

PES Pesquisa Operacional

Prof. Milton Procópio de Borba
Originais do Prof. Fernando Deeke Sasse

1. Pesquisa Operacional - Introdução

1. O que é a Pesquisa Operacional?

A Pesquisa Operacional é um corpo multidisciplinar de conhecimento científico originado em aplicações militares durante a Segunda Guerra Mundial, nos Estados Unidos e Grã-Bretanha. Desde 1945 este conhecimento vem sendo aplicado com crescente sucesso a problemas industriais e comerciais. As primeiras aplicações ocorriam essencialmente em grandes companhias e até hoje, 90% das 500 maiores companhias utilizam Pesquisa Operacional. Entretanto, devido à dramática redução no custo de computadores, desde os anos 80, os métodos e ferramentas da Pesquisa Operacional são disponíveis para praticamente qualquer problema de decisão. Há muitas aplicações famosas de Pesquisa Operacional onde a sua contribuição resolveu complexos problemas de planejamento, como o projeto Apollo da Nasa (1961-1972). Nos dias de hoje, entretanto, a maior parte das aplicações de Pesquisa Operacional é em problemas decisórios de gerenciamento cotidiano. A Pesquisa Operacional rotineiramente identifica as soluções que melhoram significativamente os resultados anteriores, com relação a desempenho e otimização.

Numerosas aplicações de Pesquisa Operacional têm sido documentadas em todas as áreas de negócios: finanças, marketing, operações e logística e gerenciamento de pessoal. Aplicações em setor público incluem gerenciamento de sistemas de saúde, planejamento de transporte e controle de poluição. Aplicações também existem em operações militares, medicina e esportes. Apesar da diversidade destas áreas de aplicação, os benefícios do uso da Pesquisa Operacional tendem a ser similares em cada caso: ela encontra boas soluções para problemas muito complexos. Além disso, se por um lado o desenvolvimento e implementação de um método de Pesquisa Operacional requerem um certo investimento, o período de retorno é tipicamente menor do que qualquer outro investimento.

Em termos gerais, podemos dizer que a Pesquisa Operacional consiste no uso de modelos matemáticos, estatística e algoritmos como ajuda no processo de tomada de decisões. Ela é mais freqüentemente usada para analisar problemas complexos do mundo real, tipicamente como o objetivo de melhorar ou otimizar performance. Hoje é também considerada como um dos ramos da Matemática Aplicada, sendo também uma das ferramentas básicas da engenharia industrial.

Algumas das ferramentas básicas utilizadas pela pesquisa operacional são: estatística, otimização, teoria de filas, teoria de jogos, teoria de grafos e simulação. Devido à natureza computacional destes campos, a Pesquisa Operacional está também associada à Ciência da Computação.

É interessante notar que a Pesquisa Operacional se distingue por sua habilidade em

examinar e melhorar todo um sistema, em vez de concentrar-se somente em elementos específicos (embora isso também possa ser feito). Um profissional em Pesquisa Operacional supostamente deve ser capaz de determinar quais técnicas são mais apropriadas, dada à natureza do sistema, os objetivos para melhorias, limitações físicas e computacionais de tempo e espaço. Por esta e outras razões, o elemento humano da Pesquisa Operacional é vital.

Alguns exemplos de aplicações que empregam a Pesquisa Operacional são os seguintes:

- * planejamento do layout de uma fábrica para o fluxo eficiente de materiais.
- * construção de uma rede de telecomunicações a um baixo custo que garanta a qualidade do serviço mesmo que algumas conexões fiquem congestionadas ou danificadas;
- * determinação das rotas de ônibus de modo que se possa utilizar o menor número possível, satisfazendo parâmetros mínimos de qualidade de serviço;
- * planejamento do layout de um chip de computador para reduzir o tempo de manufatura (reduzindo assim o custo).
- * gerenciamento do fluxo de materiais brutos e produtos em uma cadeia de fornecimento baseado em uma demanda incerta de produtos acabados.

