O Jogo do “resta-um” num tabuleiro infinito

Alexandre Baraviera
Milton Procópio de Borba

1. Introdução.

No EREMAT-2007 em Canoas-RS, acompanhando a Kelly, aluna de Matemática da UNIVILLE, assisti a várias palestras, mas a que mais me interessou, para espanto da Kelly e de suas colegas, foi a palestras do Professor Alexandre Baraviera, tendo como título “*O Jogo do resta um num tabuleiro infinito*”.

A idéia do prof. Alexandre, além de apresentar o curioso problema, era dar uma idéia da demonstração de impossibilidade: O fato de tentarmos fazer um processo várias vezes, sem sucesso, só nos dá uma maior indicação de que provavelmente este processo seja impossível, mas não o prova.

Depois da palestra, completei todos os cálculos de todos os casos e troquei e-mails com o professor Alexandre sobre o problema. Ele achou interessante as minhas argumentações no sentido de responder a pergunta considerada por ele, ainda em aberto:

Partindo de um tabuleiro infinito totalmente preenchido abaixo de certa linha, é possível subir cinco linhas com movimentos do jogo “resta-um”? .

2. O jogo padrão conhecido.

O objetivo do jogo *“resta-um”* é deixar apenas um pino no tabuleiro. Ver figura 1.

i. Para eliminar um pino, você precisa "pular" sobre ele, como no jogo de Damas.
ii. Você ganha o jogo quando resta apenas um pino.
iii. Pode haver outras formas de tabuleiro além da tradicional cruz: *flecha, pirâmide...*

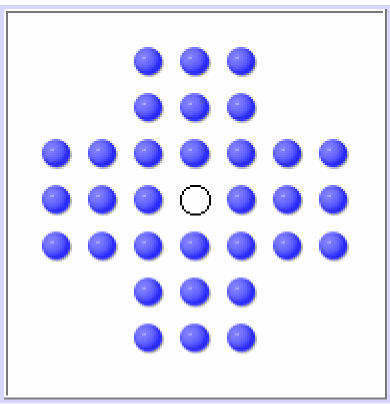


Figura 1: Tabuleiro padrão do jogo “resta-um”.

3. Nosso "jogo"

No nosso caso, trataremos de um tabuleiro infinito, com os furos em pontos $(x,y) \in Z^2$ de coordenadas de inteiras.

O nosso jogo começa com pinos colocados em todos os pontos $P(x,y)$ com $y \leq 0$ e só nestes (ver Figura 2), ou seja começaremos com pinos na região I (inicial / inferior) com

$$I = \{ (x,y) \in Z^2, y \leq 0 \}$$

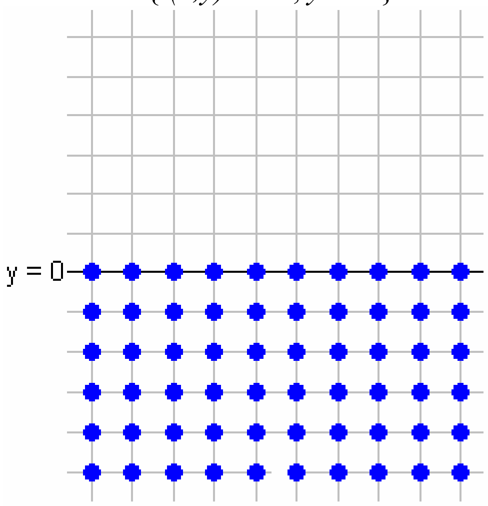
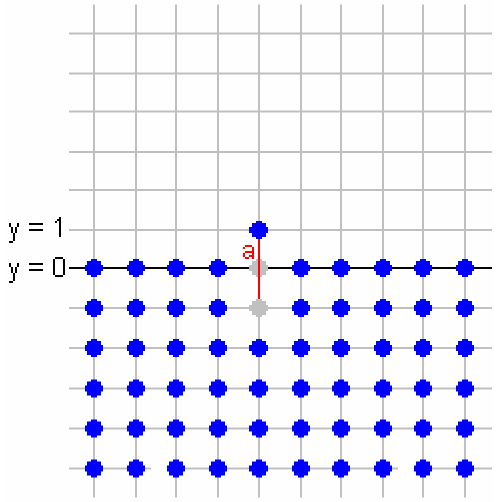


Figura 2: Tabuleiro infinito do jogo "resta-um".

