# *Teoria das Filas*

Milton Procópio de Borba

**1.**Características: ✓ Modelos de Chegada
✓ Modelos de Serviço
✓ Número de Atendentes
✓ Capacidade do Sistema
✓ Disciplinas das Filas

✓ Modelos de Chegada:
Representa o *tempo entre chegadas*. *Determinístico*,
*Aleatório* (com probabilidade conhecida)

✓ Modelos de Serviço:
Representa o *tempo de atendimento*. *Determinístico*,
*Aleatório* (com probabilidade conhecida)
se a *fila é única ou múltiplas* (ver ilustrações na página seguinte)

✓ Número de Atendentes:
em *série* (mais que um atendente por usuário, em estágios)
ou *paralelo* ( cada usuário é completamente atendido por um só)

✓ Capacidade do Sistema:
Número máximo de usuários sendo *atendido*
ou na fila de *espera*

✓ Disciplinas das Filas:
Ordem em que é atendido o usuário. *Primeiro* a chegar é o *primeiro* a sair
*Último* a chegar é o *primeiro* a sair
Atendimento *aleatório*
Atendimento por *Prioridade*

**2.** Notação de *Kendall:* v/w/x/y/z, onde v → Modelos de Chegada
w → Modelos de Serviço
x → Número de Atendentes
y → Capacidade do Sistema
z → Disciplinas das Filas

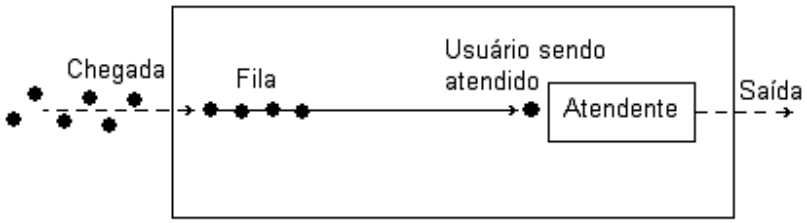
**3.** *Resumo:*

| Características da fila | Símbolo | Significado |
|---|---|---|
| Tempo entre chegadas<br>ou<br>Tempo de atendimento | D<br>M<br>A<br>G | Determinístico<br>Exponencial (Poisson)<br>Aleatório<br>Outros |
| Disciplina na Fila | FIFO<br>LIFO<br>SIRO<br>PRI<br>GD | *Primeiro* a chegar é o *primeiro* a sair<br>*Último* a chegar é o *primeiro* a sair<br>Atendimento *aleatório*<br>Atendimento por *Prioridade*<br>*Outra Ordem* |

**4.** *Exemplo*: Um sistema D/M/3/10/LIFO significa que a chegada é *determinística*, o tempo de atendimento é *exponencial*, com 3 *atendentes* e uma capacidade máxima de 10 *usuários*, sendo que o *último* a chegar é o *primeiro* a sair.

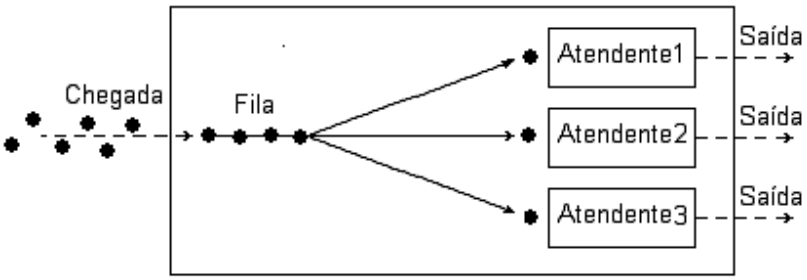
**5.** *Ilustrações de tipos de atendimento em filas*

a)



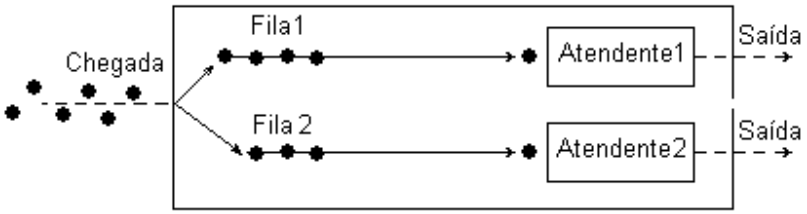

Fila única, atendente único

b)



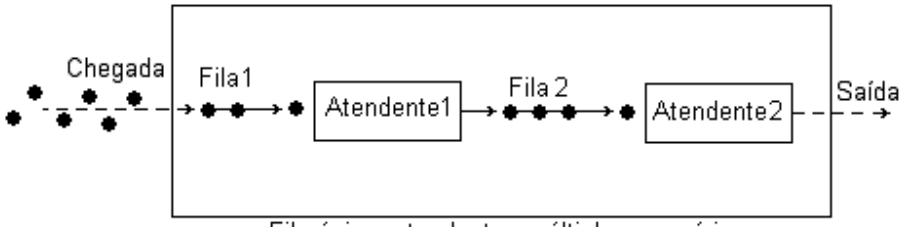

Fila única, atendentes múltiplos em paralelo

c)