2. Sociedades de Pesquisa Operacional

- O IFORS - <http://www.ifors.org> (International Federation of Operational Research Societies) é a organização de Pesquisa Operacional que abriga as outras do mundo. Entre estas as mais importantes são:

- INFORMS - <http://www.informs.org> (Institute for Operations Research and the Management Sciences);
- ORSOC - <http://www.orsoc.org.uk/> (Operational Research Society);
- EURO - <http://www.euro-online.org> (Association of European Operational Research Societies)

3. Terminologia

Quase toda bibliografia de um curso em Pesquisa Operacional está escrita na língua inglesa, de modo que é conveniente esclarecer o significado de alguns termos que irão aparecer em uma pesquisa bibliográfica. Europeus referem-se à *Pesquisa Operacional* por "*Operational Research*", enquanto que nos Estados Unidos/Canadá o termo utilizado é "*Operations Research*", sendo a abreviação OR universalmente usada.

Devido à sua interdisciplinaridade, há diversos termos sinônimos para a Pesquisa Operacional. Usuários da área de negócios utilizam "*Management Science*" (MS), ou *Ciência do Gerenciamento*. Os nomes são muitas vezes combinados em OR/MS ou ORMS. Engenheiros utilizam *Engenharia Industrial* ou *Engenharia de Sistemas*, educadores e administradores, *Modelagem de Decisão* (Decision Modeling), *Ciência da Decisão*, etc.

4. Origens da Pesquisa Operacional (opcional)

A Pesquisa Operacional moderna tem sua origem na Grã-Bretanha, impulsionada pelo conflito com a Alemanha durante a Segunda Guerra Mundial (1939-1945). Embora cientistas, durante as guerras, normalmente acabavam envolvidos no desenvolvimento do hardware militar (projetando melhores aviões, explosivos, motores, tanques, etc.) seu envolvimento na análise científica do uso **operacional** dos recursos militares jamais havia

ocorrido de modo sistemático antes da WWII. Os militares simplesmente não estavam treinados para executar tais tarefas.

As primeiras equipes em Pesquisa Operacional consistiam de indivíduos provenientes de várias disciplinas diferentes: por exemplo, um grupo consistia de um físico, dois físicos-matemáticos, dois fisiologistas e um topógrafo. A contribuição que tais profissionais trouxeram para o esforço de guerra foi suas mentes cientificamente treinadas, usadas para examinar suposições, empregar lógica, explorar hipóteses, criar experimentos, coletar dados, analisar números, etc. Muitos destes indivíduos eram de um nível intelectual altíssimo (quatro deles foram Nobeis em suas disciplinas após a guerra).

No fim da guerra a Pesquisa Operacional ficou bem estabelecida nas forças armadas da Grã-Bretanha e Estados Unidos. Entretanto, na GB os integrantes das equipes de Pesquisa Operacional voltaram ao seu trabalho original de tempo de paz, de modo que a Pesquisa Operacional não se disseminou tão bem, exceto em algumas indústrias isoladas (ferro/aço e carvão). Nos Estados Unidos, por outro lado, a Pesquisa Operacional se disseminou para as universidades onde o treinamento específico na nova disciplina se iniciou.

A equipe formada por Frederick Lanchester (engenheiro), Patrick Blackett (físico de partículas) e Frank Yates (estatístico) esteve essencialmente ocupada com o gerenciamento de recursos escassos e tomadas de decisões associados a operações de guerra, como problemas de logística e otimização do emprego de recursos materiais e humanos no tempo e no espaço. Descrevemos a seguir alguns exemplos destas primeiras aplicações durante a II Guerra.

4.1. Sistema de Defesa Aérea da Grã-Bretanha

No início de 1936 o Ministério do Ar Britânico estabeleceu a Estação de Pesquisa de Bawdsey, na costa leste, próximo a Felixstowe, Suffolk, como centro de pesquisas de radar para a Força Aérea e o Exército. Equipamento experimental de radar foi montado com um alto grau de confiabilidade e alcances de até 100 milhas foram obtidos para detecção de aviões.

