Pseudo Prova de PES – Otimização não Linear

1) Apenas monte a função a ser minimizada, correspondente ao problema:
   Quantos andares devemos fazer para obter o maior lucro depois de ***a*** *anos*, num edifício com ***4*** *aptos*. por andar, alugado a *R$**500,00*** mensais cada um?
   A construção custou: *R$**50.000,00***, o terreno; *R$**100.000,00***, o fundamento geral; mais *R$**50.000,00***, o primeiro andar; *R$**60.000,00***, o segundo andar; *R$**70.000,00***, o terceiro andar,...

2) Maximize $L(n) = 24n\boldsymbol{a} - 150 - 45n - 5n^2$, onde ***a*** é constante (usando derivadas)

3) Resolva a questão 2) usando busca de Fibonaci ou Seção áurea.
   Para isto, considere $\boldsymbol{a} = 5$, n entre 2 e 23, com erro admissível de 1.

4) Apenas monte a função a ser minimizada, correspondente ao problema:
   Qual a menor quantidade de material que permite fazer uma caixa retangular, de volume fixo (digamos ***V*** *litros*), sem tampa, com uma das faces laterais duplamente reforçada?

5) Minimize $S(x, y) = xy + \dfrac{2V}{y} + \dfrac{3V}{x}$, onde $\boldsymbol{V = 5}$.

Gabarito:

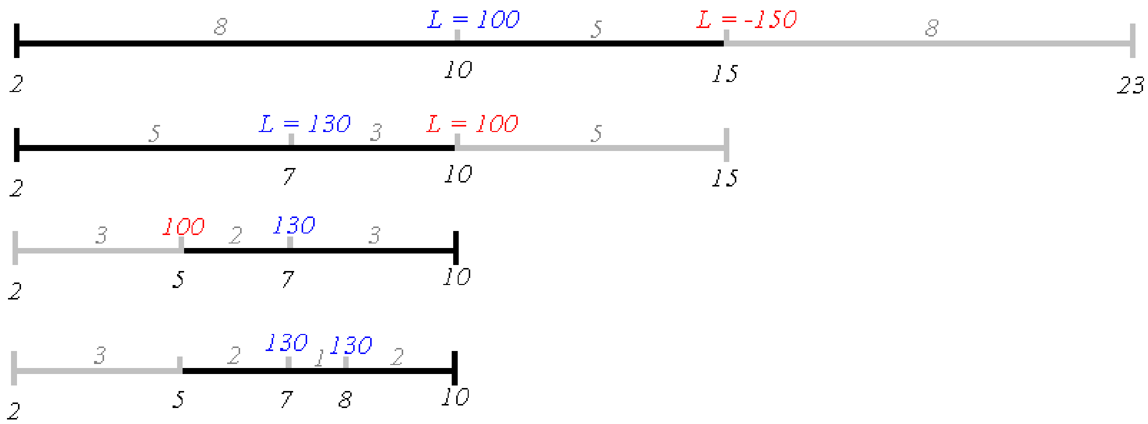
1) Receita: $R(n) = 500 \times 4 \times 12 \times a = 24.000n\boldsymbol{a}$
   Custo: $C(n) = 50.000 + 100.000 + (50.000 + 40.000 + 10.000n)n/2$
   $C(n) = 150.000 + 45.000n + 5.000n^2$

   $L(n) = R(n) - C(n) = (24n\boldsymbol{a} - 150 - 45n - 5n^2)\ R\$1.000$

2) $L(n) = 24n\boldsymbol{a} - 150 - 45n - 5n^2 \rightarrow L'(n) = 24\boldsymbol{a} - 45 - 10n = 0$
   $n = 2{,}4a - 4{,}5$

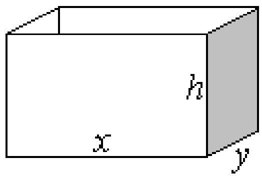
3) $L(n) = 24n\boldsymbol{(5)} - 150 - 45n - 5n^2 = 75n - 150 - 5n^2$
   $L(n) = 75n - 150 - 5n^2$