- Apresentaremos exemplos de movimentos que levem algum pino nas "alturas"
  $y = 1$,
  $y = 2$,
  $y = 3$ e
  $y = 4$. Ver figuras 3, 4, 5 e 6.
- provaremos a impossibilidade de atingir a altura $y = 6$;
- vamos tentar convencer o leitor da impossibilidade de se atingir a altura $y = 5$.

4. Um pouco de brincadeira

Para atingir a "altura" $y = 1$, fazemos o movimento seguinte:



ou

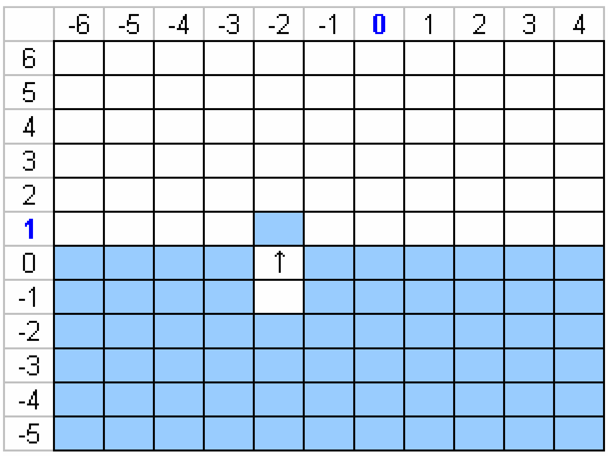
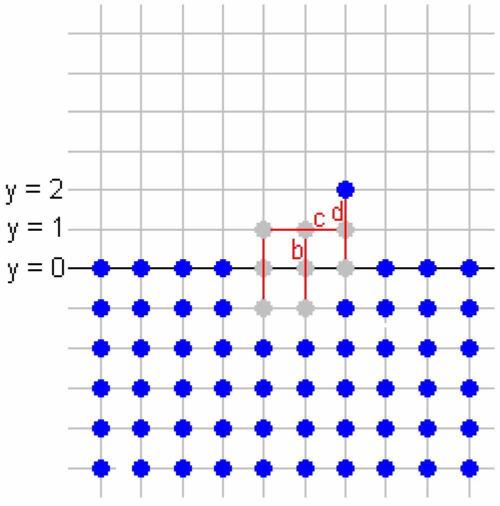


Figura 3: Movimento para atingir o nível $y = 1$.

Para atingir a “altura” $y = 2$:

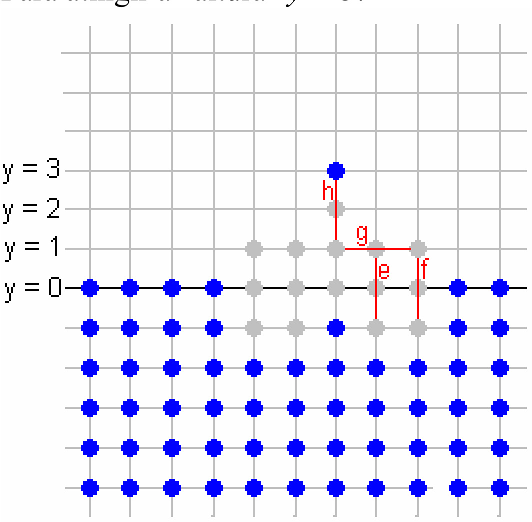


ou

	-6	-5	-4	-3	-2	-1	**0**	1	2	3	4
6											
5											
4											
3											
2											
1						2→	↑3				
0						↑1					
-1											
-2											
-3											
-4											
-5											

Figura 4: Movimentos para atingir o nível $y = 2$.

Para atingir a “altura” $y = 3$:

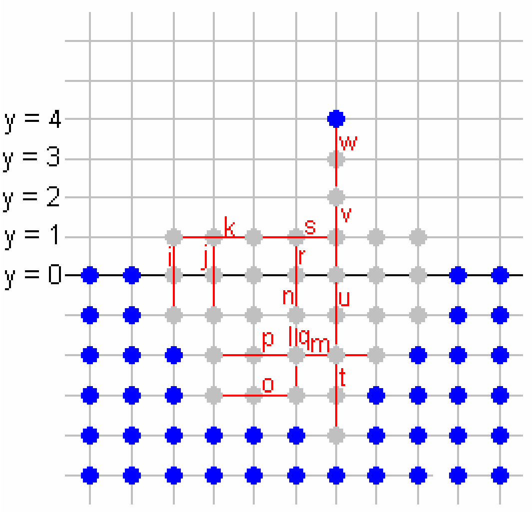


ou

	-6	-5	-4	-3	-2	-1	**0**	1	2	3	4
6											
5											
4											
3											
2							↑4				
1								←3			
0								↑1	↑2		
-1											
-2											
-3											
-4											
-5											

Figura 5: Movimentos para atingir o nível $y = 3$.