Também em 1936 foi criado o Comando de Caça de RAF, especificamente encarregado da defesa aérea da Grã-Bretanha. Ele não possuía, no entanto, qualquer avião de caça efetivo (Hurricanes e Spitfires ainda não estavam em serviço), e nenhum dado de radar fazia parte do então rudimentar sistema de controle e alarme.

O primeiro dos três grandes exercícios de defesa aérea pré-guerra foi realizado no verão de 1937. A estação experimental de radar em Bawdsey foi posta em operação e as informações dela obtidas passaram a alimentar o sistema de controle e alarme de defesa aérea. Do ponto de vista de alarme os resultados foram desde o início muito encorajadores, mas a informação de monitoramento obtida pelo radar, após filtragem e transmissão através da rede de controle, não era muito satisfatório.

Em julho de 1938, um segundo grande exercício de defesa aérea foi realizado. Quatro estações de radar adicionais foram instaladas ao longo da costa e era esperado que a partir desse momento a Grã-Bretanha teria um sistema de localização e controle de aeronaves, com um maior alcance e efetividade. O exercício, no entanto, revelou um novo e sério problema. Ele consistia na necessidade de coordenar e correlacionar as adicionais, e

frequentemente conflitantes, informações recebidas das estações de radar adicionais. Com a iminência da guerra, ficou evidente que alguma solução nova, e talvez drástica, deveria ser tentada.

Ao término de exercício, o Superintendente da Estação de Pesquisa de Bawdsey, A. P. Rowe anunciou que embora o exercício tenha novamente demonstrado a factibilidade técnica do sistema de radar para detectar aviões, suas capacidades operacionais ainda estavam longe do exigido. Ele, portanto propôs que um programa relâmpago de pesquisa nos aspectos *operacionais* (em oposição aos *técnicos*) deveria ser iniciado imediatamente. O termo "*Pesquisa Operacional*" [Pesquisa em Operações (militares)] foi escolhido para denominar este novo ramo de ciência aplicada. A primeira equipe foi selecionada entre os cientistas do grupo de pesquisa de radar no mesmo dia.

No verão de 1939 a Grã-Bretanha realizou o seu último exercício aéreo pré-guerra. Ele envolveu aproximadamente 33000 homens, 1300 aviões, 110 canhões antiaéreos, 700 holofotes e 100 balões de obstrução. Este exercício mostrou uma grande melhora na operação do sistema de controle e alarme de defesa aérea. A contribuição feita pelas equipes de pesquisa operacional ficou tão aparente que o Comandante-em-Chefe do Comando de Caças da RAF (Air Chief Marshal Sir Hugh Dowding) determinou que, na iminência da guerra, elas deveriam estar anexadas ao seu QG em Stanmore. Inicialmente, a equipe foi designada "Stanmore Research Section". Em 1941 ela foi redesignada "Operational Research Section", quando o termo foi formalizado e oficialmente aceito, sendo seções similares estabelecidas em outros comandos da RAF.

Em 15 de maio de 1940, com as forças alemãs avançando rapidamente na França, a Seção de Pesquisa de Stanmore foi requisitada para analisar um pedido francês de dez esquadrões de caça adicionais (um esquadrão é formado por 12 aviões) quando as perdas estavam ocorrendo a uma taxa de aproximadamente três esquadrões a cada dois dias. A equipe preparou grafos para o primeiro-ministro Winston Churchill, baseados em um estudo das presentes perdas diárias e taxas de reposição, indicando quão rapidamente tal ação poderia esgotar a força de caças. Como resultado nenhum avião foi mandado e os que estavam em ação na França foram retirados. Esta é considerada como sendo a mais estratégica contribuição no curso da guerra feita pela Pesquisa Operacional, pois as aeronaves e pilotos salvos puderam ser disponíveis para a subsequente e vital defesa da Grã-Bretanha.

