11 dias com jornada de trabalho de 6 horas por dia. Decorridos 8 dias do início da obra 3 operários adoeceram e a obra deverá ser concluída pelos operários restantes no prazo estabelecido anteriormente. Qual deverá ser a jornada diária de trabalho dos operários restantes nos dias que faltam para a conclusão da obra no prazo previsto?

49. (2001-UFPE) Uma herança será dividida entre dois herdeiros em partes inversamente proporcionais às fortunas acumuladas por cada um deles até o momento da partilha. Inicialmente, as fortunas são de 10 milhões e 15 milhões e crescem a uma taxa de 10% (cumulativos) ao ano. Se a partilha será consumada em 10 anos, que fração da herança caberá ao herdeiro que possuía inicialmente 15 milhões?

50. (2001-UFPE) Quando o preço da unidade de determinado produto diminuiu *10%*, o consumo aumentou *20%* durante certo período. No mesmo período, de que percentual aumentou o faturamento da venda deste produto?

RESPOSTAS:

1. 21
2. 9072
3. 11,11 dias
4. 495,36 p/os aptos. 201 e 301; 619,90 p/os aptos. 202 e 302; 1770,88 p/ o apto 101
5. 62,5m.
6. 3 horas
7. 80km/h
8. 2 dias, 6 h. e 13 min
9. 844,80 reais
10. 2,26 reais
11. 36% são mulheres
12. 20%
13. a 2ª opção
14. 19,44 dias
15. 10,8m²
16. 3 h. e 45 min. 13,33 cm; tanques têm mesmo volume e torneiras mesma vazão então ficarão cheios na mesma duração do tempo
17. perderá 4,5kg em 3 meses / perderá 18 kg em 1 ano
18. o tempo de queda é multiplicado por 3½
19. 86º F
20. 133,33 hectares
21. 151 trabalhadores e um deles fazendo mais 0,2 de sua faina diária
22. 7,14 km
23.
24. 57,73 cm
25. -
26. 50 homens
27. 160 litros
28. 32kg
29. a) 66% b) p/ quem comprou após o 2º desconto a ordem é irrelevante; p/quem comprou entre os dois descontos a ordem faz diferença
30. a) 16,6% b) a partir do 2º aumento a ordem não influirá
31. 3200 reais
32. 4137, 93
33. 230 mulheres
34. b
35. e
36. d
37. 125%
38. 3,2 minutos
39. 34,2%
40. Cr$ 2000,00
41. 237,5%
42. 1/3
43. 54%
44. 225
45. $4/3.10^7$
46. 25%
47. 73%
48. 7 h. e 48 min.
49. 2/5
50. 8%

7. EXERCÍCIOS SOBRE NÚMEROS RACIONAIS E IRRACIONAIS

"Nossa tarefa deve ser libertar-nos da prisão pela ampliação de nosso círculo de "compaixão",para abranger todas as criaturas vivas e toda a natureza em sua beleza."

Albert Einstein

1. Escreva, em notação decimal finita, as seguintes frações:

a) 1/4 b) 3/200 c) 321/400 d) 7/625 e) 352/125 f) 3149/2500

2. Mostre que a afirmação: "Se **mn** for par, então **m** e **n** serão pares" é falsa.

3. Quais das seguintes proposições são verdadeiras e quais são falsas? O número racional a/b, a e b primos entre si, tem uma representação finita.

a) se, e somente se, b não for divisível por outro primo além de 2;
b) se b não for divisível por outro primo além de 2;
c) somente se b não for divisível por outro primo além de 2;
d) se, e somente se, b não for divisível por 3;
e) se b não for divisível por 3;
f) somente se b não for divisível por 3.

4. Quais das seguintes proposições são verdadeiras e quais são falsas? O número racional a/b tem uma representação decimal finita.

a) se, e somente se, b não tiver outros fatores primos além de 2 e 5;
b) se b não tiver outros fatores primos além de 2 e 5;
c) somente se b não tiver outros fatores primos além de 2 e 5.