Para atingir a “altura” $y = 4$



ou

	-6	-5	-4	-3	-2	-1	**0**	1	2	3	4
6											
5											
4											
3							↑15				
2											
1				3→		11→	↑14				
0			↑1	↑2		↑10					
-1						↑6	↑13				
-2					8→	4↑9	←5				
-3					7→		↑12				
-4											
-5											

Figura 6: Movimentos para atingir o nível $y = 4$.

Analisando as figuras 3, 4, 5 e 6, percebemos como cresce rápido o número de “buracos” à medida que “subimos” os níveis do tabuleiro.

5. Um pouco de Matemática

Para provarmos que a “altura” $y = 6$ é inatingível, começaremos por definir o conjunto $\boldsymbol{P}$ dos pontos com *pinos* e o conjunto $\boldsymbol{B}$ dos pontos com *buracos*.

Seja $\boldsymbol{P} = \{ (x,y) \in Z^2$ / algum *pino* está colocado em (x,y) }
Seja $\boldsymbol{B} = Z^2 - \boldsymbol{P}$

A principal ferramenta que utilizaremos é a função $E: Z^2 \to R^+$ dada a seguir.
Ela pode ser entendida como a “energia” de cada configuração (*foto*) do tabuleiro.

Para cada ponto (x,y), definimos

$E(x,y) = \begin{cases} 0 & se \quad (x,y) \in \boldsymbol{B} \\ r^{|x|-y} & se \quad (x,y) \in \boldsymbol{P} \end{cases}$ para algum $r > 0$, real, devidamente determinado.

Para cada região R de Z^2, definimos

$$E(R) = \sum_{(x,y)\in R} E(x,y)$$

Lema 1: Para cada $r \in (0\ ,\ 1)$, temos que $E(I) = \dfrac{1+r}{(1-r)^2}$.

Lema 2: Para algum $r \in (0\ ,\ 1)$ devidamente determinado, nenhum dos movimentos do “jogo” fazem E aumentar.

Escreveremos $E^+(x,y)$ para significar a energia do ponto (x,y) ocupado por um pino.

Teorema: Para $r \in (0\ ,\ 1)$ determinado pelo Lema 2, temos que

$$E^+(0,6) > E^+(0,5) = E(I).$$

Corolário: É impossível atingir a “altura” $y = 6$.

***Demonstração**: S*em perder a generalidade, podemos considerar $x = 0$ a coluna vertical do tabuleiro onde supostamente teríamos atingido a “altura” $y = 6$. Agora, o corolário segue imediatamente do Teorema e do Lema 2 ■

Demonstração do Lema 1:
Podemos ver a configuração inicial I, como um conjunto de linhas Y_k, ou seja:

$I = \bigcup_{k=0}^{\infty} Y_k$, com $Y_k = \{ (x,-k) / x \in Z\}$

Então, $E(I) = \sum_{k=0}^{\infty} E(Y_k)$.

Como $E(Y_k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} E(m,-k) = E(0,-k) + 2\sum_{m=1}^{\infty} E(m,-k)$, temos que

$$E(Y_k) = r^k + 2\sum_{m=1}^{\infty} r^{|m|+k} = r^k + 2\, r^k \sum_{m=1}^{\infty} r^m = r^k \left(1 + 2\,\frac{r}{1-r}\right) = r^k\, \frac{1+r}{1-r}$$

Portanto, $E(I) = \sum_{k=0}^{\infty} E(Y_k) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k\, \frac{1+r}{1-r} = \frac{1+r}{1-r} \sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1+r}{1-r} \cdot \frac{1}{1-r}$,

Ou seja, $E(I) = \dfrac{1+r}{(1-r)^2}$ ■

Demonstração do Lema 2:
Vamos analisar apenas a região R afetada pelo movimento e escrever R_a e R_d para significar a configuração de R antes e depois do movimento.
Usaremos a notação X^+ e X^- para significar as sub-regiões do plano formadas pelos pontos (x,y) com $x > 0$ e $x < 0$ respectivamente.