Em outro trabalho relacionado a bombardeiros britânicos, a equipe de Blackett analisou o resultado de um relatório feito pelo Comando de Bombardeiros da RAF. Para este relatório, foram inspecionados todos os aviões que retornaram de raids sobre a Alemanha, durante um determinado período. Todos os danos causados pelas defesas aéreas alemãs foram notados e foi feita a recomendação para que blindagem adicional fosse aplicada às áreas mais danificadas. A equipe de Blackett, no entanto, fez a surpreendente recomendação de que a blindagem extra fosse colocada nas áreas onde não havia qualquer dano. Eles haviam suspeitado que o relatório não fora imparcial, pois incluía somente aviões que haviam retornado de suas missões. As áreas intocadas provavelmente eram vitais e, se atingidas, resultariam na perda do avião.

4.2. Guerra anti-submarinos

Em 1941 uma Seção de Pesquisa Operacional (ORS) foi estabelecida no Comando Costeiro, que executou alguns dos mais conhecidos trabalhos de Pesquisa Operacional da

Segunda Guerra. A responsabilidade do Comando Costeiro consistiu, em grande parte, na coordenação de vôos solitários de longo alcance com o objetivo de avistar e atacar U-boats (U-boote - submarinos alemães) na superfície. Entre os problemas considerados pela Pesquisa Operacional estavam:

4.2.1. Organização de manutenção e inspeção de vôo.

O problema aqui era de que em um esquadrão cada aeronave, em um ciclo de 350 horas de vôo, requeria em termos de manutenção de rotina 7 inspeções menores (durando de 2 a 5 dias cada) e uma inspeção maior (durando 14 dias). Como então deveriam ser organizados vôos e manutenção de modo a otimizar as possibilidades do esquadrão? O ORS decidiu que o procedimento em vigor, onde uma tripulação tinha seu próprio avião, sendo este avião mantido por uma dedicada equipe de terra, era ineficiente, pois significava que quando o avião estava em ação, a equipe de terra permanecia inativa. Eles propuseram um sistema de garagem central onde os aviões eram mandados para manutenção quando necessário e cada tripulação utilizava um diferente avião quando necessário. A vantagem óbvia deste sistema era que o número de horas voadas aumentaria. A desvantagem era de que haveria uma baixa no moral causada pela perda dos laços entre a tripulação e a equipe de manutenção de terra. Em um teste de 5 meses, quando os vôos foram organizados pela ORS, as horas operacionais de vôo diárias aumentaram em 61% com relação ao sistema anterior, utilizando o mesmo número de aviões. O sistema foi aceito e implementado.

4.2.2. Comparação do tipo de aeronaves

Aqui o problema era de decidir, para um tipo particular de operação, os méritos relativos de diferentes tipos de aviões em termos de fatores como: horas voadas por homem-manutenção por mês, letalidade da carga, duração de missão, chance de avistar um U-boat, etc.

4.2.3. Melhoria na probabilidade de atacar e destruir um U-boat.

A experiência mostrava que eram necessários em torno de 170 homens-hora (manutenção e equipes de terra) para produzir uma hora de vôo operacional e mais de 200 horas de vôo para produzir um ataque a um U-boat emergido. Portanto, ao menos 34000 homens-hora de esforço eram necessários somente para atacar um U-boat. No começo de 1941 a probabilidade ataque/destruição era de 2 a 3%, ou seja, entre 1.1 e 1.7 milhões de homens-hora eram necessários para destruir um U-boat. Nesta área a maior contribuição foi dada pela Pesquisa Operacional no Comando Costeiro, de modo que esta ação será examinada em maior detalhe (a questão do U-boat ser atacado e danificado será desconsiderada).

Claramente, no cálculo acima, o elo fraco estava na probabilidade ataque/destruição, sendo o fator essencial a ser melhorado.

A principal arma de ataque contra um U-boat emergido eram cargas de profundidade lançadas em uma barra (tipicamente 6 cargas de 110Kg) em uma linha reta ao longo da direção de vôo do avião. Depois de atingir a água uma carga de profundidade afunda, enquanto se desloca para frente. Depois de um tempo pré-determinado, ou depois de atingir certa profundidade, ela explode e qualquer U-boat dentro de uma certa distância é letalmente danificado. Seis variáveis foram consideradas como importantes na probabilidade de destruição:

- a) profundidade (ou tempo) para a detonação da carga,
- b) raio letal,

- c) erros na pontaria ao baixar a barra,
- d) orientação da barra com relação ao U-boat,
- e) espaçamento entre sucessivas cargas na barra,
- f) miras de bomba para baixas altitudes.