(sugestão – observe que não foi especificado estar a/b na forma irredutível)

5. Escreva os seguintes números na forma a/b:

a) 0,111 . . . b) 5,666 . . . c) 0,37434343...
d) 0, 9987987987. . . e) 0,0001010101. . . f) 0,99999 . . .

6. Represente cada um dos seguintes números por uma fração decimal finita:

a) 0,11999 . . .   b) 0,200000 . . .   c) 4,79999 . . .   d) 9,99999 . . .

7. Represente cada um dos seguintes números por uma fração decimal infinita:

a) 0,73   b) 0,0099   c)13

8. Quais números racionais a/b têm duas representações decimais essencialmente distintas?

9. Quais números racionais a/b têm três representações decimais essencialmente distintas?

10. Mostre que $\sqrt{2}$ é irracional.

11. Mostre que $\sqrt{3}$ é irracional.

12. Mostre que $\sqrt{6}$ é irracional.

13. Mostre que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é irracional.

14. O número 0 (zero) é racional ou irracional?

15. Exiba dois números irracionais cuja diferença seja irracional.

16. Exiba dois números irracionais cujo produto seja racional e mostre assim que os números irracionais não são fechados em relação á multiplicação.

17. Exiba dois números irracionais cujo produto seja **irracional.**

18. Exiba dois números irracionais cujo quociente seja racional. E mostre assim que os números irracionais não são fechados em ralação à divisão.

19. Exiba dois números irracionais cujo quociente seja racional.

20. Mostre que os números a seguir são algébricos:

a) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ b) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ c) $2^{1/3} - 3^{1/2}$

Obs: o número $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ recebe o nome de número de ouro.

Respostas

1. a) 0,25   b) 0,015   c) 0,8025
   d) 0,0112   e) 2,816   f) 1,2596

2. Falsa – verifique para m = 2 e n = 3.

3. a) Falsa; b =10 b)Verdadeira
   c) Falsa; b =10 d) Falsa; b = 7
   e) Falsa; b = 7 f) Verdadeira

4. a) Falsa; fração 3/6
   b) Verdadeira
   c) Falsa; fração 3/6

5. a) 1/9   b) 17/3
   c) 3706/9900 = 1853/4950
   d) 9978/9990 = 1663/1665
   e) 1/9900   f) 1

6. a) 0,12   b) 0,3   c) 4,8
   d) 10,00

7. a) 0,72999 ...   b) 0,0098999
   c) 12,999 ...

8. Números racionais a/b (irredutíveis) com a propriedade de b não ser divisível por primos, diferentes de 2 e 5 e com $a \neq 0$.

9. Nenhum

14. Racional

15. $\sqrt{3}$ e $-\sqrt{2}$

16. $\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$

17. $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$

18. $\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$

19. $\sqrt{3}$ e $1/\sqrt{2}$

8. EXERCÍCIOS
ENVOLVENDO FUNÇÕES DO 1º e 2º GRAUS

"O oposto de uma afirmação correcta é uma afirmação falsa. Mas o oposto de uma verdade profunda pode ser outra verdade profunda".

Niels Bohr

1. Suponhamos que o custo total de fabricação de q unidades de uma certa mercadoria seja dado pela função

$C(q) = q^3 - 30q^2 + 500q + 200$.

a) Calcule o custo de fabricação de 10 unidades da mercadoria.
b) Calcule o custo de fabricação da 10ª unidade da mercadoria.

2. Um estudo das condições ambientais de uma comunidade suburbana indica que a taxa média diária de monóxido de carbono no ar será de $c(p) = 0{,}5p + 1$ parte por milhão, quando a população for de p milhares. Imaginemos que, daqui a t anos, a população da comunidade será de $p(t) = 0{,}1t^2 + 10$ milhares.

a) Expresse a taxa de monóxido de carbono no ar como uma função do tempo.
b) Quando o nível de monóxido de carbono atingirá 6,8 partes por milhão?