Caso a: Movimentos horizontais para direita, sem "passar" para X^+.
Alterações apenas da parte (R) da configuração do tabuleiro mostrada na Figura 7.

Figura 7: Movimentos para direita, sem "passar" para X^+.

Antes, $E(R_a) = r^{|x-2|-y} + r^{|x-1|-y}$ → Depois, $E(R_d) = r^{|x|-y}$

Como x, $x-1$ e $x-2$ são todos não positivos, temos:

Antes, $E(R_a) = r^{-x+2-y} + r^{-x+1-y}$ → Depois, $E(R_d) = r^{-x-y}$

Podemos escrever estas equações como:

Antes, $E(R_a) = r^{-x-y}(r^2 + r)$ → Depois, $E(R_d) = r^{-x-y}(1)$

Agora, escolhendo r que satisfaça a equação:

$$\boxed{r^2 + r = 1},$$

temos que

(antes) $E(R_a) = E(R_d)$(depois).

Vale lembrar que r aqui escolhido é exatamente o famoso número da *razão áurea*:

$$r = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \sim 0,\ 618 \quad !!!$$

Caso b: Movimentos horizontais para esquerda, sem passar para X^-.
Alterações apenas da parte (R) da configuração do tabuleiro mostrada na Figura 8.

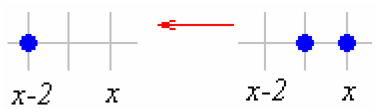


Figura 8: Movimentos para esquerda, sem "passar" para X^-.

$$\text{Depois, } E(R_d) = r^{|x-2|-y} \rightarrow \text{ Antes, } E(R_a) = r^{|x-1|-y} + r^{|x|-y}$$

Como x, x-1 e x-2 são todos não negativos, temos:

$$\text{Depois, } E(R_d) = r^{x-2-y} \rightarrow \text{ Antes, } E(R_a) = r^{x-1-y} + r^{x-y}$$

Podemos escrever estas equações como:

$$\text{Depois, } E(R_d) = r^{x-y}(r^{-2}) \rightarrow \text{ Antes, } E(R_a) = r^{x-y}(r^{-1}+1)$$

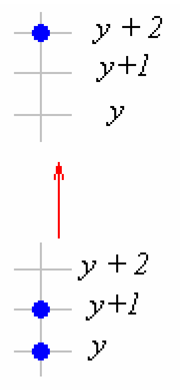
Com o mesmo valor de r da razão áurea:

$$1 = r + r^2 \rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r} + 1,$$

temos que

$$(\text{depois})\ E(R_d) = E(R_a)(\text{antes}).$$

Caso c: Movimentos verticais para cima.
Alterações apenas da parte (R) da configuração do tabuleiro mostrada na figura 9.



$$\text{Depois, } E(R_d) = r^{|x|-(y+2)} = r^{|x|-y}(r^{-2})$$

$$\text{Antes, } E(R_a) = r^{|x|-(y+1)} + r^{|x|-y} = r^{|x|-y}(r^{-1}+1)$$

Figura 9: Movimentos para cima.

Com o mesmo valor de r da razão áurea:

$$1 = r + r^2 \rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r} + 1,$$

temos que

$$(\text{depois})\ E(R_d) = E(R_a)(\text{antes}).$$

Estes são os casos em que E se mantém quando fazemos um destes movimentos:
a) para direita, sem passar para X^-.
b) para esquerda, sem passar para X^+.
c) para cima

Agora, veremos os casos em que E diminui.

Caso d: Movimentos horizontais para direita, fora de X^-.
Alterações apenas da parte (R) da configuração do tabuleiro mostrada na figura 10.

Figura 10: Movimentos para direita, fora de X^-.

$$\text{Antes, } E(R_a) = r^{|x-2|-y} + r^{|x-1|-y} \rightarrow \text{ Depois, } E(R_d) = r^{|x|-y}$$

Como x, $x-1$ e $x-2$ são todos não negativos, temos:

$$\text{Antes, } E(R_a) = r^{x-2-y} + r^{x-1-y} \rightarrow \text{ Depois, } E(R_d) = r^{x-y}$$

Podemos escrever estas equações como:

$$\text{Antes, } E(R_a) = r^{x-y}(r^{-2} + r^{-1}) \rightarrow \text{ Depois, } E(R_d) = r^{x-y}(1)$$

Com o mesmo valor de r da razão áurea:

$$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} > 1, \text{ pois } 1 + r > r^2,$$

uma vez que $1 + r > 1 - r = r^2$.