Cada fator pode ser considerado separadamente:

a) Profundidade (tempo) para explosão da carga de profundidade.

Nos primeiros dois anos da guerra as cargas de profundidade eram quase sempre programadas para explodir a uma profundidade de *30 a 45m*. Análise de relatos de pilotos pela ORS mostrou que em *40%* dos ataques o U-boat era ainda visível, ou havia submergido a menos de *15* segundos (estes submarinos eram os que poderiam ser destruídos com maior probabilidade, pois sua posição era exatamente conhecida). Como o raio letal da carga de profundidade era aproximadamente *5 a 6m*, era claro que detonações a menores profundidades eram necessárias. Explosões a uma profundidade de *15m* foram então iniciadas e logo a *10 e 8m*, quando novos fusos tornaram-se disponíveis.

b) Raio letal

Como foi mencionado anteriormente, a carga de profundidade padrão de *110Kg* tinha supostamente um raio letal de *5 a 6m* somente. Para aumentar este raio um explosivo químico mais poderoso era necessário (por exemplo, um aumento do raio letal em *20%* implicaria um aumento de volume da carga em *72%*). Portanto, o melhor explosivo químico disponível foi introduzido.

Argumentou-se que como uma carga de *110Kg* tinha um raio letal muito pequeno, uma carga maior, de *270Kg*, foi recomendada pelo Comando Aéreo. Por outro lado, o ORS sugeriu cargas de *45Kg*, pensando em aumentar a efetividade através de várias pequenas explosões em vez de poucas grandes. De fato, nenhuma das alternativas foi escolhida devido ao crescente sucesso das cargas de *110Kg*.

c) Erros na pontaria ao baixar a barra

No final de 1942 tornou-se claro que um número excessivo de pilotos relatava terem danificado um U-boat sem tê-lo afundado. Ou as afirmações eram excessivamente otimistas (a visão do ORS) ou o raio letal de uma carga de profundidade era muito menor do que se acreditava (a visão do Comando Aéreo). Para resolver a questão câmeras foram instaladas para gravar os ataques a U-boats. A análise de *16* ataques indicou que o ORS estava certo. Essa análise também mostrou que os pilotos estavam seguindo instruções táticas e mirando adiante dos U-boats, para levar em conta seu deslocamento durante a queda da bomba. Entretanto, a análise também revelou que se eles não houvessem usado tal procedimento, o sucesso seria *50%* maior. Os pilotos foram então instruídos a não mirar adiante.

d) Orientação da barra com relação ao U-boat

Aqui a questão era decidir sobre ângulo horizontal de ataque ao submarino. Nenhuma resposta definida foi obtida até 1944, quando foi concluído que os ataques ao longo da trajetória eram mais acurados (provavelmente devido ao fato do piloto poder usar o rastro do U-boat para alinhar o avião).

e) Espaçamento entre sucessivas cargas de profundidade na barra

Originalmente este espaçamento era de *12m*. A ORS calculou que um aumento para *33m* aumentaria a taxa de sucessos em *35%* e tal foi feito.

f) Miras de bomba para baixa altitude

Na maior parte da guerra todos os ataques de baixa altitude a U-boats foram feitos por pilotos ajustando a posição e soltando as bombas, com base na sua pura habilidade. Embora os pilotos e o Comando Aéreo acreditassem que esse procedimento era acurado, a evidência fotográfica mostrou o contrário, e a ORS requisitou miras (ópticas) de bomba. No final de 1943 uma mira de bomba de baixa altitude passou a ser disponível e as taxas de sucesso por ataque aumentaram em 35%.

O efeito geral das medidas descritas acima foi que, em 1945, a probabilidade de destruição por ataque a U-boats havia se elevado a 40% (ela começou em 2-3%).

4.3. Organização de Comboios

A foto abaixo mostra navios mercantes em um comboio, próximo à costa britânica em 1940.