3. Um fabricante produz canetas ao custo de R$ 10,00 por unidade. Estima-se que, se cada caneta for vendida por **x**, os consumidores comprarão, aproximadamente, **80 – x** canetas por mês. Expresse o lucro mensal do fabricante como função do preço de venda das canetas, construa o gráfico desta função e calcule o preço com o qual o lucro do fabricante será maior.

4. A cada carregamento de matéria-prima, um fabricante precisa pagar uma taxa de pedido que cobre manuseio e transporte da mercadoria. Depois de recebida, a matéria-prima precisa ser guardada em depósito, resultando daí, custos de armazenagem. Se o carregamento de matéria prima for grande, os custos de pedidos serão baixos, pois haverá necessidade de menos carregamentos; todavia, o custo de armazenagem será grande. Se o carregamento for pequeno, os custos de pedidos serão altos, pois deverá haver mais embarques; entretanto, o preço de armazenagem cairá. Um fabricante calcula que, se cada carregamento envolve **x** unidades, o custo total para obter e armazenar o suprimento anual de matéria-prima será de

$$c(x) = x + \frac{160.000}{x}.$$

Construa o gráfico do trecho relevante dessa função custo e calcule o tamanho ótimo do carregamento.

5. O custo total de um fabricante consiste em uma quantia fixa de R$ 200,00 somada ao custo de produção, que é de R$ 50,00 por unidade. Expresse o custo total como função do número de unidades produzidas e construa o gráfico.

6. Um fabricante vende a unidade de certo produto por R$ 110,00. O custo total consiste em uma taxa fixa de R$ 7.500,00 somada ao custo de produção de R$ 60,00 por unidade.

a) Quantas unidades o fabricante precisa vender para atingir o ponto de equilíbrio?
b) Se forem vendidas 100 unidades, qual será o lucro ou o prejuízo do fabricante?
c) Quantas unidades o fabricante necessita vender para obter um lucro de R$ 1.250,00?

7. O aluguel de um carro numa agência é de R$ 14.000,00 mais R$ 150,00 por quilômetro rodado. Uma segunda agência cobra R$ 20.000,00 mais R$ 50,00 por quilômetro rodado. Que agência oferece o melhor plano de aluguel?

8. Calcule o preço de equilíbrio e o número correspondente de unidades em oferta e procura, sabendo que a função de oferta de um certo produto é $S(p) = p^2 + 3p - 70$ e a função de procura é $D(p) = -p + 410$.

9. Um fabricante produz determinado produto ao preço unitário de R$ 2,00 e os vende a R$ 5,00 cada. Com este preço a demanda mensal do produto é de 4.000 unidades. O fabricante pensa em elevar o preço do produto e calcula que, para cada R$ 1,00 aumentado, deixará de vender 400 unidades mensalmente. Expresse o lucro mensal do fabricante em função do preço de venda do produto.

10. O Governo do Estado do Rio de Janeiro planeja construir uma área de recreação junto à estrada Rio – Santos. A área será retangular, com 5.000 m², e será cercada nos três lados não-adjacentes à estrada. Expresse o comprimento da cerca como função do comprimento do lado não cercado.

11. O volume de uma lata é de 24 centímetros cúbicos. O material usado para a tampa e a base da lata custa R$ 3,00 por cm^2 e o material a ser empregado na parte lateral custa R$ 2,00 por cm^2 . Exprima o custo de fabricação da lata em função de seu raio.

12. Durante a seca de 1977, os residentes de Iguatu, Ceará, enfrentaram terrível falta de água. Para desencorajar o consumo excessivo de água, o Departamento de Àgua local aumentou drasticamente o preço do m^3 desse líquido: os 12 primeiros m^3 de água consumido no mês, por um morador, custavam R$ 1,22, os 12 m^3 seguintes custavam R$ 10,00 e, daí por diante, cada m^3 custava R$ 50,00. Expresse o gasto mensal de cada morador em função da água consumida.