Então,

$$\text{(antes) } E(R_a) > E(R_d)\text{(depois).}$$

Caso e: Movimentos horizontais para esquerda, fora de X^+.
Alterações apenas da parte (R) da configuração do tabuleiro mostrada na figura 11.

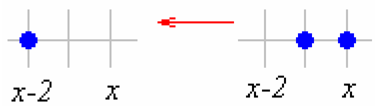


Figura 11: Movimentos para essquerda, fora de X^+.

$$\text{Depois, } E(R_d) = r^{|x-2|-y} \rightarrow \text{ Antes, } E(R_a) = r^{|x-1|-y} + r^{|x|-y}$$

Como x, $x-1$ e $x-2$ são todos não positivos, temos:

$$\text{Depois, } E(R_d) = r^{-x+2-y} \rightarrow \text{ Antes, } E(R_a) = r^{-x+1-y} + r^{-x-y}$$

Podemos escrever estas equações como:

$$\text{Depois, } E(R_d) = r^{-x-y}(r^2) \rightarrow \text{ Antes, } E(R_a) = r^{-x-y}(r+1)$$

Com o mesmo valor de r da razão áurea:

$$r^2 < r + 1,$$

Uma vez que $r^2 = 1 - r$

Então,

$$\text{(depois) } E(R_d) < E(R_a)\text{(antes).}$$

Caso f: Movimentos horizontais para direita, a partir de $x = -1$.
Alterações apenas da parte (R) da configuração do tabuleiro mostrada na figura 12.

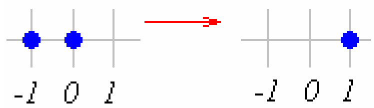


Figura 12: Movimentos para direita a partir de $x = -1$.

$$\text{Antes, } E(R_a) = r^{|-1|-y} + r^{|0|-y} \rightarrow \text{ Depois, } E(R_d) = r^{|1|-y}$$

Podemos escrever estas equações como:

$$\text{Antes, } E(R_a) = r^{-y}(r+1) \rightarrow \text{ Depois, } E(R_d) = r^{-y}(r)$$

Independente de r,

$$r + 1 > r.$$

Então,

$$\text{(antes) } E(R_a) > E(R_d)\text{(depois).}$$

Caso g: Movimentos horizontais para esquerda, a partir de $x = 1$.
Alterações apenas da parte (R) da configuração do tabuleiro mostrada na figura 13.

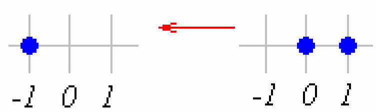


Figura 13: Movimentos para esquerda a partir de $x = -1$.

$$\text{Depois, } E(R_d) = r^{|-1|-y} \rightarrow \text{ Antes, } E(R_a) = r^{|0|-y} + r^{|1|-y}$$

Podemos escrever estas equações como:

$$\text{Depois, } E(R_d) = r^{-y}(r) \rightarrow \text{ Antes, } E(R_a) = r^{-y}(1+r)$$

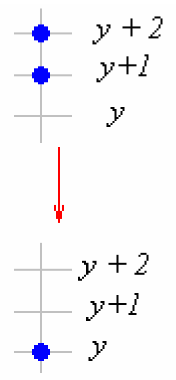
Independente de r,

$$r < 1 + r\,,$$

Então,

$$\text{(depois) } E(R_d) < E(R_a)\text{(antes).}$$

Caso h: Movimentos verticais para baixo.
Alterações apenas da parte (R) da configuração do tabuleiro mostrada na figura 14.



$$\text{Antes, } E(R_a) = r^{|x|-(y+2)} + r^{|x|-(y+1)} = r^{|x|-y}(r^{-2} + r^{-1})$$

$$\text{Depois, } E(R_d) = r^{|x|-y} = r^{|x|-y}(1)$$

Figura 14: Movimentos para baixo.

Com o mesmo valor de r da razão áurea:

$$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} > 1, \text{ pois } 1 + r > r^2,$$

uma vez que $1 + r > 1 - r = r^2$.