   Fibonaci: $er = \dfrac{Int}{Fn} \rightarrow Fn = \dfrac{23 - 2}{1} = 21$



$n = 8$ e $L(8) = 130$

4) $x.y.h = V \rightarrow h = \dfrac{V}{xy}$



$$S = xy + 2xh + 3yh \rightarrow S = xy + 2x\frac{V}{xy} + 3y\frac{V}{xy}$$

$$S(x, y) = xy + 2\frac{V}{y} + 3\frac{V}{x}$$

5) $S(x, y) = xy + \dfrac{10}{y} + \dfrac{15}{x} \rightarrow S`_x = y - \dfrac{15}{x^2} = 0 \rightarrow y = \dfrac{15}{x^2}$

$$S`_y = x - \frac{10}{y^2} = 0 \rightarrow xy^2 = 10 \rightarrow x\left(\frac{15}{x^2}\right)^2 = 10$$

$$x\frac{225}{x^4} = 10 \rightarrow 10x^3 = 225 \rightarrow x^3 = 22{,}5 \rightarrow x = \sqrt[3]{22{,}5} \sim 2{,}82$$

$$y = \frac{15}{x^2} = \frac{15}{\sqrt[3]{22{,}5^2}} \rightarrow y \sim 1{,}88 \rightarrow S = 15{,}9$$

ou, por Gradiente, com Seção áurea:

$P_0\ (1, 1) \rightarrow x = 1$

$y = 1 \rightarrow S = 26$. *Calcularemos o gradiente aproximado com* $dx = dy = 0{,}1$

$x = 1{,}1$

$y = 1 \rightarrow S = 24{,}7 \rightarrow \dfrac{\Delta S}{\Delta x} = \dfrac{-1{,}3}{0{,}1} = -13$

$x = 1$

$y = 1{,}1 \rightarrow S = 25{,}2 \rightarrow \dfrac{\Delta S}{\Delta y} = \dfrac{-0{,}8}{0{,}1} = -8 \rightarrow grad(S) \sim [\,-13, -8\,]$

Como queremos minimizar, andemos na direção oposta:

$x = 1 + 13t < 4 \rightarrow t < 0{,}23$

$y = 1 + 8t < 3 \rightarrow t < 0{,}25$

$0{,}23 \times \mathbf{0{,}618} \sim \mathbf{0{,}14}$ e $0{,}23 - 0{,}14 = \mathbf{0{,}09}$