13. Quando as condições ambientais impõem um limite superior ao tamanho de uma população, esta cresce segundo uma taxa proporcional ao seu tamanho atual e à diferença entre o seu tamanho atual e seu limite superior. Expresse a taxa de crescimento populacional em função do tamanho da população.

14. (1991-UFPE) O presidente de um clube pagou R$ 48.000,00 por 12 camisas e igual número de calções, para o time de vôlei. Sabendo-se que uma camisa custou três vezes mais que um calção, quanto custou cada um?

15. (1992-UFPE) Um motorista gastou R$ 14.000,00 para abastecer seu automóvel. Sabendo que fez uma mistura colocando uma parte de gasolina para cada oito partes de álcool e que o preço do álcool é 75% do preço da gasolina, quantos cruzeiros gastou com gasolina?

16. (1992-UFPE) Dentre as afirmações abaixo, relativas ao gráfico da função $f(x) = (x - 2)(x - 8)$, num sistema de coordenadas cartesianas retangulares Oxy, indique a alternativa falsa:

a) O gráfico corta o eixo dos x exatamente duas vezes.
b) O gráfico intercepta o eixo dos y exatamente uma vez.
c) O gráfico é uma parábola.
d) O gráfico não possui pontos abaixo do eixo dos x.

17. (1993-UFPE) Para editar um determinado livro, uma empresa terá que gastar 55 milhões em custos fixos (autoria, matrizes, etc), mais 40.000 por exemplar impresso. Por outro lado, as despesas de comercialização são estimadas em 60% do custo total. Que número mínimo de exemplares deve ser produzido na referida edição, para que o custo final não ultrapasse 80 mil por exemplar?

18. (1993-UFPE) Dentre as desigualdades abaixo, qual delas garante que a reta de equação $y = ax$ e a parábola de equação $y = x^2 + bx + c$ interceptam-se em dois pontos distintos?

a) $(a – b)^2 - 4c > 0$ b) $b^2 - 4ac > 0$ c) $(a + b)^2 - 4c > 0$
d) $a^2 - 4bc > 0$ e) $(a – b)^2 + 4c > 0$.

19. (1994-UFPE) Considere a equação $x^2 + (k – 4)x – 2k + 4 = 0$. Indique os valores de k, para os quais o número real 3 está compreendido entre as raízes desta equação.

20. (1994-UFPE) Na fabricação de uma bebida chamada Porto, misturam-se duas outras bebidas chamadas conhaque e vinho. Sabendo-se que o teor alcoólico do conhaque é 42%, do vinho 12% e do Porto 18%, qual a porcentagem aproximada de conhaque na mistura?

21. (1994-UFPE) Num supermercado, um pacote promocional com certo número de caixinhas de acerola estava sendo vendido por R$ 3.600,00. Finda a promoção, o preço por caixinha foi aumentado em R$ 240,00, tendo o pacote permanecido com o mesmo preço, quatro caixinhas a menos. Qual o número de caixinhas e o preço por caixinha na proposta inicial?

22. (1994-UFPE) Admita que as dimensões **a** e **b** (**a** > **b**) de um retângulo diferem de 4 cm. Se aumentarmos estas dimensões em 3 cm, a área do retângulo aumentará em 69 cm². Quais as dimensões **a** e **b** do retângulo?

23. (1995-UFPE) Um recipiente contém 2.565 litros de uma mistura de combustível, sendo 4% constituídos de álcool puro. Quantos litros deste álcool devemos adicionar ao recipiente, a fim de termos 5% de álcool na mistura?

24. (1996-UFPE) O gráfico da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$, x real, é simétrico ao gráfico da parábola $y = 2 - x^2$ com relação à reta de equação cartesiana $y = - 2$. Determine o valor de $8a + b + c$.