O sistema de comboios foi introduzido pelos britânicos de modo a reduzir afundamentos causados por u-boats. Embora fosse consenso que navios de guerra deveriam acompanhar os navios cargueiros, não era claro que os comboios deviam ser grandes ou pequenos. Comboios viajavam na velocidade do seu membro mais lento, de modo que pequenos comboios em geral eram mais rápidos. Também se argumentou que pequenos comboios seriam mais difíceis de serem detectados por U-boats. Por outro lado, grandes comboios podiam empregar mais navios de guerra contra um atacante e o perímetro do comboio protegido pelas corvetas e destróiers não aumentava em proporção com o número de navios de carga dentro do perímetro. A equipe de Blackett mostrou que:

- * comboios grandes eram mais eficientes;
- * a probabilidade de detecção por U-boats não era estatisticamente correlacionada com o

tamanho do comboio;

* comboios lentos estavam sob um grande risco, embora grandes comboios fossem preferidos.

5. Conceitos Introdutórios

Para que tenhamos uma idéia mais clara do que é a Pesquisa Operacional consideraremos um problema específico.

Exemplo: A Companhia de Duas Minas

Uma companhia de mineração possui duas diferentes minas que produzem um minério que, depois de ser triturado, é classificado em três classes: qualidade superior (A), média (B) e baixa (C). A companhia tem um contrato para abastecer uma fundição com 12 toneladas de minério de classe A, 8 toneladas de minério de classe B e 24 toneladas de classe C, por semana. As duas minas possuem diferentes características de operação, definidas a seguir:

Mina	Custo por dia (\$)	Produção (tons/dia)		
		A	B	C
M1	180	6	3	4
M2	160	1	1	6

Quantos dias por semana cada mina deve operar para satisfazer o contrato da planta de fundição?

[Embora este seja um exemplo muito simplificado, é o primeiro passo para progredir até problemas mais complicados e realísticos].

Sugestões intuitivas:

- um dia por semana de trabalho na mina M1 e um dia na mina M2.

Esta sugestão não é muito boa, pois resulta em somente 7 toneladas de minério tipo A por semana, insuficiente para cumprir a exigência de 12 toneladas por semana. Tal solução é denominada *não-factível*.

- Quatro dias de trabalho por semana para a mina M1 e três dias/semana para a mina M2.

Esta parece ser uma sugestão melhor, pois proporciona suficiente minério para atender o contrato (27 ton. de A, 15 ton. de B e 34 ton. de B). Tal solução é dita *factível*, embora muito custosa (portanto não necessariamente adequada).

Solução otimizada do problema

O que temos até agora é uma descrição verbal do Problema da Duas Minas. O que necessitamos agora é traduzir a descrição verbal em uma equivalente descrição matemática.

Ao lidar com problemas desse tipo devemos considerar as seguintes partes:

1. *Variáveis*,
2. *Restrições*,
3. *Objetivo*.

1. Variáveis

Elas representam "as decisões a serem tomadas", ou as "incógnitas". Sejam

x = número de dias/semana de operação da mina M1,

y = número de dias/semana de operação da mina M2,

Notemos que $x \geq 0, y \geq 0$.

2. Vínculos ou restrições

2.1. Expressão matemática das condições exigidas pelo contrato:

Minério

A $6x + 1y \geq 12$

B $3x + 1y \geq 8$

C $4x + 6y \geq 24$

Notemos aqui o sistema acima envolve desigualdades, de modo que podemos produzir mais minério do que necessário. De fato, temos a seguinte regra: dada uma escolha entre igualdade e uma desigualdade, devemos escolher a desigualdade. Por exemplo, se escolhermos uma igualdade para as condições de fornecimento de minério, temos três equações, $6x+y = 12$, $3x+y = 8$ e $4x+6y = 24$. O correspondente sistema não possui solução (o sistema é superdeterminado).

2.2. Restrição dos dias por semana

Temos um número máximo de dias de trabalho por semana em cada mina, por exemplo, 5.

Ou seja,

$$x \leq 5$$

$$y \leq 5$$

Restrições deste tipo são chamadas *implícitas*, pois são implícitas na definição das variáveis.