Filas múltiplas, atendentes múltiplos em paralelo

d)

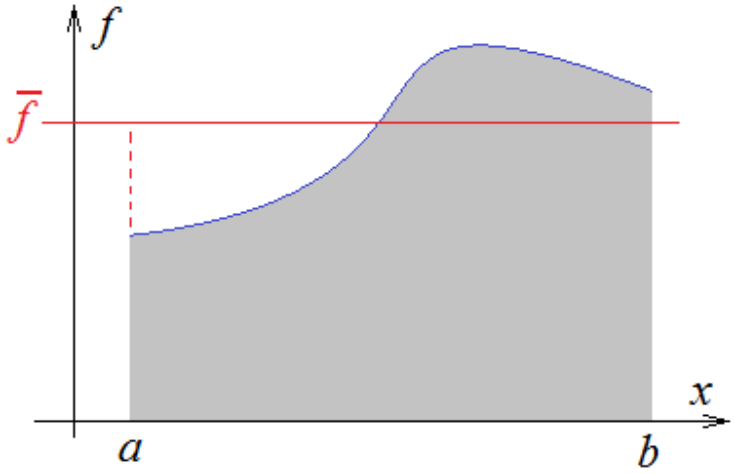



Fila única, atendentes múltiplos em série

**6.** *Principais fórmulas relacionando as grandezas envolvidas.*

**6.1.** *Cálculo de Filas* ***D/D/1***

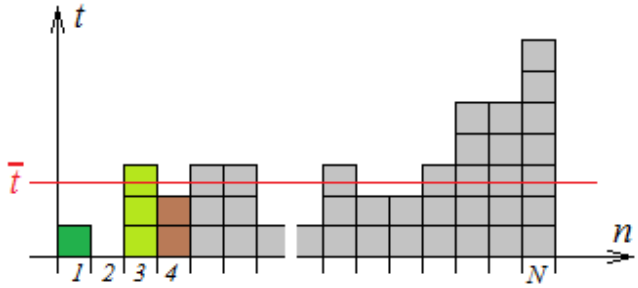
**6.1.1.** *Valor médio de uma função*




$\bar{f}.(b - a) = \text{Área}$

$$\bar{f} = \frac{Área}{b-a}$$

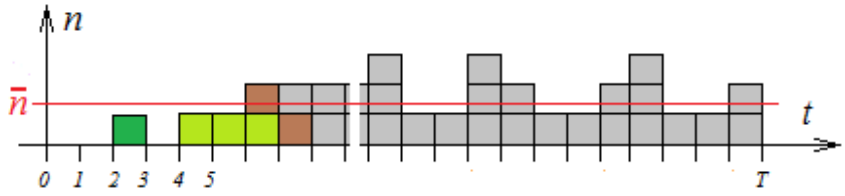
**6.1.2.** *Tempo médio na fila (ou no sistema)*




$\bar{t}.N = Área$

$$\bar{t} = \frac{Área}{N}$$

**6.1.3.** *Número médio na fila (ou no sistema)*




$\bar{n}.\mathrm{T} = Área$

$$\bar{n} = \frac{Área}{T}$$

**6.1.4.** *Propriedade*

Os dois últimos gráficos têm a mesma *Área*

**6.2.** *Cálculo de Fila **M/M/1***

- Chegada: *Exponencialmente* distribuída, com média = $\lambda$ (*unid. / unid. tempo*)
- Atendimento: *Exponencialmente* distribuído = $\mu$ (*unid. / unid. tempo*)

Se $\lambda \geq \mu$ então não ocorre a situação *estacionária*

Analisaremos, agora, a situação *estacionária* quando $\lambda < \mu$.

| | |
|---|---|
| $\frac{1}{\lambda}$ = *tempo* médio entre chegadas na fila.<br>$\frac{1}{\mu}$ = *tempo* médio de atendimento.<br>$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$ = *número* provável no sistema.<br>$Lq = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$ = *número* provável na fila.<br>$L_n = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$ = *número* provável na fila não vazia. | $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ = *ocupação* do sistema.<br>$1 - \rho$ = probabilidade do sistema estar *vazio*.<br>$1 - \rho^2$ = probabilidade da fila estar *vazia*.<br>$W = \frac{1}{\mu - \lambda}$ = *tempo* provável no sistema.<br>$Wq = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$ = *tempo* provável na fila.<br>$W_n = \frac{1}{\mu - \lambda}$ = *tempo* provável na fila não vazia. |
| $W(t) = e^{-t/W}$ = *probabilidade* de um usuário esperar mais que *t* unid. de tempo no sistema.<br>$W_q(t) = \rho\, e^{-t/W}$ = *probabilidade* de um usuário esperar mais que *t* unid. de tempo na fila.<br>*Probabilidade* de existirem *n* clientes no sistema = $(1 - \rho).\rho^n$ | |