25. (1996-UFPE) Sendo x um número real tal que $x > 7$ ou $x < - 3$, assinale a alternativa correta:

a) $(x + 3) (x - 7) < 0$ b) $(x + 3) (x – 7) > 0$ c) $(x + 3) (x – 7) = 0$
d) $x^2 > 49$ e) $x^2 < 49$

26. (1996-UFPE) Se x é um número real positivo tal que ao adicionarmos 1 ao seu inverso obtemos como resultado o número x, qual é o valor de x?

27. (2005-UFPE) Quando o preço do sanduíche é de R$ 4,00, uma lanchonete vende 150 unidades por dia. O número de sanduíches vendidos diariamente aumenta de 5 unidades, a cada diminuição de R$ 0,10 no preço de cada sanduíche. Para qual preço do sanduíche, a lanchonete arrecadará o maior valor possível com a venda diária dos sanduíches?

28. (1997-UFPE) Qual a área da região, no plano cartesiano, determinada pelas seguintes desigualdades: $y \geq 0$, $x + y \leq 0$ e $3x - y \geq 6$?

29. (1998-UFPE) Uma malharia familiar fabrica camisetas a um custo de R$ 2,00 por camiseta e tem uma despesa fixa semanal de R$ 50,00. Se são vendidas x camisetas por semana ao preço de $[\,22/3 - x/30\,]$ reais a unidade, quantas camisetas devem ser vendidas por semana para se obter o maior lucro possível?

30. (1999-UFPE) A altura de um homem varia com o tamanho F do seu fêmur de acordo com a fórmula (medidas em cm): $h = 69{,}089 + 2{,}238F$. Se a idade ultrapassa 30 anos subtrai-se 0,06 cm por cada ano após os 30 anos. Qual a altura estimada de um homem de 40 anos cujo fêmur mede 40 cm?

31. (1999-UFPE) Uma loja de discos vende 3.000 cds por mês a um preço de R$13,00 a unidade. Uma pesquisa de mercado concluiu que, a cada aumento de R$ 0,50 no preço de cada cd, as vendas caem de 100 cds por mês. Qual deve ser o preço de cada cd, para se maximizar o valor total das vendas?

32. **(**1999-UFPE) Uma escola resolveu conceder prêmios de R$ 10,00 a cada um de seus alunos aprovados por média e de R4 8,70 a cada aluno simplesmente aprovado. No total, foram aprovados 500 alunos e 13% dos alunos aprovados por média recusaram o prêmio. Qual será o gasto da escola, em reais, com o pagamento dos prêmios?

33. (2000-UFPE) Os alunos de uma turma resolveram comprar um presente custando R$ 48,00, para o professor de Matemática, dividindo igualmente o gasto entre eles. Depois que 6 alunos recusaram-se a participar da divisão, cada um dos alunos restantes teve que contribuir com mais R$ 0,40 para a compra do presente. Qual a porcentagem dos alunos da turma que contribuiu para a compra do presente?

34. (2004-UFPE) A poluição atmosférica em metrópoles aumenta ao longo do dia. Em certo dia, a concentração de poluentes no ar, às 8 horas era de 20 partículas, em cada milhão de partículas, e, às 12 horas, era de 80 partículas, em cada milhão de partículas. Admitindo que a variação de poluentes no ar durante o dia é uma função afim do tempo, qual o número de partículas poluentes no ar em cada milhão de partículas, às 10 horas e 20 minutos?

35. (2002-UFPE) Em 1/11/2001 Júnior e Ricardo possuem em suas contas correntes R$ 4.500,00 e R$ 3.200,00 respectivamente. Se no primeiro dia de cada mês subseqüente a novembro de 2001, Júnior saca R$ 50,00 e Ricardo deposita R$ 50,00, quando o valor da conta corrente de Ricardo ultrapassará o valor da conta de Júnior, pela primeira vez?