3. Objetivo

Nosso objetivo é minimizar o custo de produção, ou seja, devemos minimizar $180x+160y$.

Temos agora uma completa representação matemática do problema, dada por

Minimizar:

$$180x+160y,$$

sujeito a

$$6x+y \geq 12,$$

$$3x+y \geq 8,$$

$$4x+6y \geq 24,$$

$$x \leq 5,$$

$$y \leq 5,$$

$$x \geq 0,$$

$$y \geq 0,$$

Solução utilizando Maple

Vamos utilizar aqui o comando *inequal*:

```
> restart:
```

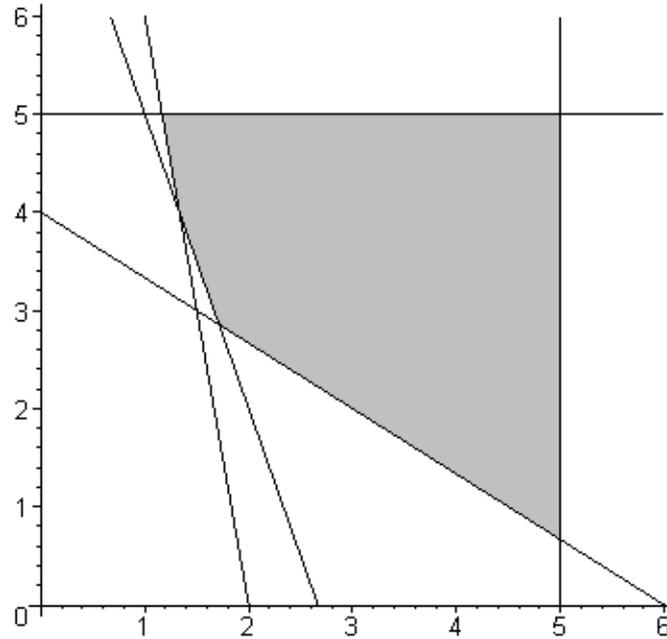
```
> with (plots) :
```

```
Warning, the name changecoords has been redefined
```

```
> Rest := [6*x+y>=12, 3*x+y>=8, 4*x+6*y>=24, x<=5, y<=5, x>=0, y>=0] ;  
Rest := [12 ≤ 6 x + y, 8 ≤ 3 x + y, 24 ≤ 4 x + 6 y, x ≤ 5, y ≤ 5, 0 ≤ x, 0 ≤ y]
```

```
> Regiao_factivel := inequal (Rest, x=0..6, y=0..6,  
optionsfeasible=(color=grey), optionsexcluded=(color=white)) :
```

```
> display([Regiao_factivel]);
```

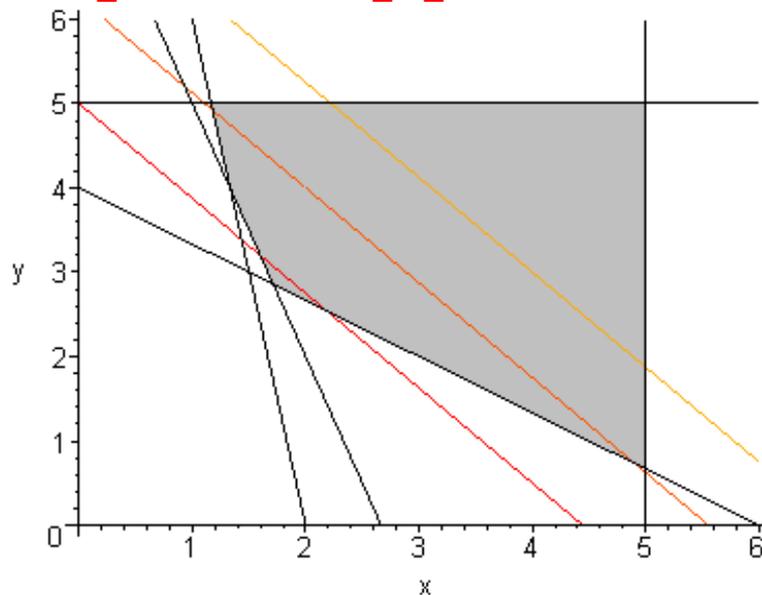


>

Portanto, qualquer ponto na região cinza representa uma solução factível do problema. Devemos agora descobrir qual ponto desta região minimiza o custo $z = 180x + 160y$. Vamos tratar várias curvas de custo:

```
> curvas_de_custo:=contourplot(180*x+160*y, x=0..6, y=0..6,  
contours=[800,1000,1200]);
```

```
> display([Regiao_factivel,curvas_de_custo]);
```



