Primeira Prova de PES-SI – Prof. Milton – 17/abr/2007

1) Considere o **problema**: ***Minimizar F = 18x + 16y + 20z,***

Sujeito a: $9x + 4y + 8z \geq 60$;

$7x + 6y + 5z \geq 50$;

$13x + 3y + 4z \geq 90$;

$18x + 2y + 3z \leq 40$;

$x \geq 0 ; y \geq 0 ; z \geq 0.$

a) Use <u>variáveis de folga</u> para transformar as desigualdades em igualdades.

b) Monte um <u>quadro</u> (matriz contendo todos os coeficientes/números do sistema) que possibilite usar o método *SIMPLEX*.

Resp.:

a) ***Minimizar F = 18x + 16y + 20z,***

Sujeito a: $9x + 4y + 8z - f_1 = 60$;

$7x + 6y + 5z - f_2 = 50$;

$13x + 3y + 4z - f_3 = 90$;

$18x + 2y + 3z + f_4 = 40$;

$x \geq 0 ; y \geq 0 ; z \geq 0; f_1 \geq 0; f_2 \geq 0; f_3 \geq 0; f_4 \geq 0.$

b)

F	*x*	*y*	*z*	f_1	f_2	f_3	f_4	
1	-18	-16	-20	0	0	0	0	0
0	9	4	8	-1	0	0	0	60
0	7	6	5	0	-1	0	0	50
0	13	3	4	0	0	-1	0	90
0	18	2	3	0	0	0	1	40

2) Analise a situação descrita abaixo e apenas <u>monte</u> o **problema** a exemplo do ***anterior***.

(ver parte em ***negrito itálico*** da questão 1)

Uma companhia monta *4* produtos (*A,B,C,D*) cujos lucros por unidade é *R\$25, R\$11, R\$16* e *R\$42*, respectivamente. O máximo que poderá vender na próxima semana será *30, 50, 25* e *50* unidades, respectivamente. Há três estágios (*1, 2, 3*) na montagem manual de cada produto, que exigem as seguintes horas:

	Produto			
Estágios	A	B	C	D
1	2	3	1	2
2	3	4	2	1
3	2	5	3	6

O tempo disponível na próxima semana para a montagem em cada estágio é de *200, 120* e *90* horas, respectivamente.

É desejável que o total de pecas *C* seja praticamente a metade das peças *A* (entre 45% e 55%).

Quanto produzir na próxima semana para ter o melhor lucro?

Resp.: ***Minimizar L = 25A + 11B + 16C + 42D,***

Sujeito a: $2A + 3B + C + 2D \leq 200$;

$3A + 4B + 2C + D \leq 120$;

$2A + 5B + 3C + 6D \leq 90$;

$0{,}45A - C \leq 0$;

$0{,}55A - C \geq 0$;

$A \leq 30$;

$B \leq 50$;

$C \leq 25$;