RESPOSTAS:

1. a) R$ 3.200,00 e b) R$ 201,00

2. a) $0{,}05t^2 + 6$ e b) daqui a 4 anos

3. aproximadamente R$ 45,00

4. carregamento ótimo contém aproximadamente 400 unidades

5. C(x) = 50x + 200

6. a) 150 unidades b) prejuízo de R$ 2.500,00 c) 175 unidades

7. a primeira agência oferece o melhor plano para distâncias menores e a segunda agência, o melhor para distâncias maiores

8. o mercado está em equilíbrio quando há 390 unidades do produto em oferta e procura

9. L(x) = 400(15 – x) (x – 2)

10. C(x) = x + 10.000 / x

11. $C(r) = 6\pi r^2 + 96\pi / r$

12. $$C(x) = \begin{cases} 1{,}22x & \text{se } 0 \le x \le 12 \\ 10x - 105{,}36 & \text{se } 12 < x \le 24 \\ 50x - 1065{,}36 & \text{se } x > 24 \end{cases}$$

13. T(p) = kp (b – p)

14. Calção/ R$1000,00 camisa / R$ 3000,00

15. R$ 2.000,00

16. d

17. 5,5 mil exemplares

18. a

19. k < -1

20. 20%

21. nº de caixinhas: 10, preço por caixinha: R$ 360,00

22. a =12cm e b = 8 cm

23. 27 litros de álcool

24. 2

25. b

26. $x = (1 + \sqrt{5}) / 2$; que é o Número de Ouro

27. R$ 3,50

28. 24

29. 80 camisetas

30. Aproximadamente 1,58 metros

31. R$ 14,00

32. R$ 4.350,00

33. 80% dos alunos

34. 55 partículas em cada milhão

35. Em janeiro de 2003

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Olimpíadas Brasileiras de Matemática · 1ª a 8ª (problemas e resoluções) / compilado por Élio Mega e Renate Watanabe; organização da Comissão de Olimpíadas da SBM. – São Paulo, Editora Atual, 1995

Olimpíadas Brasileiras de Matemática · 9ª a 16ª (problemas e resoluções) / compilado por Carlos Moreira, Edmilson Motta, Eduardo Tengan, Luiz Amâncio, Nicolau Saldanha e Paulo Rodrigues; organização da SBM e OBM - Rio de Janeiro, 2003

Santos, José Plínio de Oliveira. Introdução à Teoria dos Números. Coleção Matemática Universitária - IMPA – Rio de Janeiro, 2005

Niven, Ivan Mortom. Trad. de Renate Watanabe. Número: Racionais e Irracionais. Coleção Fundamentos da Matemática Elementar - SBM – Rio de Janeiro, 1984

Morgado, Augusto C. de Oliveira; Carvalho, João Bosco Pitombeira de; Carvalho, Paulo Cezar; Fernandez, Pedro. Análise Combinatória e Probabilidade – com as soluções dos exercícios. Coleção do Professor de Matemática – SBM – Rio de Janeiro, 1991

Boyer, Carl B. História da Matemática. São Paulo, Edgard Blücher /EDUSP, 1974

H. S. M. Coxeter, F. R. S. Fundamentos de Geometria. México, Editorial Limusa-Willey, S.A. 1971

Dante, Luiz Roberto. Matemática: Contexto e Aplicações. São Paulo, Editora Ática, 1999, v.1, v.2, v.3

Hazzan, Samuel. Combinatória · Probabilidade. Fundamentos de Matemática Elementar – Atual Editora, São Paulo, 1993

Hoffmann, Laurence D. Cálculo um Curso Moderno e suas Aplicações. Rio de Janeiro, LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1990, v.1

Polya, G. A Arte de Resolver Problemas. Rio de Janeiro, Editora Interciência, 1978

Struik. Dirk J. História Concisa das Matemáticas. Lisboa, Gradiva, 1992

Martins, Cleide; Japiassu, Jeanine; Matemática - Exercitando a Independência. Recife, Editora Novoestilo, 2005

SITES RECOMENDADOS

- Olimpíada Brasileira de Matemática – OBM
  www.obm.org.br

- Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP
  www.obmep.org.br

- Olimpíada Argentina de Matemática
  www.oma.org.ar

- Problemas de Matemática – Inglaterra
  www.kalva.daemon.co.uk