Então, temos que

$$\text{(antes) } E(R_a) > E(R_d) \text{ (depois)} \blacksquare$$

Demonstração do Teorema:
Como $r < 1$ é positivo*, temos que*

$$E^+(0,6) = r^{|0|-6} = r^{-6} \geq r^{-5} = E^+(0,5).$$

Agora, lembrando que $r^2 = 1 - r$, temos que $1 = r + r^2$, *ou* $\frac{1}{r} = 1+r$.

Então,

$$E^+(0,5) = \frac{1}{r^5} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{r^2}\right)^2 = (1+r)\left(\frac{1}{1-r}\right)^2 = \frac{1+r}{(1-r)^2} = E(I) \blacksquare$$

6. E a "altura" y = 5?:
Um resumo dos movimentos que matem a *energia E* e dos que diminuem *E* podem ser vistos na Figura 15. Este resumo nos ajudar a tentar responder a principal pergunta feita na introdução.

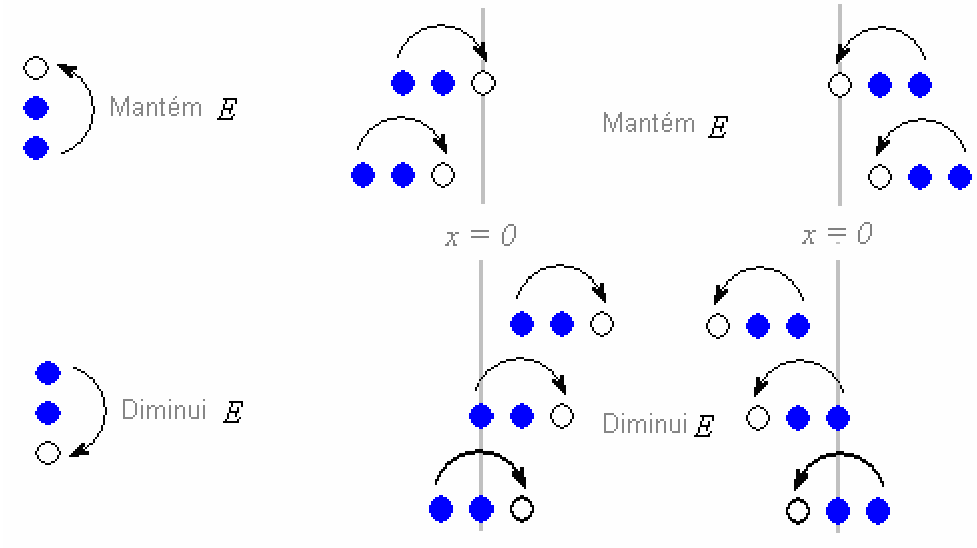


Figura 15: Movimentos do jogo e respectivas alterações de Energia.

Se atingirmos a "altura" $y = 5$, sem perder a generalidade, podemos supor que o seja no ponto $(0,5)$. Com isto, como $E^+(0,5) = E(I)$, só será possível chegar na "altura" $y = 5$ se apenas fizermos movimento mantém *E*, "eliminando" TODAS as peças e restando apenas a peça na posição $(0,5)$. Imediatamente antes do último movimento, restariam dois pinos nas posições $(0,3)$ e $(0,4)$.

Como cada movimento elimina uma peça, deveríamos ter infinitos movimentos para chegarmos na configuração acima descrita. Isto é impossível. Respondemos então a principal pergunta feita no final da introdução.

7. Considerações

Supondo que pudéssemos fazer os movimentos $m(n)$ numa velocidade $v(n)$ cada vez maior, como, por exemplo, $v(n) = t.k^{1-n}$, com t fixo equivalente ao tempo necessário para o primeiro movimento e $k > 1$. Assim, poderíamos conseguir todos estes movimentos no tempo $\frac{kt}{k-1}$ finito.

Pergunta:
Seria possível, então, exibir uma seqüência infinitas de movimentos que culminaria com a configuração acima descrita, neste tempo?

Referências:

- Apresentação da palestra "*O Jogo do resta um num tabuleiro infinito*" pelo do Professor Alexandre Baraviera, no EREMAT - 2007 em Canoas - RS

- http://www.divertudo.com.br/restaum/restaum.html (visitado 12/junho/2009)