>

A reta de custo mínimo é aquela que passa pelo vértice formado pela intersecção das retas $4x + 6y = 24$ e $3x + y = 8$, dada por

```
> solve({4*x+6*y=24,3*x+y=8},{x,y});  
> evalf(%);
```

$$\left\{y = \frac{20}{7}, x = \frac{12}{7}\right\}$$

```
sol := {x = 1.714285714, y = 2.857142858 }
```

>

Como x e y devem ser inteiros, escolhemos $x=2$ dias/semana para a mina $M1$ e $y=3$ dias/semana para a mina $M2$. O custo será

```
> x:=2:y:=3: z:= evalf(180*x+160*y);  
z := 840.
```

>

Neste problema simples foi relativamente fácil determinar o ponto de custo mínimo. Em casos mais complexos devemos ter métodos mais aprimorados para maximizar ou minimizar.

Considerando o Problema das Duas Minas acima convém fazermos as seguintes observações:

- o problema foi um problema de **decisão**;
- nós tomamos uma situação do mundo real e construímos uma correspondente representação matemática, freqüentemente denominada **modelo matemático** da situação real;
- tendo obtido um modelo matemático devemos utilizar algum método quantitativo que nos permita resolver numericamente o modelo, ou seja, devemos ter um algoritmo para resolver o problema;
- essencialmente um algoritmo (para um modelo particular) é um conjunto de instruções que irão produzir uma solução numérica para o problema. Muitos dos algoritmos utilizados em Pesquisa Operacional já estão disponíveis em pacotes computacionais;
- nosso modelo tem um **objetivo**, algo que queremos **otimizar**;
- uma vez obtida a solução numérica para nosso modelo, devemos traduzir a solução de volta para a situação do mundo real.

A formulação matemática do problema acima tem as seguintes características:

- todas as variáveis foram tratadas inicialmente como sendo contínuas;
- temos um único objetivo;
- o objetivo e as restrições são representados por expressões lineares nas variáveis.

Qualquer formulação que satisfaz estas três condições é chamada um programa linear. Este é um tópico importante da pesquisa operacional e será estudado separadamente.

6. Definição de Pesquisa Operacional

Daremos agora uma melhor definição para Pesquisa Operacional:

Pesquisa Operacional é a representação de sistemas do mundo real através de modelos matemáticos, junto com o uso de métodos quantitativos (algoritmos) para resolver tais modelos, com o objetivo de otimizar.

Podemos também definir um modelo matemático em Pesquisa Operacional como

consistindo de:

- **Variáveis de decisão**, que são as incógnitas a serem determinadas pela solução para o modelo;
- **Restrições** que representam as limitações físicas do problema;
- Uma **função objetivo**;
- Uma **solução** (ou solução ótima) para o modelo e a identificação de um conjunto de valores de variáveis que são *factíveis* (ou seja, que satisfazem todas as restrições) e que conduzem a um valor ótimo da função de objetivo.

Em termos gerais podemos considerar a Pesquisa Operacional como a aplicação do método científico à Teoria das Decisões. Inerente à pesquisa operacional está a seguinte filosofia:

- decisões devem ser tomadas;
- a utilização de um método quantitativo (explícito, articulado) conduzirá, na média, a melhores decisões do que aquelas tomadas utilizando métodos não-quantitativos.

De fato, diz-se que a Pesquisa Operacional, embora imperfeita, oferece o melhor método para se fazer uma particular decisão em muitos casos (o que não significa afirmar que a Pesquisa Operacional produzirá a decisão certa).