$D \leq 50$; $A \geq 0 ; B \geq 0 ; C \geq 0; D \geq 0.$

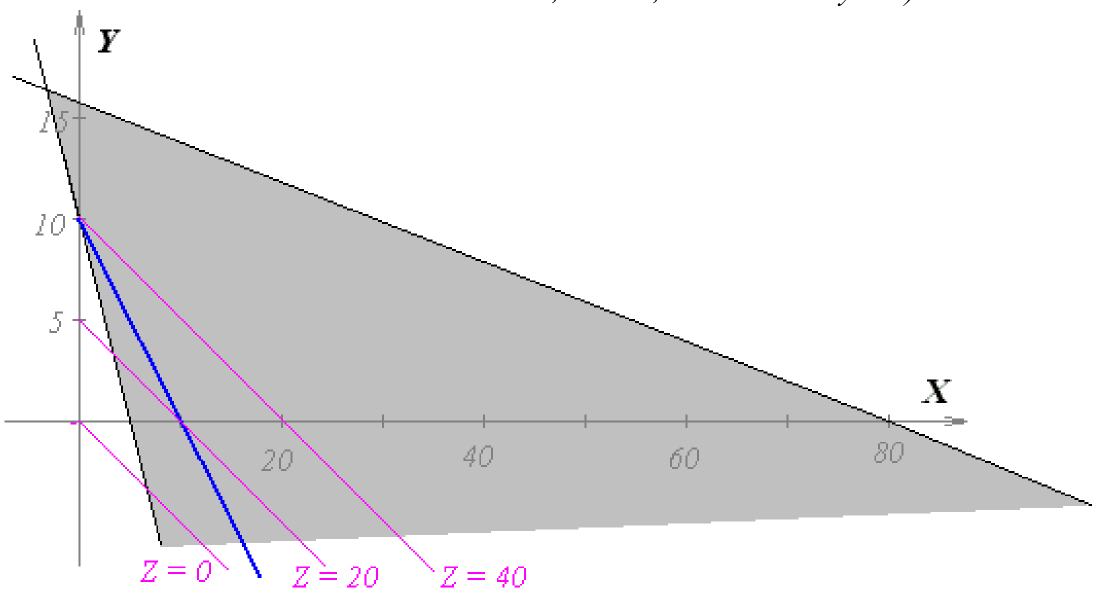
3) Resolva <u>graficamente</u> o seguinte **problema**: ***Minimizar*** $Z = 2x + 4y$,

Sujeito a: $x + 5y \leq 80$;

$4x + 2y \geq 20$;

$x + y = 10$;

Resp.: ***Não tem mínimo para Z*** *(a menos que exigíssemos* $x \geq 0$; $y \geq 0$ *neste caso,* $Z = 20$*, com* $x = 10$ *e* $y = 0$*).*



4) O quadro a seguir corresponde a uma etapa intermediária de um problema de <u>minimização</u> pelo método SIMPLEX. Descreva o(s) passo(s) seguinte(s) *(que linha deve ser multiplicada/dividida por quanto; que variável sai e qual entra; que linha soma com qual; a solução é ótima ou não; ...)*, na ordem, até chegar a um novo quadro equivalente ou, se for o caso, explique porque o processo acabou e apresente a solução.

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
L1	1	0	-57	0	0	-16	0	820
L2	0	**1**	-3	0	0	-8	0	5,2
L3	0	0	15	**1**	0	0,9	0	4,3
L4	0	0	2,2	0	**1**	3,1	0	6,1
L5	0	0	-8	0	0	1,2	**1**	9,0

Resp.: O processo acabou, ***pois a sulução factível*** $\underline{x_1 = 5,2;\ x_2 = 0;\ x_3 = 4,3;\ x_4 = 6,1;\ x_5 = 0;\ x_6 = 9,0}$ ***é ótima, uma vez que*** $Z = 820 + 57x_2 + 16x_5$ ***assume o menor valor (*** $\underline{Z = 820}$***).***
Com quaisquer outros valores de $x_2 > 0$ ***e*** $x_5 > 0$***, Z cresceria.***

5) O nosso problema das duas minas foi resolvido pelo método SIMPLEX. Em seguida, aparece o enunciado, o primeiro e o último quadro. Faça uma análise a respeito da sensitividade, apontando qual restrição vale alterar. Para uma destas restrições, calcule o valor dual e até quanto pode ser alterada.

Uma companhia de mineração possui duas diferentes minas que produzem um minério que, depois de ser triturado, é classificado em três classes: qualidade superior (A), média (B) e baixa (C). A companhia tem um contrato para abastecer uma fundição com *12* toneladas de minério de classe A, *8* toneladas de minério de classe B e *24* toneladas de classe C, por semana. As duas minas possuem diferentes características de operação, definidas a seguir:

Mina	Custo por dia ($)	Produção (tons/dia)		
		A	B	C
M1	*180*	*6*	*3*	*4*
M2	*160*	*1*	*1*	*6*

Quantos dias por semana cada mina deve operar para satisfazer o contrato da planta de fundição?