$t = \mathbf{0{,}09} \rightarrow x = 2{,}17$

$y = 1{,}72 \rightarrow S = 16{,}4$

$t = \mathbf{0{,}14} \rightarrow x = 2{,}82$

$y = 2{,}12 \rightarrow S = 16{,}0$

$0{,}14 \times \mathbf{0{,}618} \sim 0{,}09$ e $0{,}14 - 0{,}09 = 0{,}05$

$t = 0.09 + 0{,}05 = \mathbf{0{,}14} \rightarrow x = 2{,}82$

$y = 2{,}12 \rightarrow S = 16{,}0$

$t = 0.09 + 0{,}09 = \mathbf{0{,}18} \rightarrow x = 3{,}34$

$y = 2{,}44 \rightarrow S = 16{,}7$

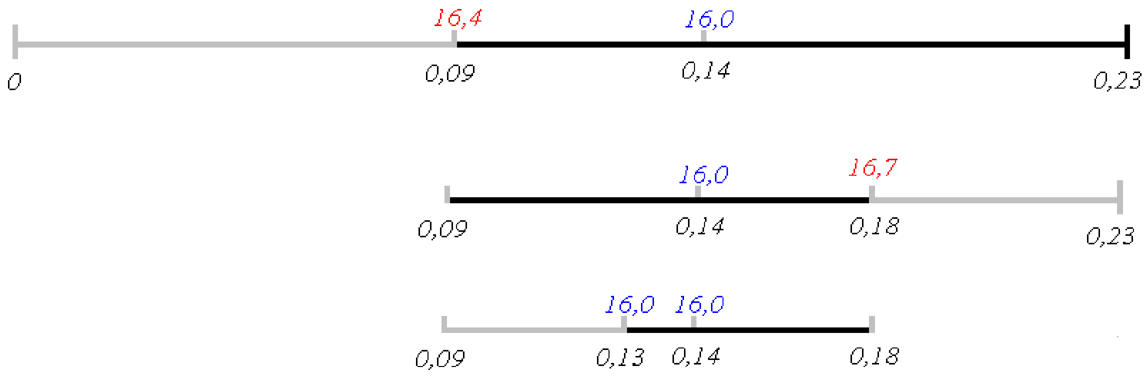
$0{,}09 \times \mathbf{0{,}618} \sim 0{,}05$ e $0{,}09 - 0{,}05 = 0{,}04$

$t = 0.09 + 0{,}05 = 0{,}14 \rightarrow x = 2{,}82$

$y = 2{,}12 \rightarrow S = 16{,}0$

$t = 0.09 + 0{,}04 = 0{,}13 \rightarrow x = 2{,}69$

$y = 2{,}04 \rightarrow S = 16{,}0$



Convém acabar esta etapa com $t = 0{,}135 \rightarrow x = 2{,}76$

$y = 2{,}08 \rightarrow S = 15{,}98$

Calcularemos o gradiente aproximado com dx = dy = 0,05

$P_1\ (2{,}76,\ 2{,}08) \rightarrow x = 2{,}76$

$y = 2{,}08 \rightarrow S = 15{,}98$

$x = 2{,}81$

$$y = 2{,}08 \rightarrow S = 15{,}99 \rightarrow \frac{\Delta S}{\Delta x} = \frac{0{,}01}{0{,}05} = 0{,}2$$

$x = 2{,}76$

$$y = 2{,}13 \rightarrow S = 16{,}01 \rightarrow \frac{\Delta S}{\Delta y} = \frac{0{,}03}{0{,}05} = 0{,}6 \rightarrow grad(S) \sim [\ 0{,}2,\ 0{,}6\ ]$$

Como queremos minimizar, andemos na direção oposta:

$x = 2{,}76 - 0{,}2t > 2 \rightarrow\ t < 3{,}8$

$y = 2{,}08 - 0{,}6t > 1 \rightarrow\ t < 1{,}8$

$1{,}8 \times \mathbf{0{,}618} \sim \mathbf{1{,}1}$ e $1{,}8 - 1{,}1 = \mathbf{0{,}7}$

$t = \mathbf{0{,}7} \rightarrow x = 2{,}62$

$y = 1{,}66 \rightarrow S = 16{,}10$

$t = \mathbf{1{,}1} \rightarrow x = 2{,}54$

$y = 1{,}42 \rightarrow S = 16{,}55$

$1{,}1 \times \mathbf{0{,}618} \sim 0{,}7$ e $1{,}1 - 0{,}7 = 0{,}7$

$t = \mathbf{0{,}7} \rightarrow x = 2{,}62$

$y = 1{,}66 \rightarrow S = 16{,}10$

$t = \mathbf{0.4} \rightarrow x = 2{,}68$

$y = 1{,}84 \rightarrow S = 15{,}96$

$0,7 \times \mathbf{0,618} \sim 0,4$ e $0,7 - 0,7 = 0,3$

$t = \mathbf{0.4} \rightarrow x = 2,68$

$y = 1,84 \rightarrow S = 15,96$

$t = \mathbf{0.3} \rightarrow x = 2,70$

$y = 1,90 \rightarrow S = 15,95$

Convém acabar esta etapa com $t = 0,3 \rightarrow x = 2,70$

$y = 1,90 \rightarrow S = 15,95$

Recomeçaremos, e quisermos melhorar, com P_1 *(2,70, 1,90), ...*