Z	x	y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	
1	-180	-160	0	0	0	0	0	0
0	1	0	**1**	0	0	0	0	5
0	0	1	0	**1**	0	0	0	5
0	6	1	0	0	-1	0	0	12
0	3	1	0	0	0	-1	0	8
0	4	6	0	0	0	0	-1	24

Z	x	y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	
1	0	0	0	0	0	-31,43	-21,43	765,71
0	**1**	0	0	0	0	-0,429	0,0714	1,7143
0	0	**1**	0	0	0	0,2857	-0,214	2,8571
0	0	0	**1**	0	0	0,4286	-0,071	3,2857
0	0	0	0	**1**	0	-0,286	0,2143	2,1429
0	0	0	0	0	**1**	-2,286	0,2143	1,1429

Dica: A inversa de

1	0	**1**	0	0
0	1	0	**1**	0
6	1	0	0	-1
3	1	0	0	0
4	6	0	0	0

É a matriz

0	0	0	0,4286	-0,071		0	0	0	6	-1	
0	0	0	-0,286	0,2143		0	0	0	-4	3	
1	0	0	-0,429	0,0714	=	14	0	0	-6	1	÷ 14
0	1	0	0,2857	-0,214		0	14	0	4	-3	
0	0	-1	2,2857	-0,214		0	0	-14	32	-3	

Resp.: ***$f_4 = 0$ e $f_5 = 0$ correspondem a atingirmos os limites das restrições 8 e 24 respectivamente. Poderíamos aterá-los (até quanto?) para ver seus custos duais.***

Vamos varia a restrição 8 (ou seja, supor que $3x + y \geq 8 + \Delta$)

O sistema pode ser escrito como:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x \\ y \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 \\ 5 \\ 12 \\ 8+\Delta \\ 24 \end{vmatrix}$$

Cuja solução é dada por:

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}^{-1} \times \begin{vmatrix} 5 \\ 5 \\ 12 \\ 8+\Delta \\ 24 \end{vmatrix}$$

Ou seja:

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{vmatrix} = (1/14) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 3 \\ 14 & 0 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & 14 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -14 & 32 & -3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 5 \\ 5 \\ 12 \\ 8+\Delta \\ 24 \end{vmatrix}$$

Então

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{vmatrix} = (1/14) \begin{vmatrix} 48 + 6\Delta - 24 \\ -32 - 4\Delta + 72 \\ 70 - 48 - 6\Delta + 24 \\ 70 + 32 + 4\Delta - 72 \\ -168 + 256 + 32\Delta - 72 \end{vmatrix} = (1/14) \begin{vmatrix} 24 + 6\Delta \\ 40 - 4\Delta \\ 46 - 6\Delta \\ 30 + 4\Delta \\ 16 + 32\Delta \end{vmatrix}$$

Como as variáveis (todas) devem ser não negativas:

$$\begin{vmatrix} 24 + 6\Delta \geq 0 \\ 40 - 4\Delta \geq 0 \\ 46 - 6\Delta \geq 0 \\ 30 + 4\Delta \geq 0 \\ 16 + 32\Delta \geq 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} \Delta \geq -4 \\ \Delta \leq 10 \\ \Delta \leq 23/3 \\ \Delta \geq -7{,}5 \\ \Delta \geq -0{,}5 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -0{,}5 \leq \Delta \leq 23/3 \end{vmatrix}$$

O novo Custo será $Zn = 180x + 160y = 180\frac{24 + 6\Delta}{14} + 160\frac{40 - 4\Delta}{14}$

Ou seja: $Zn = 180\frac{12 + 3\Delta}{7} + 160\frac{20 - 2\Delta}{7}$

Antes, : $Z = 180\frac{12}{7} + 160\frac{20}{7}$ *(~765,7). Então* $\Delta Z = 180\ \frac{3\Delta}{7} - 160\frac{2\Delta}{7}$

Portanto, $\frac{\Delta Z}{\Delta} = \frac{540}{7} - \frac{320}{7} = \frac{220}{7}$ ***~R$ 31,43*** *por toneladas de minério B*